数理解析研究所講究録
第797巻 1992年 88-101

Hasse-Weil L関数の岩澤理論の構想

東京工業大学　加藤和也 (Kazuya Kato)

様々の種類の zeta 関数の，整数点での値の，数論的な意味を知ることは，数論の重要な主題である。岩澤理論は，「部分Riemann zeta 関数」の整数点での値を，円分体の ideal 類群と結びつけるもので，部分Riemann zeta 関数の値の数論的意味についての，現在考えられる最高の理論である．任意の Hasse-Weil L関数についてもこのような岩澤理論を展開することは，数論における最も大きな夢の1つであると言えるであろう。

志村五郎氏の言葉（「数学」13号，「保型形式と整数論 II」）

「整数論いたる所　zeta関数あり」

に今，

「zeta関数ある所　岩澤理論あり」

と続けたい。

本稿では，Fontaine, Faltings 他の人々によって近年発展させられた　p進Hodge理論（p進periodの理論）を局所理論として，「任意の Hasse-Weil L関数の岩澤 main conjecture」を定式化す

る。ここに述べる一般化された岩澤 main conjecture は，Bloch との共同研究（Grothendieck 記念号）にもとづき，Fontaine と Perrin-Riou の idea もとりいれたもので，Deligne 予想，Beilinson 予想，古典的岩澤 main conjecture 等，zeta 関数 L 関数の値についての，知られている大多数の予想を含む。

§1. 円単数は zeta の化身

$$1-\alpha \qquad (\alpha \text{ は } 1 \text{ の巾根}, \ \alpha \neq 1)$$

を円単数と呼ぶ．（実際は $1-\alpha$ は α の位数が素数巾でない時に限り「単数」であり，位数が素数 p の巾なら $\mathbb{Z}[\alpha, \frac{1}{p}]$ の可逆元でしかないのだが，簡単のため円「単数」と呼んだ．）

円単数の絶対値の $\log$ をとると，zeta の値が次のようにあらわれる：$\alpha = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right)$，$(a, N) = 1$ とおくと，

$$\log|1-\alpha| = -\lim_{s\to 0} s^{-1}\left(\zeta_{\equiv a(N)}(s) + \zeta_{\equiv -a(N)}(s)\right).$$

ここに

$$\zeta_{\equiv a(N)}(s) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n\equiv a \bmod N}} \frac{1}{n^s}$$

は部分 Riemann zeta 関数と呼ばれ，$\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し，$\mathbb{C}$ 全体へ解析接続されて $s=1$ 以外で正則である。

円単数はこれ以外にもさまざまの仕方で zeta の値と関係す

る。α の位数を N とし $p^n|N$ とし $m=p^{-n}N$ とおくとき，$u\in\mathbb{Z}_p[\alpha]^\times$ に対し，1 の原始 p^n 乗根 α^m を用いた Hilbert symbol $(1-\alpha,\ u)\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の値は，

$$\mathrm{Trace}_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p}\left(\left(\frac{1}{2\pi i}\left(\zeta_{\equiv a(N)}(0)-\zeta_{\equiv -a(N)}(0)\right)\right)\log(u)\right) \qquad \left(\begin{matrix}\log \text{は}\\ p\text{進}\log\end{matrix}\right)$$

の $\bmod p^n$ に等しい。また円単数の p 進 $\log$ をとると，部分 p 進 Riemann zeta 関数の $s=1$ での値があらわれる。

このようなことから，円単数は zeta の化身であると言える。少なくとも，zeta の精がこりかたまってできたものであることは疑えない。（$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ でも，$\mathbb{Q}_p$ 上でも，ゼータに関係する，という離れわざは，ゼータの化身なればこそなしうることである。）

円単数は岩澤理論において次のように重要な役割を演ずる。p を素数とし，簡単のため $p\neq 2$ とする。$n\geq 1$ に対し 1 の原始 p^n 乗根 β_n を，$\beta_{n+1}^p=\beta_n$ がみたされるようにとる。

$$C_n = \mathbb{Q}(\beta_n) \text{ の ideal 類群の } p \text{ 巾部分}$$

$$C = \varprojlim_n C_n \qquad (\text{逆系はノルム写像 } C_{n+1}\to C_n \text{ について})$$

$$\Lambda = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\beta_n)/\mathbb{Q})]$$

