数理解析研究所講究録
第 797 巻 1992 年 81-87

HASSE NORM PRINCIPLE について

大阪大学理学部　堀江　充子　(MITSUKO HORIE)

K/k を有限次代数体のガロア拡大とし, J_K, J_k でそれぞれ K, k のイデール群, $N_{K/k}$ で J_K から J_k へのノルム写像をあらわすことにする. このとき, K, k の乗法群 $K^\times$, $k^\times$ はそれぞれ, J_K, J_k の中に通常の方法で埋め込まれているが, K からの "global norm" であるような $k^\times$ の元全体 $N_{K/k}K^\times$ は, K/k に関して至るところ "local norm" である $k^\times$ の元全体のなす群 $N_{K/k}J_K\cap k^\times$ の指数有限の部分群となることが知られている.

以下, 記述を簡単にするために

$$\mathcal{A}(K/k) := (N_{K/k}J_K\cap k^\times)/N_{K/k}K^\times, \qquad i(K/k) := \sharp\mathcal{A}(K/k) < \infty$$

とおく.

<u>定義</u>　K/k で Hasse のノルム原理が成り立つとは, $i(K/k)=1$, すなわち

$$N_{K/k}J_K\cap k^\times = N_{K/k}K^\times$$

が成り立つことを言う.

古典的な Hasse のノルム定理 (Normensatz) とは, "K/k が巡回拡大ならば K/k で Hasse のノルム原理が成り立つ" というものである. しかし, 一般には K/k で Hasse のノルム原理は成り立たない. よく知られた反例として, Hasse 自身によって与えられた虚の例

$$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-3},\sqrt{13}), \qquad k=\mathbb{Q},$$

Tate によって与えられた実の例

$$K=\mathbb{Q}(\sqrt{13},\sqrt{17}),\qquad k=\mathbb{Q}$$

がある ([3,12]). ここで $\mathbb{Q}$ は, もちろん, 有理数体を表す. これらの例では $i(K/k)=2$ となっている.

この小論では, ガロア拡大の Hasse のノルム原理とその真の部分拡大のそれぞれに於ける Hasse のノルム原理との関わりを問題にする. 一般に, E を有限群とし, 有理整数環 $\mathbb{Z}$ を自明な E 加群とみなすとき, $\mathbb{Z}$ を係数とする E の 2 次元ホモロジー群を $H_2(E,\mathbb{Z})$ と書く. 以後, 本質的な役割を果たすのが, 次の Tate の定理である.

<u>定理</u> **(Tate** [8]**)**　$G=\mathrm{Gal}(K/k)$ とおき, v に k の素点のすべてを渡らせ, D_v を v の上にある K の 1 つの素点の K/k に関する分解群とする. 更に準同型写像

$$\varphi:\bigoplus_v H_2(D_V,\mathbb{Z})\longrightarrow H_2(G,\mathbb{Z})$$

を

$$\varphi((Z_v)_v)=\sum_v \mathrm{Cor}_v\, z_v$$

によって定める. ここで Cor_v は $H_2(D_v,\mathbb{Z})$ から $H_2(G,\mathbb{Z})$ への corestriction 写像を表す. このとき

$$\mathrm{Coker}\,\varphi\cong\mathcal{A}(K/k).$$

§1. この節では, K/k をアーベル拡大とし, 引き続き $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ とおく. アーベル拡大とその部分拡大の Hasse のノルム原理の関係について次の 2 つの結果が知られている.

<u>命題A</u> **(Razar** [5]**)**　F を K/k の真の中間体とすると

$$i(F/k)\mid i(K/k).$$

したがって, Hasse のノルム原理が K/k で成り立てば F/k でも成り立つ.

<u>命題B</u> **(Gerth [1], Razar [5])** K/k で Hasse のノルム原理 が成り立つためには, 拡大次数 $[K:k]$ を割る各素数 l に対して, $\exp \mathrm{Gal}(F/k)=l$ となる K/k の最大中間体 F をとるとき, 常に F/k で Hasse のノルム原理が成り立つことが必要かつ十分な条件である.

