数理解析研究所講究録
第 797 巻 1992 年 32-48

Kloosterman zeta 関数の評価について

九大理 吉田 英治 (Eiji Yoshida)

§1. Introduction

1). Γ を cusp ∞ をもつ第1種フックス群, $\Gamma_\infty = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma \}$ を cusp ∞ の stabilizer, δ を $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$ となる最小正数とする. $m, n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ に対し Γ に附随した Kloosterman sum を次で定義する:

$$S(m, n, c, \Gamma) = \sum_{\substack{0 \leq a < \delta |c| \\ 0 \leq d < \delta |c|}} e\left(\frac{ma + nd}{\delta c}\right) , \quad \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma .$$

ここで, $e(x) = e^{2\pi i x}$. これは, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ の c-part を固定したとき, 両側類別 $\Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_\infty$ の代表元を渡る和になっている.

Selberg は 論文[8] の中で, sums of Kloosterman sums と呼ばれるある有限和に対する有名な予想を述べている:

<u>Linnik-Selberg 予想</u>. Γ が合同群ならば, 十分大きな x に対し

$$(1.1) \qquad \sum_{c < x} \frac{S(m, n, c, \Gamma)}{c} = O(x^{\varepsilon}) \quad , \forall \varepsilon > 0$$

O は m, n に依存しない定数 (Γ には依存してもよいかも知れない).

Γ が合同群のときには, Weil estimate と呼ばれる次の評価が

知られている：

(1.2) $\quad |S(m,n,c,\Gamma)| \leqq (m,n,c)^{1/2} d(c)\, c^{1/2}$

$(\ ,\ ,\ )$ は最大公約数，$d(c)$ は divisor 関数．

この評価式を使っても，(1.1) は $O(x^{1/2+\varepsilon})$ となるだけで，予想と 1/2 の開きがある．Weil estimate は Kloosterman sum 自身に対する評価としては best possible であろうと言われているので，上述の予想は，有限和の中で大きな相殺が起こるであろうと言っていることになるが，一方で sums of Kloosterman sums 全体を扱える方法が必要なこともわかる．Selberg の論文[8]は，保型関数のスペクトル理論という立場から，上述の予想への可能性を考察したものと思われるが，総合的な検証も同時になされており，例えば予想の成立しそうにないフックス群が具体的に構成されてもいる．Γ が合同群でなければならない所に，数論的な深い意味がありそうに思われる．

2). 保型関数のスペクトル理論に於ける最も一般的な状況を以下に書いてみたい．

H を上半平面，$z \in H$ とする．Γ は cusp ∞ をもつ第1種フックス群で $\mathcal{D}_\Gamma\ (= {}_\Gamma\backslash^H)$ を基本領域とする．$d\mu(z) = y^{-2}dxdy$ とする．

非負実数 k に対し，$\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ が

$$\chi(-1) = e^{ik\pi}$$

$$j_{\gamma\gamma'}(z)^k \chi(\gamma\gamma') = j_\gamma(\gamma' z)^k j_{\gamma'}(z)^k \chi(\gamma)\chi(\gamma'), \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$$

を満たすとき，χ を Γ, k に関する multiplier と言い，組 (Γ, k, χ) を Γ, k の multiplier system と呼ぶ．ここで $j_\gamma(z) = cz+d$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. また α $(0 \leqq \alpha < 1)$ を $\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & q \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{-2\pi i \alpha}$ となる値とする．k は通常の weight に相当するもので，k が偶数なら，χ は Γ の ($\Gamma \ni -1$ なら $\Gamma/\{\pm 1\}$ 上の) character になる．

次に，$f: H \longrightarrow \mathbb{C}$ が次の条件

$$f(\gamma z) = \chi(\gamma)\left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^k f(z), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$\int_{\mathcal{D}_\Gamma} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty$$

を満たすとき，f の作る Hilbert 空間を $L^2(\mathcal{D}_\Gamma, k, \chi)$ とかく．このとき Laplacian は $\Delta_k = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - iky\frac{\partial}{\partial x}$ となり，Kloosterman sum は次の様に拡張される：

$$S(m, n, c, \Gamma, \chi) = \sum_{\substack{0 \leqq a < q|c| \\ 0 \leqq d < q|c|}} e\left(\frac{(m-\alpha)a + (n-\alpha)d}{qc}\right), \quad \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