とおく。C は Λ 加群とみなせる。$\mathbb{Z}[\beta_n,\frac{1}{p}]^\times$ を $\mathbb{Z}[\beta_n,\frac{1}{p}]$ の可逆元全体の乗法群とし，

$$E = \varprojlim_n \left(\mathbb{Z}_p[\beta_n,\tfrac{1}{p}]^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p\right) \qquad (\text{逆系はノルムについて})$$

とおく．E も Λ 加群である　最後に

$$z = (1-\beta_n)_n \in E$$

とおく．（$1-\beta_{n+1}\in\mathbb{Z}_p[\beta_{n+1},\frac{1}{p}]^\times$ の $\mathbb{Z}_p[\beta_n,\frac{1}{p}]^\times$ へのノルムは $1-\beta_n$ である。）

さてΛは2次元の正則半局所環であり，C及び$E/\Lambda z$は，ともに有限生成ねじれΛ加群であり（「ねじれ」とはΛのある非零因子によって零化されることを意味する），Mazur-Wiles によって証明された岩澤 main conjecture は

$$\mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{length}_{\Lambda_{\mathfrak{p}}}(E/\Lambda z)_{\mathfrak{p}}$$

がΛのすべての高さ1の素 ideal $\mathfrak{p}$ について成立することである。

以上まとめると，円単数は部分 Riemann zeta の化身であって，しかも classical な岩澤 main conjecture は円単数にもとづいて述べられる。

本稿に述べる「Hasse-Weil L関数の岩澤 main conjecture」の主張する所は，すべての Hasse Weil L関数が，「円単数」のごとき「zetaの化身」を有するということである．さらには，これらの「化身」は，大域体のすべてのp進 Galois 表現（モチーフから来るとは限らない）に対しても定義されるということである．「化身」はどこに定義されるのかというと，それは，「そのp進 Galois 表現に対応するp進層の cohomology の，determinant 加群」の生成元として存在しているはずなのである。

以下では素数pを固定し，簡単のため$p \neq 2$とする。

§2. 準備

一般化された岩澤 main conjecture を述べるための準備をおこなう。

(2.1) perfect complex. Λ を可換環とする。$D(\Lambda)$ で、Λ 加群の圏の導来圏をあらわす。Λ 上の perfect complex とは、$D(\Lambda)$ の対象であって、有限生成射影 Λ 加群の有限複体で代表されるもののことである。

(2.2) determinant 加群. Λ を可換環とし、P を Λ 上の perfect complex とするとき、P の determinant 加群と呼ばれる可逆 Λ 加群 $\det_\Lambda P$ が定義される。

例えば、もし P が rank r の有限生成自由 Λ 加群を、degree m の所においたものとすると、$\det_\Lambda P$ は、m が偶数の時は P の Λ 上の r 次外巾加群であり、m が奇数の時はその逆加群である。

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

が Λ 加群の複体の exact sequence で、C, C', C'' がどれも $D(\Lambda)$ の中でみて perfect complex である時、標準同型

(2.2.1) $$\det_\Lambda(C) \cong \det_\Lambda(C') \otimes_\Lambda \det_\Lambda(C'')$$

が与えられる。

(2.3) 以下では次の (a) (b) のいずれかをみたす可換環Λを考える。

(a) Λは完備ネーター半局所環で、Λの任意の極大idealの剰余体は標数pの有限体である。

(b) Λは$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大体の有限個の直積に同型。

(2.4) Λを (2.3) のような環とし、Xを$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$上の有限型のschemeとする時、圏$D_{ctf}(X,\Lambda)$を次のように定義する。

(1) Λが有限環の時、$D(X,\Lambda)$をetale site X_{et}上のΛ加群の層の圏の導来圏とし、$D_{ctf}(X,\Lambda)$を、次の条件 (i) (ii) をみたす$D(X,\Lambda)$の対象F全体からなる、$D(X,\Lambda)$のfull subcategoryと定義する。