命題Bによって, アーベル拡大での Hasse のノルム原理について考察するには, 基本アーベル拡大の場合が本質的であることがわかる. そこで以下, この節では, l を素数, n を自然数とし, $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ が $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ に同型であると仮定する:

$$G \cong (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n.$$

すると, G がアーベル群なので k の各素点 v に対して, 序文に於ける定理 (Tate [8]) の記号の下で次の図式が可換になる.

$$\begin{array}{ccc} H_2(D_v,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \overset{2}{\wedge} D_v \\ {\scriptstyle \mathrm{Cor}_v}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{natural}} \\ H_2(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \overset{2}{\wedge} G \end{array}$$

ここで $\overset{2}{\wedge} G$, $\overset{2}{\wedge} D_v$ は, G, D_v それぞれの 2 乗外積, 上下の右向き矢印は, よく知られた自然な同型写像, 右の下向き矢印は, D_v の G への埋め込みから導かれる準同型写像である. 更に, G は l 個の元からなる有限体 $\mathbb{F}_l$ 上の線形空間となるので,

$$\overset{2}{\wedge} D_v \subset \overset{2}{\wedge} G$$

とみなせる. そこで v に k の素点全体を走らせて,

$$f : \bigoplus_v \overset{2}{\wedge} D_v \longrightarrow \overset{2}{\wedge} G$$

を上の可換図式中の自然な写像 $\overset{2}{\wedge} D_v \longrightarrow \overset{2}{\wedge} G$ から導かれる $\mathbb{F}_l$-線形写像とすると,

$$f(\bigoplus_v \overset{2}{\wedge} D_v) = < \overset{2}{\wedge} D_v >_{v\in P}$$

となる. ここで P は, K で分岐する k の有限素点全体からなる (有限) 集合である. よって, 今の場合には, Tate の定理は次の様なよく知られた分かりやすい形に書き直すことができる:

$$\mathcal{A}(K/k) \cong (\overset{2}{\wedge} G)/ < \overset{2}{\wedge} D_v >_{v \in P} .$$

ところで, 我々が問題としているのは K/k での Hasse のノルム原理とその部分拡大 $F/k\,(K \supsetneqq F \supset k)$ での Hasse のノルム原理 との関わりを調べることであった. そのために, いくつか記号を導入する. $\mathbb{F}_l$ 上の線形空間 V に対して V^* でその双対空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_l}(V, \mathbb{F}_l)$ を表し, K と k の各中間体 F に対して,

$$X_F := \mathrm{Gal}(F/k)^*$$

とおく. また ι を $\overset{2}{\wedge} X_K = \overset{2}{\wedge} G^*$ から $(\overset{2}{\wedge} G)^*$ への $\mathbb{F}_l$-線形同型写像で

$$(\iota(\chi \wedge \psi))(g \wedge h) = \chi(g)\psi(h) - \chi(h)\psi(g), \qquad \chi, \psi \in X_K, \quad g, h \in G$$

を満たすものとする.

<u>定理 1</u>　K と k の任意の中間体 F に対して

$$\mathcal{A}(F/k) \cong < \overset{2}{\wedge} D_v >^{\perp}_{v \in P} \cap \iota(\overset{2}{\wedge} X_F).$$

但し, $< \overset{2}{\wedge} D_v >^{\perp}_{v \in P}$ は $(\overset{2}{\wedge} G)^*$ の中での $< \overset{2}{\wedge} D_v >_{v \in P}$ の直交空間を表す.

　この定理の応用として, 次の 2 つの命題が得られる.

<u>命題 1</u>　n が奇数のとき, K/k で Hasse のノルム原理が成り立つことと, K と k のすべての真の中間体 F に対して F/k で Hasse のノルム原理が成り立つこととは同値である.

命題2　n が偶数のときには, k を固定するごとに, K/k で Hasse のノルム原理は成り立たず, しかも, K と k のすべての真の中間体 F に対しては F/k で Hasse のノルム原理が成り立つ様な K の例が無数に存在する.

命題1，2は n が奇数の時には命題Aの逆が成り立ち, n が偶数の時にはその反例が無限に存在することを主張している. 証明には, 定理1によって問題を n 次歪対称行列の考察に帰着できることを用いるが, 命題2の証明では Chebotarev の密度定理も本質的な役割を果たす.

なお, この節の詳しい内容は [11] にあります. 定理1と中心拡大との関わりについては, そのほか [9,12] も参照して下さい.

§2. K/k が Galois 拡大である一般の場合に話を戻そう. すると, 前節で述べた命題Aのような事実は, 必ずしも成立しない. 実際, 次の様な例がある.

例　$k = \mathbb{Q}$ とし, d_1, d_2 を互いに素な実2次体の判別式とする. このとき, $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ を含む $\mathbb{Q}$ 上の8次 quaternion 拡大体が存在するき, その体を K とおくと, 常に K/k で Hasse のノルム原理 は成り立つ ([2]). しかし, このときにはまた常に $i(\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})/\mathbb{Q}) = 2$ であることが, [6] と Tate の定理から分かる. そして例えば, $\mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$ に対して,

$$\alpha = (3 + \sqrt{13})(2 + \sqrt{17})\sqrt{13 \cdot 17}$$

とおくと $\mathbb{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{\alpha})$ は $\mathbb{Q}$ 上 8 次の quaternion 拡大体である.