$|S(m,n,c,\Gamma,\chi)| \leqq q|c|$ は明らか．通常の Kloosterman sum は $k=0, \chi \equiv 1$ の時と思える．Laplacian Δ_k を $L^2(\mathcal{D}_\Gamma, k, \chi)$ に作用させたとき，一般には exceptional eigenvalue と呼ばれる固有値 λ_j が有限個存在し，$\lambda_j = s_j(1-s_j)$ と書けば，$\frac{1}{2} < s_j < 1$ となる．また，λ_j に対応する Δ_k の固有関数を $f_j(z)$ とすれば，$f_j(z)$ は次の様に与えられる：

$$f_j(z) = c_j(0)y^{s_j} + c_j'(0)y^{1-s_j} + \sum_{n \neq 0} c_j(n) W_{\frac{k}{2}\operatorname{sgn}(\frac{n-\alpha}{q}),\, s_j - \frac{1}{2}}\left(4\pi\left|\frac{n-\alpha}{q}\right|y\right) e\left(\frac{n-\alpha}{q}x\right)$$

$W_{\nu,\mu}(z)$ は Wittaker 関数で，$c_j(0)$, $c_j'(0)$, $c_j(n) \in \mathbb{C}$ はある定数．

3). スペクトル理論の立場から *sums of Kloosterman sums* という有限和の評価にアプローチすると，どの様な方法をとっても最終的には次の様な形になる：

$$(1.3) \quad \sum_{c<X} \frac{S(m,n,c,\chi)}{c} = \sum_{1/2<s_j<1} \tau_j(m,n) \frac{X^{2s_j-1}}{2s_j-1} + O(a_0(m,n,k,q)\cdot\alpha(X) X^{\beta})$$

ここで，$a_0(m,n,k,q)$ は，m,n,k,q に依存するある量で，$\alpha(X)$ は X の関数．また，

$$\tau_j(m,n) = \frac{q^2\,\overline{c_j(m)}\,c_j(n)\left|\frac{(m-\alpha)(n-\alpha)}{q^2}\right|^{1-s_j}\Gamma(s_j+\frac{k}{2})\Gamma(2s_j-1)}{(-i)^k 4^{2s_j}\pi^{3s_j+1}\Gamma(s_j-\frac{k}{2})}.$$

これからわかる様に，½よりある程度大きい s_j（従って *exceptional eigenvalue*）が存在する (Γ,k,χ) に対しては，$O(\ )$ の所をいくらよく出来ても (1.1) の評価を満たしそうにない事がわかる．また，s_j の存在しない事がわかった場合は，$O(\ )$ を (1.1) の評価にどれだけ近づけられるかが次の問題になる．

Remark.1．Γ：合同群，$k=0$，$\chi\equiv1$ のとき，*exceptional eigenvalue* s_j が存在しないであろうという予想が[8]で述べられており，Selberg の固有値予想と呼ばれている．$SL(2,\mathbb{Z})$ の時には正しい事がすでにわかっており，Hecke 型の合同群 $\Gamma_0(N)$ $(N\leqq17)$ についても正しい事が Huxley [4] によって示されている．とにかく，Selberg の固有値予想タイプが成立する Γ に対しては，上述 (1.3) での $\sum_{s_j}$ の部分が存在しないことになる．また，合同群の場合は，*Weil estimate* から，s_j は存在するとしても $\leqq 3/4$ を満たすこともわかっている．

・ Remark. 2. $k=1/2$, χが適当な合同群に於けるテータ multiplier のとき, $s_j=3/4$ で確かに exceptional eigenvalue を持つことも知られている. 従ってこの場合は, (1.3) は $O(X^{1/2})$ 以上にはよくならない. また, いくつかの multiplier system (Γ, k, χ) に対し, s_j の存在, 非存在が調べられている ([2], [7], [3 : Notes for chapter eleven], [8] などを参照のこと).

4). Hilbert 空間 $L^2(\mathcal{D}_\Gamma, k, \chi)$ に附随した Kloosterman zeta 関数を次で定義する:

$$Z_{m,n}(s, \Gamma, \chi) := \sum_{c \neq 0} \frac{S(m, n, c, \Gamma, \chi)}{|c|^{2s}}.$$

これは, 一般には $Re(s)>1$ で絶対収束. Γ: 合同群, $\chi\equiv 1$ の場合は, Weil estimate から $Re(s)>3/4$ で絶対収束する. スペクトル理論の一般論から, $Z_{m,n}(s, \Gamma, \chi)$ は s-全平面に解析接続され, $s=s_j$ で1位の pole を持つことが知られており, 上述 $\tau_j(m,n)$ は実はそこでの留数になっている. 即ち, $\operatorname{res}_{s=s_j} Z_{m,n}(s, \Gamma, \chi) = \tau_j(m,n)$.