(i) cohomology層$\mathcal{H}^q(F)$は、ほとんどすべてのqについて零であり、すべてのqについてconstructibleである。

(ii) すべての$x\in X$に対しstalk $F_{\bar{x}}$は、Λ上のperfect complexである。

(2) Λが (2.3) (a) をみたす環の時、$D_{ctf}(X,\Lambda)$を次のように定義する。Σを、Λ/Iが有限環となるΛのideal I全体の集合とする。$D_{ctf}(X,\Lambda)$の対象とは、各$I\in\Sigma$に対して$D_{ctf}(X,\Lambda/I)$（すでに(1)で定義したもの）の対象F_Iを与え、$I,J\in\Sigma$で$J\subset I$の時、同型$\rho_{I,J}: F_J\overset{L}{\otimes}_{\Lambda/J}\Lambda/I \xrightarrow{\simeq} F_I$（$\otimes^L$は導来圏におけるテンソル積）を与えるsystemであり、

$$\begin{cases} \rho_{I,I} \text{ は恒等射,} \\ I, I', I'' \in \Sigma \text{ で } I \subset I' \subset I'' \text{ なら } \rho_{I,I''} = \rho_{I,I'} \circ \rho_{I',I''} \end{cases}$$

をみたすもののことである。

(3) Λ が (2.3)(b) をみたす環の時, $D_{ctf}(X, \Lambda) = D_{ctf}(X, O_\Lambda) \otimes \mathbb{Q}$ と定義する。ここに O_Λ は, $\Lambda = \prod_{i=1}^{r} F_i$, F_i は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, O_i を F_i の整数環とした時, $O_\Lambda = \prod_{i=1}^{r} O_i$ と定義する。つまり, $D_{ctf}(X, \Lambda)$ は, 対象が $D_{ctf}(X, O_\Lambda)$ と同じ, Hom が, ($D_{ctf}(X, O_\Lambda)$ における Hom) $\otimes \mathbb{Q}$ と定義したものである。

(2.5) 以下では, 次のような三つ組 $(X, \Lambda, \mathcal{F})$ を考える。

$$\begin{cases} X \text{ は } \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \text{ 上の有限型 scheme,} \\ \Lambda \text{ は (2.3) の条件をみたす環,} \\ \mathcal{F} \text{ は } D_{ctf}(X, \Lambda) \text{ の対象.} \end{cases}$$

この時, $R\Gamma(X, \mathcal{F})$, $R\Gamma(X \otimes \mathbb{R}, \mathcal{F})$ は, ともに Λ 上の perfect complex であることが証明できる。

$$\Delta_\Lambda(X, \mathcal{F}) = (\det_\Lambda R\Gamma(X, \mathcal{F}))^{-1} \otimes_\Lambda (\det_\Lambda R\Gamma(X \otimes \mathbb{R}, \mathcal{F}(-1)))^{-1}$$

と定義する。

§3. 一般化された岩澤 main conjecture.

次の予想 (3.1) が一般化された岩澤 main conjecture である。その中の条件 (v) は, 正確に述べきれなかった。

予想(3.1)。 (2.5) に述べたようなすべての三つ組 (X, Λ, F) に対し，可逆 Λ 加群 $\Delta_\Lambda(X, F)$ の生成元 $z_\Lambda(X, F)$ を与えて，次の (i)−(v) が成立するようにすることが可能である。

(i) (X, Λ, F)，(X, Λ', F') がともに (2.5) に述べたような三つ組（X は共通）で，環準同型 $\Lambda' \to \Lambda$ と，$D_{ctf}(X, \Lambda)$ における同型 $h: F \otimes^L_{\Lambda'} \Lambda \xrightarrow{\cong} F$ がある時，h によって導かれる同型 $\Delta_{\Lambda'}(X, F') \otimes^L_{\Lambda'} \Lambda \xrightarrow{\cong} \Delta_\Lambda(X, F)$ は $z_{\Lambda'}(X, F') \otimes 1$ を $z_\Lambda(X, F)$ にうつす。