一方, Razar [5] では次の命題D，Eも示されている.

命題D　K/k の中間体 F が k 上のガロア拡大で, $[K : F]$ と $[F : k]$ が互いに素ならば

$$i(F/k) \mid i(K/k).$$

<u>命題E</u>　K' が k 上の有限次ガロア拡大で, $K \cap K' = k$ ならば,

$$i(K/k) \mid i(KK'/k)$$

が成り立つ.

これらは命題Aを含む結果ではないが, 命題Aは次のように一般化することができる. 以下 L を勝手な k 上の有限次アーベル拡大体とする.

<u>命題3</u>　F を KL と K の任意の中間体とすると,

$$i(F/k) \mid i(KL/k).$$

今度は命題Bの一般化を述べるために, 記号を定めておこう.

$$1' = \begin{cases} 1 & (KL/K \text{ が巡回拡大, または} \\ & \ K/k \text{ がアーベル拡大, または} \\ & \ K \cap L = k \text{ のとき}), \\ 2 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

とおく. また, 任意の素数 p と負でない整数 ν に対して $K_\nu^{(p)}$ で

$$\exp \mathrm{Gal}(K_\nu^{(p)}/K) \mid p^\nu$$

を満たす KL/K の最大中間体を表す. 明らかに $p \nmid [KL : K]$ ならば, $K_\nu^{(p)} = K\,(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ である.

<u>命題4</u>　KL/k で Hasse のノルム原理が成り立つためには, すべての奇素数 p に対して, $K_1^{(p)}/k$ で Hasse のノルム原理が成り立ち, かつ, $K_{1'}^{(2)}$ で Hasse のノルム原理が成り立つことが必要十分な条件である.

なお, 命題3, 4の証明には Hopf の公式 [7, p. 334] が有効である. 更に, これらの応用として次が分かる.

系　p を任意に固定した素数, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環 (の加法群), k_∞ を k の $\mathbb{Z}_p$-拡大の 1 つとし, $K_\infty = k_\infty K$ とおく. このとき, K_∞/K の一意的な中間体列

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_\infty \qquad ([K_\nu : K] = p^\nu, \quad \forall \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

に対し, ある $\nu \geqq 1$ について K_ν/k で Hasse のノルム原理が成り立つことと, すべての $\nu \geqq 0$ について K_ν/k で Hasse のノルム原理が成り立つこととは同値である.

K/k がアーベル拡大の場合には, 更に強い事実も示される. 即ち,

定理 2　K/k がアーベル拡大のとき, 負でない整数 m を　$p^m \parallel \exp \mathrm{Gal}(K/k)$ で定めると, $\nu \geqq m$ なるすべての整数 ν に対して,

$$\mathcal{A}(K_\nu/k) \cong \mathcal{A}(K_m/k).$$

注意　Hasse のノルム原理 に関する上記以外の話題については森下氏の論文 [4], 及び [10] などもあります.

文　献

1. F. Gerth, *The Hasse norm principle for abelian extensions of number fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 264–266.
2. ———, *The Hasse norm principle in metacyclic extensions of number fields*, J. London Math. Soc. (2) **16** (1977), 203-208.
3. H. Hasse, *Beweis eines Satzes und Wiederlung einer Vermutung über das allgemeine Normenrest-symbol*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1931), 64–69.
4. M. Morishita, *On the Hasse norm principle for certain generalized dihedral extension over* **Q**., Proc. Japan Acad. **66** (1990), 321–324.
5. M. J. Razar, *Central and genus fields and the Hasse norm theorem*, Compositio Math. **35** (1977), 281–298.
6. H. Reichardt, *Über Normalkörper mit Quaterniongruppe*, Math. Z. **41** (1936), 218–221.
7. D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-verlag, New York/Heidelgerg/Berlin, 1982.
8. J. Tate, *Global class field theory*; in "Algebraic number theory" (J. W. Cassels and Fröhlich, eds.), Academic Press, London/New York, 1967.
9. M. Horie, *On central extensions of elementary abelian fields*, J. Number Theory **36** (1990), 95–107.
10. ———, *The Hasse principle for elementary abelian fields*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **45** (1991), 41–54.
11. ———, *The Hasse norm principle for elementary abelian extensions*, Proc. Amer. Math. Soc., (to appear).
12. ———, 基本アーベル体の狭義不分岐中心拡大について, 数理解析研究所講究録 **721** (1990), 63–72.