Kuznetsov [5] は, $\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$, $k=0$, $\chi\equiv 1$ の場合に, s_j の非存在を踏まえて, (1.3) に於て, $\beta=1/6$, $\alpha(x)=(\log x)^{1/3}$ を得た (Weil estimate を使った上での結果であることに注意). また, $a_0(m,n,k,g)=a_0(m,n)$ については明確に得られていない. Deshouillers-Iwaniec [1] は $\Gamma_0(g)$ に対し, Selberg の固有値予想の仮定の下で, Kuznetsov と同様の結果を得ている ([6] を参照).

一方, 少し後に Goldfeld-Sarnak [2] は任意の multiplier system (Γ, k, χ) について (1.3) に対するある結果を得ている (§2 で詳しく述べる).

$k=0$, $\chi\equiv 1$, $\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$ (例えば) の時には, Kuznetsov と殆ど同じ強さの結果になっている. 両者とも non-holomorphic Poincaré 級数の内積に対する formula を求める点では同じであるが, Kuznetsov の場合は,それ以後スペクトル分解 formula と Kuznetsov の trace formula と呼ばれるものを使うのに対し, Goldfeld-Sarnak は resolvent の一般論を用いて, $Z_{m,n}(s,\Gamma,\chi)$ の $Re(s)>1/2$ での評価を得る事を目的としている.

5). Goldfeld-Sarnak は, 任意の multiplier system (Γ,k,χ) に対し, 一様に成立する結果を得たという点で大変興味深いが (大雑把には, (1.3) で $\beta=1/3$ とおける), Remark. 2 などを考慮すれば, 予想 (1.1) が任意の (Γ,k,χ) に対し成立するとはとても思えない. Selberg が予想 (1.1) を Γ: 合同群, $k=0$, $\chi\equiv1$ に限ったのには深い意味があると思われるし, Goldfeld-Sarnak の結果を Γ: 合同群, $k=0$, $\chi\equiv1$ の状況に制限した場合でも (このときは $\beta=1/6$ となる), 予想 (1.1) とかなりの開きがある訳だから, (1.1) の予想される評価に近づくことを目的とするならば, むしろ Γ: 合同群, $k=0$, $\chi\equiv1$ の特殊な状況にのみ成立する, あるいはそういう状況に自然に限定されてしまう様な解析的, あるいは数論的な現象を追い求める事が必要だと思われる.

筆者は, 大筋では Goldfeld-Sarnak の道筋に従い, $\underline{k=0}$ の場合に $Z_{m,n}(s,\chi)$ の m,n に対する評価を少しだけよくする事が出来た. それによって, (1.3) に対しても $k=0$ のとき評価が少しよくなる. non-holomorphic Poincaré 級数に対する内積の異なった表示式を得た (§3

で述べる）事が理由であるが，この表示式は $k=0$ のときのみ可能なものとなっている．論文[10]では Γ：合同群，$\chi\equiv1$ と更に限定してしまったが，実はこれは全く必要なく，上の formula は Γ：任意第1種フックス群，χ：任意 character の状況で可能である．従って，[10]からは Γ：合同群，$\chi\equiv1$ でなければならないという動機は全く見い出せない．経験的には，例えば内積などの計算過程で，Kloosterman sum の評価に対し，Weil estimate に近い様な評価が必要となる様な場合には（従って，Γ，χ が限定される），新しい現象に出会える事が期待出来そうである（§4を参照）．

§2．$Z_{m,n}(s,\chi)$ の評価から（1.3）に至る手順

この過程は全く機械的で，Hejhal [3：Appendix. E] に詳しく書かれているのでそれに従ってみたい．また，Hejhal は同じ所で，$Z_{m,n}(s,\chi)$ に対し，Goldfeld-Sarnak よりも少しよい評価を得ている．

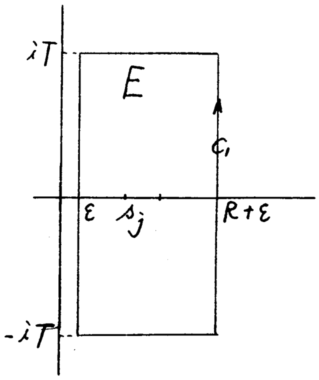
R を $R:=\limsup_{|c|\to\infty}\dfrac{\log|S(m,n,c,\chi)|}{\log|c|}$ で定義し（常に $R\leqq1$），A を $|S(m,n,c,\chi)|\leqq A|c|^{R+\delta}$ $\forall\delta>0$ となるある定数とする．また，T を十分大きな数 x に対し，$1\leqq T\leqq x^R$ を満たす様にとる．