（ここで Λ' が (2.3)(a) をみたし，Λ が (2.3)(b) をみたすという事態も許す。）

(ii) X, Λ は (2.5) にあるとおりとし，

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

は，X_{et} 上の Λ 加群の層の複体の完全列で，F，F'，F'' は導来圏の中でみて，$D_{ctf}(X, \Lambda)$ に属するとする。この時，この完全列から導かれる同型

$$\Delta_\Lambda(X, F) \cong \Delta_\Lambda(X, F') \otimes_\Lambda \Delta_\Lambda(X, F'') \qquad ((2.2.1) による)$$

は，$z_\Lambda(X, F)$ を $z_\Lambda(X, F') \otimes z_\Lambda(X, F'')$ にうつす。

(iii) (X, Λ, F) は (2.5) にあるとおり，Y は $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上の scheme で，$f: X \to Y$ を morphism とする。この時，同型

$$\Delta_\Lambda(X, F) \cong \Delta_\Lambda(Y, Rf_*F)$$

は $z_\Lambda(X, F)$ を $z_\Lambda(Y, Rf_*F)$ に移す。

(iv) (X, Λ, F) を(2.5)のとおりとし，X は素数 $\ell \neq p$ について $\mathbb{F}_\ell$ 上の scheme であるとする。この時，$z_\Lambda(X, F)$ は次のように定義される。$F \to I$ を F の移入分解とすると完全系列

$$0 \to \Gamma(X, I) \to \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, I) \xrightarrow{1-\varphi} \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, I) \to 0$$

($\varphi \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_\ell/\mathbb{F}_\ell)$ は Frobenius 置換）から，同型

$$\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, I) \cong (\det_\Lambda \Gamma(X, I)) \otimes_\Lambda (\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, I))$$

を得るが，ここから $\det_\Lambda \Gamma(X \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell, I)$ を cancell して，

$$\Lambda \cong \det_\Lambda \Gamma(X, I) = \det_\Lambda R\Gamma(X, F)$$

が得られる。(この最後の同型は移入分解のとり方によらない!)
$z_\Lambda(X, F) \in \Delta_\Lambda(X, F)$ は，この同型による $1 \in \Lambda$ の $\det_\Lambda R\Gamma(X, F)$ への像の逆元 $\in (\det_\Lambda R\Gamma(X, F))^{-1} = \Delta_\Lambda(X, F)$ である。

(v) (zeta の値との関係。もっと詳しいことを(3.3)に述べる。) A を可換環で，$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体の有限個の直積になっているものとし，M を $\mathbb{Q}$ 上の A 係数モチーフとする。(A 係数モチーフとは，A が作用しているモチーフのこと。) M_p を M の p 進 etale realization，X を $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ の空でない開集合で M_p が X 上で不分岐なるものとし，$\Lambda = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ とおく。すると (X, Λ, M_p) は(2.5)をみたすが，$z_\Lambda(X, M_p)$ は $M^*(1)$ の A 係数 zeta 関数((3.2)参照)の値と関係し，その関係によって特徴づけられる((3.3)参照)。

ここに $M^*(1)$ は，M の双対モチーフ $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, A) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(M, \mathbb{Q})$

を1回 Tate twist したもの。

(3.2) (3.1)の条件(v)の補足説明として，まずA係数 zeta 関数を論ずる。Aを可換環で，$\mathbb{Q}$の有限次拡大体の有限個の直積であるとし，$\Lambda = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$とし，この$\Lambda$について$(X, \Lambda, F)$を(2.5)のとおりとし，更にFはX上のA係数モチーフMのp進 etale realizationであるとする。この時，MのX上のA係数 zeta関数 $\zeta_A(X, M, s)$ は次のものである。

Xの各閉点xに対し多項式$P_x(t)$を

$$P_x(t) = \det{}_\Lambda (1 - \varphi_x^{-1} t \; ; \; F_{\bar{x}}) \in \Lambda[t]$$

(φ_xはxのFrobenius置換)と定義する。$P_x(t) \in A[t]$と予想される。

$$\zeta_A(X; M, s) = \prod_x P_x(N(x)^{-s})^{-1}$$

(xはXの閉点を走り，$N(x)$はxの剰余体の元の個数)と定義される。これは$\mathbb{C}$全体に有理型に解析接続されると考えられる。

(3.3) (3.1)の条件(v)における $z_\Lambda(X, M_p)$ と $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ との関係を，もう少し詳しく説明する。