$s=\sigma+it$ とし，Kloosterman zeta 関数 $Z_{m,n}(s,\chi)$ が $\sigma>1/2$，$|t|\geqq1$ で次の様に評価されたとする．

$$Z_{m,n}(s,\chi)=O\left(\frac{BD^{\sigma}|t|^{1/N}}{(\sigma-\frac{1}{2})^{a}}\right)$$

O は一般には k に依存する． ←――― $k=0$ なら単なる定数

Chauchy の積分定理から,



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E} Z_{m.m}\left(\frac{1+s}{2}, x\right)\frac{x^s}{s}\,ds$$

$$= \sum_{s_j}\tau_j(m.m)\frac{x^{2s_j-1}}{2s_j-1}$$

解析数論の一般論から,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} Z_{m.n}\left(\frac{1+s}{2}, x\right)\frac{x^s}{s}\,ds$$

単なる定数.

$$= \sum_{c<x}\frac{S(m.n.c.x)}{c} + O(1)\,\frac{Ax^R\log x}{T}$$

Phragmén - Lindelöf の補題から,

$$Z_{m.m}\left(\frac{1+s}{2}, x\right) = O\left(\frac{A+B}{\varepsilon^a}|t|^{\frac{1}{NR}(R+\varepsilon-\sigma)}D^{\frac{\varepsilon}{R}(R+\varepsilon-\sigma)}\right)$$

$\sigma = Re(s)$, $t = Im(s)$. O は R に依存する. $R=0$ なら単なる定数. $\varepsilon = \frac{1}{\log x}$ とおくと, 上の評価式を用いて, ∂E 上の残りの3辺は次の様に評価される.

$$O(1)\,\frac{A+B}{T}D^{\frac{1}{\log x}}x^R(\log x)^{a-1}$$

$$+\,O(1)BD^{\frac{1}{\log x}}(\log x)^a\left\{T^{1/N}+(\log x)\right\}$$

$T = x^{\frac{N}{N+1}R}$ とおけば, 最終的に

$$\sum_{c<x}\frac{S(m.n.c.x)}{c} = \sum_{1/2<s_j<1}\tau_j(m.n)\frac{x^{2s_j-1}}{2s_j-1}$$

$$+\,O(1)\left\{(A+B)D^{\frac{1}{\log x}}(\log x)^a x^{\frac{1}{N+1}R}\right\}. \tag{2.1}$$

O は一般には R に依存し, $R=0$ ならば単なる定数.

(2.1) の B, D, a, N に対し, Goldfeld - Sarnak, Hejhal はそれ

ぞれ，次の結果を得ている．

1．Goldfeld-Sarnak［2］．任意 (Γ, k, χ) に対し，$B=\frac{|m-\alpha||n-\alpha|}{\delta^2}Vol(\mathcal{D}_\Gamma)$，$D=1$，$a=1$，$N=2$ とおける．k に対する依存性は正確に求められていない．

2．Hejhal［3］．任意 (Γ, k, χ) に対し，$B=\frac{B_0}{\delta^2}Vol(\mathcal{D}_\Gamma)$，$B_0$ は $B_0=\min\{|m-\alpha||n-\alpha|^{1/2}, |m-\alpha|^{1/2}|n-\alpha|\}$，$D=1$，$a=2$，$N=2$ とおける．k に対する依存性は 1．と同様．

筆者の得た結果は次の様である．

3．［10］．$k=0$，Γ, χ は任意のとき，$B=(|m-\alpha||n-\alpha|)^{1/2}$，$D=\max\{1, (\frac{\delta}{c_0})^2\}$，$a=3$，$N=2$．ここで c_0 は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ に於ける c-part の絶対値が最小のもの．

Remark．3．［10］では，Γ：合同群，$\chi\equiv1$ の場合のみを書いているが，実際は，任意 Γ, χ に対し，上述の様な結果が得られる．

3 は，必然的に $k=0$ の場合にしか適用出来ないにもかかわらず，結果的には m, n に対する依存性を Hejhal よりほんの少し改良出来た所に止まっている．Γ, χ に対する制限が本質的につかない為，予想 (1.1) に深く関連したものにまだなっていないからだと思われる．

(2.1) の A，R に対しては，一般の Γ に対しては $A=\delta$，$R=1$ であり，Γ：合同群の時には，Weil estimate から，$A=\min\{|m|^{1/2}, |n|^{1/2}\}$，$R=1/2$ とれる．