Mを$\mathbb{Q}$上のモチーフとすると，MのBetti realization M_B，Mのde Rham realization M_{dR}という有限次元$\mathbb{Q}$-vector spaceが定まり，M_Bには$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$が作用し(その$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-fixed partを$M_B^+$と書く)，$M_{dR}$は降filtration $(M_{dR}^i)_{i\in\mathbb{Z}}$をもつ。

X, A, M を (3.1)(v) のとおりとする。説明を略するが，K理論から定まる可逆A加群 $\Delta'_A(X, M)$ が定まり，

$$\Delta_A(X, M) = \det_A(M^0_{dR}) \otimes_A \det_A(M(-1)^+_B)^{-1} \otimes_A \Delta'_A(X, M)$$

とおくと，

(3.3.1) $\quad \Delta_A(X, M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

(3.3.2) $\quad \Delta_A(X, M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\cong} \Delta_\Lambda(X, M_p)$

が，(3.3.1) は，Hodge理論，K群の regulator map，height pairing を用いて与えられ，(3.3.2) は，p進 Hodge 理論，K群のp進 etale chern class map，$M(-1)^+_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong R\Gamma(\mathbb{R}, M(-1)_p)$ を用いて与えられる。そして (3.1)(v) にいう $z_\Lambda(X, M_p)$ と $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ の関係は，

「$z_\Lambda(X, M_p)$ は $\Delta_A(X, M)$ の或る元 $z_A(X, M)$ の (3.3.2) による像であり，しかも $z_A(X, M)$ の (3.3.1) による $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ における像は，

$$\lim_{s \to 0} s^{-r} \zeta_A(X, M^*(1), s)$$

(ここに $r : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{Z}$ は $\zeta_A(X, M^*(1), s)$ の $s=0$ における位数）に等しいというものである。

§4. 例

例を述べる前にひとこと，「部分 zeta 関数」が，abelian

Galois 群についての「$\mathbb{Q}[G]$-係数 zeta 関数」でとらえられることを説明する。

X, A, M を (3.2) のとおりとし，$f: Y \to X$ を finite etale abelian covering とし，G をその Galois 群とする。この時，$A[G]\otimes\mathbb{C}$-値関数として，

$$\zeta_{A[G]}(X, f_*f^*M, s) = \sum_{\sigma\in G} \zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s)\,\sigma$$

となる。ここに $\zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s)$ は $\zeta_A(X, M, s)$ の部分 zeta 関数であり，次のように定義される。

$$\zeta_A(X, M, s) = \sum_{\mathfrak{a}} c(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{-s} \qquad c(\mathfrak{a})\in A$$

を，$\zeta_A(X, M, s)$ の Dirichlet 級数としての表示とする。但しここに $\mathfrak{a}$ は形式的有限積

$$\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i} \qquad (r \geqq 0,\ x_i \text{ は } X \text{ の閉点},\ n_i \geqq 0)$$

を走り，$N(\mathfrak{a}) = \prod_{i=1}^{r} N(x_i)^{n_i}$。この時

$$\zeta_A(X, M, \sigma\text{-part}, s) = \sum_{(\mathfrak{a}, Y/X) = \sigma} c(\mathfrak{a})N(\mathfrak{a})^{-s}$$

ここに $(\mathfrak{a}, Y/X)$ は Artin symbol $\prod_{i=1}^{r}\varphi_{x_i}^{n_i}$ (φ_{x_i} は x_i の Frobenius 置換) $\in G$ を意味する。

(4.1) $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$, $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\beta_n, \frac{1}{p}]^+)$ (β_n は §1 のとおり ($)^+$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-fixed part)，$f: Y \to X$ を標準写像とする。$G = \mathrm{Gal}(Y/X)$, $\Lambda = \mathbb{Q}_p[G]$, $\Lambda' = \mathbb{Z}_p[G]$, $A = \mathbb{Q}[G]$ とし，r を正の偶数として，$F = f_*f^*\mathbb{Q}_p(r)$, $F' = f_*f^*\mathbb{Z}_p(r)$, $M = f_*f^*\mathbb{Q}(r)$ とおく。