この方向で，予想 (1.1) が言える為には，例えば次の事が示せ

れば十分である．Γ：合同群，$k=0$，$\chi\equiv 1$ のとき，

(i) $Z_{m,n}(s,\Gamma)$ が $\mathrm{Re}(s)>1/2$ で正則．これは Selberg の固有値予想と同値で，(2.1) の $\sum_{j}$ の部分が存在しないことを意味する．

(ii) $Z_{m,n}(s,\Gamma)=O\left(\dfrac{|t|^{\delta}}{(\sigma-\frac{1}{2})^{a}}\right)$，(ある十分小さい $\delta>0$)．a は何でもよい．O は単なる定数．

上の2つが言えれば，(2.1) の A, R として，$A=\varepsilon$, $R=1$ としておけば十分で，Weil estimate を使う必要がない．しかし，上の2つは Γ：合同群，$k=0$，$\chi\equiv 1$ と必然的に制限する様な現象が得られなければ言えるはずがなく，仮にその様なものが存在するとしても，どこかのプロセスに Weil estimate に相当する数論的性質を用いる必要性が生じるだろうと思われる．

§3．$\langle P_m(z,s,\Gamma,k,\chi),\ P_n(z,\bar{w},\Gamma,k,\bar{\chi})\rangle$ に対する種々の formula．

§2からわかる様に，(1.3) あるいは (2.1) の $O(\ \ )$ の部分の評価をよくすることは，$Z_{m,n}(s,\chi)$ のよりよい評価を得る事と同値である．一方，$Z_{m,n}(s,\chi)$ の評価は，non-holomorphic Poincaré 級数の内積を通して得られるのが通常で，それに対し，どれだけよい表示が得られるかがポイントになる．しかも，(Γ,k,χ) に制限がつく程，よりよい評価の得られる可能性が高くなるという事かも知れない．以下，現在知られている種々の表示を書いてみたい．

任意 (Γ,k,χ) に対し，non-holomorphic Poincaré 級数は次で定義される：

$$P_m(z,s,\Gamma,k,\chi) := \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \overline{\chi(\gamma)} \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^{-k} e^{2\pi i\frac{m-\alpha}{q}x(\gamma z)} e^{-2\pi\frac{|m-\alpha|}{q}y(\gamma z)} y(\gamma z)^{s}$$

ここで, $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ で, $\gamma z = x(\gamma z)+iy(\gamma z)$. これは $Re(s)>1$ で絶対収束し, $L^2(\mathcal{D}_\Gamma,k,\chi)$ に入る. non-holomorphic Poincaré 級数同士の内積は次の様になる:

$$\langle P_m(z,s,\Gamma,k,\chi), P_n(z,\bar{w},\Gamma,k,\bar{\chi})\rangle = q\int_0^\infty y^{w-2} a_m(y,s,n,\Gamma,k,\chi) e^{-2\pi\frac{|n-\alpha|}{q}y}\,dy.$$

ここで a_m は P_m の n 番目の Fourier 係数.

以下は上式右辺を計算したものである.

1. Goldfeld - Sarnak. 任意 (Γ,k,χ) に対し, $Re(w)>Re(s)>1$ で,

$$\begin{aligned}\langle P_m, P_n\rangle &= \delta_{m,n}\, q \left(4\pi\frac{|m-\alpha|}{q}\right)^{1-s-w}\Gamma(s+w-1)\\
&+ \sum_{c\neq 0}\frac{S(m,n,c,\chi)}{|c|^{2s}}\int_0^\infty y^{w-s} e^{-2\pi\frac{|n-\alpha|}{q}y}\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{s}}\left(\frac{x+i}{(x^2+1)^{1/2}}\right)^{-k} e^{-2\pi\frac{m-\alpha}{q}\frac{1}{yc^2(x+i)}-2\pi i\frac{n-\alpha}{q}xy}\,dx\,\frac{dy}{y}\end{aligned}$$

2. Kuznetsov, Deshouillers - Iwaniec. $k=0$, Γ: 任意フックス群, χ: 任意 character に対し, $mn>0$ のとき, $Re(s)>1$, $Re(w)>1$, $Re(s+w)<5/2$ で,

$$\begin{aligned}\langle P_m, P_n\rangle &= \delta_{m,n}\, q \left(4\pi\frac{|m-\alpha|}{q}\right)^{1-s-w}\Gamma(s+w-1)\\
&+\left|\frac{m-\alpha}{n-\alpha}\right|^{\frac{1}{2}(w-s)}\frac{2^{3-s-w}}{\sin\pi(s-w)}\sum_{c\neq 0}\frac{S(m,n,c,\chi)}{|c|^{2s}}\\
&\qquad\times\pi\int_1^\infty\left(u-\frac{1}{u}\right)^{s+w-2}\Big\{-\sin(\pi s)J_{s-w}\Big(4\pi\frac{\sqrt{|m-\alpha||n-\alpha|}}{q|c|}u\Big)\\
&\qquad\qquad+\sin(\pi w)J_{w-s}\Big(4\pi\frac{\sqrt{|m-\alpha||n-\alpha|}}{q|c|}u\Big)\Big\}\frac{du}{u}.\end{aligned}$$