すると

$$H^m(X,F)=0\ ,\quad H^m(X\otimes\mathbb{R},\ F(-1))=0\qquad \forall m\in\mathbb{Z}$$

であり，よって $\Delta_\Lambda(X,F)=\Lambda$ である。また $\Delta_A(X,M)=A$ であり，同型 (3.3.1) (3.3.2) はそれぞれ恒等写像に他ならない。

$$\zeta_A(X,\ M^*(1),\ s)=\sum_{a\in(\mathbb{Z}/p^n)^\times}\zeta_{\equiv a(p^n)}(s+1-r)\ \sigma_a$$

（σ_a は，β_n を β_n^a にうつす $Gal(\mathbb{Q}(\beta_n)/\mathbb{Q})$ の元を $\mathbb{Q}(\beta_n)^+$ に制限して得られる G の元）であり，

$$z_A(X,\ M)=\sum_{a\in(\mathbb{Z}/p^n)^\times}\zeta_{\equiv a(p^n)}(1-r)\ \sigma_a\ \in A\ ,$$

$z_\Lambda(X,F)$ はこの元の Λ での像である。

$$\Delta_{\Lambda'}(X,\ F')\subset\Delta_{\Lambda'}(X,\ F')\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p=\Lambda$$

と見る時，(3.1)(i) は $z_\Lambda(X,F)$ が $\Delta_{\Lambda'}(X,F')$ の Λ'-基底である（$z_{\Lambda'}(X,F')$ に等しい）ことを言っているが，このことは実は classical な岩澤主予想の言いかえになっていることが確められる。

(4.2)　X，f，Λ，Λ'，A を (4.1) のとおりとし，$F=f_*f^*\mathbb{Q}_p(1)$，$F'=f_*f^*\mathbb{Z}_p(1)$，$M=f_*f^*\mathbb{Q}(1)$ とおく。この時 $z_A(X,M)$ は本質的に円単数である。S を $\mathbb{Q}(\beta_n)^+$ の実素点全体の集合，$Map(S,\mathbb{Q})$ を S から $\mathbb{Q}$ への写像全体の集合とする。$Map(S,\mathbb{Q})$ は rank 1 の自由 A 加群であり，$M(-1)^+_B$ は $Map(S,\mathbb{Q})$ と同一視される。

$\mathrm{Spec}(A) \setminus \{$原点$\}$ 上において

$$\Delta_A(X, M) = \mathbb{Z}[\beta_n, \tfrac{1}{p}]^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Map}(S, \mathbb{Q})^{-1}$$

$$\Delta_\Lambda(X, F) = H^1(\mathbb{Z}[\beta_n, \tfrac{1}{p}], \mathbb{Q}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Map}(S, \mathbb{Q})^{-1}$$

$$z_A(X, M) := (1-\beta_n)(1-\beta_n^{-1}) \otimes e^{-1}$$

但し $e \in \mathrm{Map}(S, \mathbb{Q})$ は、$\beta_n + \beta_n^{-1}$ を $\cos(\frac{2\pi}{p^n})$ にうつす S の元に 1 を、S の他の元に 0 を対応させるもの。(3.1)(i) に言う所の、$z_\Lambda(X, F)$ が $\Delta_{\Lambda'}(X, F')$ の基底の像であるということが、§1 に紹介した classical な岩澤主予想の言いかえであることが確められる。

［補足］ 本稿に述べたことの詳細は、筆者の次の論文にあります。

Iwasawa theory and p-adic Hodge theory (preprint),

Approach to Iwasawa theory of Hasse-Weil L-functions via BdR (準備中),

p-adic Hodge theory and values of zeta functions of elliptic cusp forms (準備中)

なお本稿において、p 進 Hodge 理論の役割がどこにあるかを十分述べなかったが、同型 (3.3.2) の定義に、p 進 Hodge 理論が不可欠なのである。((3.3.1) の方は、period integral や K-群の regulator の話として、すでに多くの人々が論じてきたものである。)