$mn<0$ のとき, $Re(s)>1$, $Re(w)>1$ で,

$$\langle P_m, P_n\rangle = 2^{5-s-3w}\pi^{2-w}q^{w-1}\frac{\Gamma(s+w-1)}{\Gamma(s)\Gamma(w)}|m-\alpha|^{(1-s)/2}|n-\alpha|^{(s-2w+1)/2}$$
$$\times\sum_{c\neq 0}\frac{S(m,n,c,\chi)}{|c|^{1+s}}\left(4\pi\frac{(|m-\alpha||n-\alpha|)^{1/2}}{q|c|}\right)^{w-1}K_{w-s}\left(4\pi\frac{(|m-\alpha||n-\alpha|)^{1/2}}{q|c|}\right)$$

Remark.4. Kuznetsov, Deshouillers-Iwaniec は Γ が特殊な合同群, $\chi\equiv 1$ の場合のみを書いているが, 上述の様に, $k=0$ ならば Γ: 任意フックス群, χ: 任意 character の場合まで容易に拡張出来る.

3. [10: Proposition]. $k=0$, Γ: 任意フックス群, χ: 任意 character に対し, $\mathrm{Re}(s)>1$, $\mathrm{Re}(w)>1$ で,

$$\langle P_m, P_n\rangle = \delta_{m,n}\, q\left(4\pi\frac{|m-\alpha|}{q}\right)^{1-s-w}\Gamma(s+w-1)$$
$$+2f_{m,n}(s,w)\sum_{c\neq 0}\frac{S(m,n,c,\Gamma,\chi)}{|c|^{1+s}}\alpha^{w-1}K_{w-s}(\alpha)$$
$$-\varepsilon_{m,n}f_{m,n}(s,w)\sum_{c\neq 0}\frac{S(m,n,c,\Gamma,\chi)}{|c|^{1+s}}\alpha^{w}R_{m,n}(s,w,c,\Gamma)$$

ここで, $\varepsilon_{m,n}=\begin{cases}1 & mn>0\\ 0 & mn<0\end{cases}$, $\alpha = 4\pi\dfrac{(|m-\alpha||n-\alpha|)^{1/2}}{q|c|}$,

$$f_{m,n}(s,w) = 2^{4-s-3w}\pi^{2-w}q^{w-1}\frac{\Gamma(s+w-1)}{\Gamma(s)\Gamma(w)}|m-\alpha|^{(1-s)/2}|n-\alpha|^{(s-2w+1)/2},$$

$$R_{m,n}(s,w,c,\Gamma) = \int_0^1 K_{w-s}(\alpha\sqrt{u})\,u^{(s+w)/2}(1-u)^{-1/2}J_1(\alpha(1-u)^{1/2})\,du$$
$$+\int_0^1 K_{w-s}(\alpha\sqrt{u})\,u^{(s+w-2)/2}(1-u)^{1/2}J_1(\alpha(1-u)^{1/2})\,du.$$

Remark.5. この場合も [10] では Γ: 合同群, $\chi\equiv 1$ の場合のみを書いたが, 上述の様に, $k=0$ である限り容易に拡張出来る. また, 2 と 3 の formula は $mn<0$ のとき, 全く同じものになっている. 同じ内積

を扱っているのだから同じ形が出ても何ら不思議ではないが，例えば $mn>0$ のとき，2.3 の各右辺だけを眺めて，恒等的に等しい事を示すのは不可能に近いのではないかと思われる．またこの formula が $k=0$ に限られるのは Fourier 係数の表示式として［9：Theorem.B］を使ったからで，［9］の表示式は $k=0$ の時にしか成立しないからである．

内積の表示式からどの様に $Z_{m,n}(s,\Gamma,\chi)$ の評価を導くかは種々の論文を参考にして下さい．

§4．$\langle P_m^N(z,s,\Gamma), P_n(z,\bar{w},\Gamma)\rangle$ について

以後 $k=0$ とし，Γ：任意のフックス群とする．また簡単の為 $\chi\equiv 1$ とする．任意 character の場合は形式的に拡張出来る．

筆者は以前［10］に於て，$P_m^N(z,s,\Gamma)$ なるある意味での non-holomorphic Poincaré 級数の拡張を考え，その Fourier 係数を $mn>0$ の場合に求めた（［10：Prop.2］）．ここでは，P_m^N と P_n との内積について書いてみたい．

P_m^N は，$\lim_{N\to\infty} P_m^N\equiv 0$，$\lim_{N\to 0} P_m^N = P_m$ という２つの性質をもっている．§3 で述べた通常の内積と比較して，特に前者の場合に興味を持たのであるが，理由は，P_m^N は P_m と全く同じ量の $Z_{m,n}(s)$ を持っており，しかも $N\to\infty$ のとき 0 になってしまうから $\langle P_m^N, P_n\rangle\to 0$ となってしまい，resolvent の議論が全く不要になってしまうからである．§3 で $Z_{m,n}(s)$ の特に $|t|^{1/2}$ がよくならないのは，resolvent の評価が悪過ぎる事に原因している．

P_m^N は次で定義される：

$$P_m^N(z,s,\Gamma) := \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} e^{2\pi i\frac{m}{q}x(\gamma z)} e^{-2\pi\frac{|m|}{q}y(\gamma z)} \left(\frac{y(\gamma z)}{1+Ny(\gamma z)}\right)^s$$

これは $Re(s)>1$ で絶対収束し，$L^2(\mathcal{D}_\Gamma)$ に入る．まず次の様になる．

$$\langle P_m^N(z,s,\Gamma),\ P_n(z,\bar{w},\Gamma)\rangle = \delta_{m,n} q\int_0^\infty y^{w-2} e^{-2\pi\frac{|m|}{q}y}\left(\frac{y}{1+Ny}\right)^s dy$$

(4.1)
$$+\,2^{3-w}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{s+1}|m|^{\frac{w}{2}}|n|^{s-\frac{w}{2}}\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)\,c^{-(2s+w)}$$

$$\times\int_0^\infty t^{2s-1}(1+t^2)^{-\frac{w}{2}}\int_0^1 e^{-\pi\frac{|m|}{q}\frac{N}{c^2}t^2(1-u)} J_{-w}\left(\sqrt{u}\,\frac{4\pi}{qc}|mn|^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t^2}\right)u^{-\frac{w}{2}}(1-u)^{s+w-2}\,du\,dt$$

ただし，$mn>0$．$N\to 0$ とすると，これは通常の内積になり，§3 に加えて次の様な表示も出来る．

4．$k=0$，Γ 任意，$\chi\equiv 1$（本質的でない）で，$mn>0$ のとき，

$$\langle P_m,\ P_n\rangle = \delta_{m,n}\, q\left(4\pi\frac{|m|}{q}\right)^{1-s-w}\Gamma(s+w-1)$$

$$+\,2^{-s-w}\left(\frac{\pi}{q}\right)|m|^{-\frac{s}{2}+\frac{w}{2}}|n|^{\frac{s}{2}-\frac{w}{2}}\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)\,c^{-(s+w)}\,\Gamma(s)$$

$$\times\left\{e^{w\pi i}\int_0^1 u^{-\frac{s}{2}-\frac{w}{2}}(1-u)^{s+w-2}\, H^{(1)}_{w-s}\left(\sqrt{u}\,\frac{4\pi}{qc}|mn|^{\frac{1}{2}}\right)du\right.$$

$$\left.+\,e^{-w\pi i}\int_0^1 u^{-\frac{s}{2}-\frac{w}{2}}(1-u)^{s+w-2}\, H^{(2)}_{w-s}\left(\sqrt{u}\,\frac{4\pi}{qc}|mn|^{\frac{1}{2}}\right)du\right\}$$

$H_\nu^{(i)}$ はハンケル関数．これは §3．2 の $mn>0$ の時の formula によく似ているが，同等性が，筆者には示せない．

(4.1) の計算を続行すると次の様になる．

$$\langle P_m^N(z,s,\Gamma),\ P_n(z,\bar{w},\Gamma)\rangle = \delta_{m,n}\, q\int_0^\infty y^{w-2}e^{-2\pi\frac{|m|}{q}y}\left(\frac{y}{1+Ny}\right)^s dy$$

$$+\,\cos w\pi\ 2^{s-w+2}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{s+1}|m|^{\frac{s+w}{2}}|n|^{\frac{s-w}{2}}\sum_{c>0}S(m,n,c,\Gamma)\,c^{-w-s}\cdot N^{-s}$$

$$\times\int_0^1 u^{\frac{s-w}{2}}(1-u)^{w-2}\int_0^1 e^{-4\pi\frac{|m|}{8}\frac{1}{N}\frac{u}{1-u}(1-v)}\,v^{\frac{w-s}{2}}(1-v)^{s-1}$$

$$\times J_{w-s}\left(\sqrt{uv}\,\frac{4\pi}{8c}|mn|^{1/2}\right)dv\,du$$

$$+\sin w\pi\cdot\frac{2^{2-w}\pi^{-1/2}}{\Gamma(w-\frac{1}{2})}\left(\frac{4\pi}{8}|mn|^{1/2}\right)^{w-1}2^{-w+3}\left(\frac{\pi}{8}\right)^{s+1}|m|^{\frac{w}{2}}|n|^{s-\frac{w}{2}}\sum_{c>0}S(m.n.c.\Gamma)c^{-2(s+w)+1}$$

$$\times\int_1^\infty(t^2-1)^{s-1}\int_0^1 e^{-\pi\frac{|m|}{8}\frac{N}{c^2}(t^2-1)(1-u)}\int_0^1\cos\left(\sqrt{u}\,\frac{|mn|^{1/2}}{8c}tv\right)v(1-v^2)^{w-\frac{3}{2}}u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{s+w-2}dv\,du\,dt$$

$$+\sin w\pi\cdot 2^{-s-\frac{3}{2}}\pi^{-5/2}\left(\frac{4\pi}{8}|mn|^{1/2}\right)^{-w}\left(\frac{\pi}{8}\right)^{s+1}|m|^{\frac{w}{2}}|n|^{s-\frac{w}{2}}\sum_{c>0}S(m.n.c.\Gamma)c^{-2s-2}$$

$$\times\int_0^1 u^{-w}(1-u)^{s+w-2}\int_0^\infty e^{4\eta}\eta^{s-1}\int_0^\infty\frac{\chi^{\frac{1}{2}-w}}{(1+\chi)}\sqrt{4\alpha^2\eta+4\beta^2\chi}^{\,w-\chi}K_{w-s}\left(\sqrt{4\alpha^2\eta+4\beta^2\chi}\right)d\chi\,d\eta\,du$$

ここで，$\alpha=\left(4\pi\frac{|m|}{8}N\right)^{1/2}\frac{1}{c}(1-u)^{1/2}$，$\beta=\sqrt{u}\,\frac{4\pi}{8c}|mn|^{1/2}$．

重要なのは第3項で，これは $Re(w), Re(s)<1$ でしか収束しない．この事は，$S(m.n.c.\Gamma)$ が少なくとも $O(c^{1-\delta})$ $(\exists\delta>0)$ を満たさねばならないことを意味し，フックス群 Γ が制限されることになる．しかも上の式は，N に関係なく，$\langle P_m.P_n\rangle$ のときと同じ量の $Z_{m.n}(s)$ を含み $N\to\infty$ のとき，左辺は 0 になるから，実質的に $Z_{m.n}(s)$ の別表示が得られる事になる．注目すべきは，単なる解析的な計算を行うだけでも，扱う対象によっては，Γ を合同群に近いものに制限してゆく動機がある程度自然に現れてくる事である．

参考文献

[1] J. M. Deshouillers - H. Iwaniec, Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, Invent. Math., 70 (1982), 219-288.

[2] D. Goldfeld - P. Sarnak, Sums of Kloosterman sums, Invent. Math., 71 (1983), 243-250.

[3] D. A. Hejhal, The Selberg Trace Formula for PSL(2, R), vol. 2, SLN, no. 1001, 1983.

[4] M. N. Huxley, Introduction to Kloostermania, Banach Center Publ., 17, PWN-Polish Scientific Publ., 1985, 217-306.

[5] N. V. Kuznetsov, Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture: sums of Kloosterman sums, Math. Sb., 39 (1981), 299-342.

[6] 松本耕二, Kloosterman 和の評価とその応用, 第33回代数学シンポジウム報告集, 1987, 13-45.

[7] P. Sarnak, Additive number theory and Maass forms, SLN, no. 1052 1984, 286-309.

[8] A. Selberg, On the estimation of Fourier coefficients of modular forms, Proc. Symp. Pure Math., 8, AMS 1965, 1-15.

[9] E. Yoshida, On Fourier coefficients of Non-holomorphic Poincaré series, Mem. Fac. Sci, Kyushu Univ., Ser. A, 45 (1991), 1-17.

[10] E. Yoshida, On the order of growth of the Kloosterman zeta function, J. Math. Soc. Japan, Vol. 44, No. 1 (1992), 53-73.

[11] E. Yoshida, Non-holomorphic Poincaré 級数の Fourier 係数の別表示とその応用について, 数理研考究録, 1989.