数理解析研究所講究録
第 797 巻 1992 年 162-173

p-進多様体上の Riemann-Hilbert-de Rham 対応

東大理　　都築　暢夫 (Nobuo Tsuzuki)

§1. はじめに

p-進局所体上の代数多様体（以下、p-進多様体）の上の幾何的な起源をもつ p-進連続層はある種のよい構造をもっていると考えられている。ここでは、p-進多様体上の p-進連続層に対して de Rham 層の概念を定義して、それに微分加群を対応させる。さらに、de Rham 層の概念が各種の演算について安定であり、de Rham 層から微分加群への対応は演算と可換になることをしめす。これは、複素多様体上の局所系と微分加群の対応に類似している。しかし、この de Rham 層と微分加群の対応は 1 : 1 ではなく、"stable 層" と呼ばれるべきものに制限しないと 1 : 1 のよい対応はないと思われる。

最初に p-進局所体の絶対 Galois 群の de Rham 表現について説明する。([I] に詳しくかかれている。)

[Ta] において J.Tate は p-divisible group の Tate-加群の Hodge-Tate 分解を発見した。その後、J.-M. Fontaine は Hodge-Tate 表現、de Rham 表現、crystalline 表現等を定式化して、p-進多様体の p-進 etale cohomology に対するいくつかの予想をたてた[Fo1][Fo2]。Fontaine の予想は、彼自身、W.Messing、S.Bloch、加藤 和也、兵頭 治、G.Faltings ら各氏によりそのかなりの部分が既に解決されている。

Faltings は、[Fa2] の中でいわゆる Fontaine の de Rham 予想を示した。(多様体が、good reduction の場合に、de Rham 予想より精密な crystalline 予想が成りたつことと、および、その層化と相対化が [Fa2] の主な内容である。) 正確に述べるために記号を定める。K を混標数 $(0,p)$ 完備離散付値体で剰余体 k は完全体とする。$\overline{K}$ を K の代数閉包とする。B_{dR} を Fontaine の定義した Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用と減少 filtration をもつ巨大な K-algebra (実は剰余体が $\mathbb{C}_p=\widehat{\overline{K}}$ なる完備離散付値体) とする。このとき、p-進 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ 表現 V が de Rham 表現とは、自然な写像

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\bigotimes_{K}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}\longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}V$$

が同型になることをいう。ただし、$(\cdot)^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)}$ は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-不変部分をあらわす。$X$ を K 上の完備非特異多様体として、$X_{\overline{K}}=X\bigotimes_{K}\overline{K}$ とする。また、$\mathbb{H}^*_{dR}(X/K)$ を X の K 上の de Rham cohomology とする。

定理. (Faltings) 上の状況のもとで、p-進 etale cohomology 群

$$\mathrm{H}^* = \mathrm{H}^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) = \varprojlim \mathrm{H}^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_p$$

は de Rham 表現である。さらに、$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-作用、filtration および chern class map を保つ標準的なな同型

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^* \cong \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{K} \mathbb{H}^*_{\mathrm{dR}}(X/K)$$

が存在する。ただし、$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は左辺には対角的 ($\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \mapsto \sigma \otimes \sigma$) に作用して、右辺の filtration は B_{dR} のそれと $\mathbb{H}^*_{\mathrm{dR}}(X/K)$ の Hodge filtration との積 filtration とする。

注意. de Rham 予想は 多様体の reduction の様子によらずに成りたつ。

以下では、de Rham 予想の層化と相対化の方針を述べる。

Fontaine の理論の層化および相対化は、兵頭がその緒をひらいた。彼は、[H]で Hodge-Tate 分解のそれをおこなった。Hodge-Tate 構造は、de Rham 構造の gr^0-部分商であるから、兵頭の理論の一般化として de Rham 予想の層化と相対化とを考える。

Faltings の bounded etale 拡大の理論を用いて局所理論·Fontaine の環 B_{dR} の高次元化にあたる環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ を構成する。$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ は Galois 群の作用、減少 filtration 、および connection をもつ位相環である。もちろん、兵頭の理論の環 S_∞ は $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の gr^0-部分商になる。$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の構成および性質は §2 で示す。$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ を用いて局所的に de Rham 表現を定義する。これは rigid etale local な概念である。また、$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の connection を利用して de Rham 表現に微分加群を対応させる。

$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ を用いた de Rham 表現の定義は model 上 rigid etale local であることから層化される。また、de Rham 予想の層化および相対化についての主結果とその証明の概略は §4 で述べる。

§2. 環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$

Fontaine の環 B_{dR} の高次元化である環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ を局所的に構成し、その性質を示す。

記号は §1 のままとする。

R を O_K(K の整数環) 上有限生成平坦な整閉整域で、$R[1/p]$ が K 上非特異かつ幾何的既約とする。さらに、R の d 個 ($d = \mathrm{rel.dim}_{O_K} R$) の単元 u_i の対数微分 $dlog(u_i)$ により微分加群 $\Omega^1_{R[1/p]/K}$ が生成されると仮定する。以後、簡単のために Ω^* で $\Omega^*_{R[1/p]/K}$ をあらわす。

$\overline{R}$ を $R[1/p]$ の最大 etale 拡大の中での R の整閉包として、

$$R_\infty = (R \bigotimes_{O_K} O_{\overline{K}})[u_i^{p^{-\infty}}] \text{ の} \overline{R} \text{における整閉包}$$

と定める。ただし、$u_i^{p^{-\infty}}$ は u_i の p べき根とする。

R は O_K 上 smooth とは限らないので、$\overline{R}$ は $R\infty$ 上 almost etale 拡大とはならない[Fa1]。このため $\overline{R}$ に含まれる R_∞ の拡大 C でよい条件を満たすものをとってくる必要がある。C は整閉整域で R 上 Galois 拡大であり、u_i が C のよい単元の系とする。すなわち、ある p べき p^e が存在して、C に含まれる R_∞ の正規拡大 A で $\frac{1}{p}$ を添加すると R_∞ 上 finite etale になるものに対して、

(ア) $tr_{A[1/p]/R_\infty[1/p]}(A) \subset p^e R_\infty$

(イ) $(A \bigotimes_{R_\infty} A)[1/p] \to A[1/p] \qquad (x \otimes y \mapsto xy)$

に対するべき等元 e_{A/R_∞} は p^e 倍すると整元になる。

をみたすものとする。もちろん、R が O_K 上 smooth (good reduction の場合) のときには $C = \overline{R}$ とできる。

さらに、$\Gamma = \mathrm{Gal}(C/R)$ 、$\Delta = \mathrm{Gal}(C/R \bigotimes_{O_K} O_{\overline{K}})$ とおく。

この状況のもとで、R と C とに関手的な以下の性質がなりたつ環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} = \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R,C)$ を構成する。ただし、$S_\infty = S_\infty(R,C)$ を兵頭氏の定義した環として[H]、$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(R,C)$ を Faltings の定義した環とする[Fa2]。

(ア) $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ は B_{dR}-algebra で、減少 filtration$\{\mathfrak{B}^r_{\mathrm{dR}}\}$ 、Γ-作用、Griffith transversarity を満たす integrable な B_{dR}-connection をもつ。また、$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ には、B_{dR} の integral 構造と可換なそれがはいり、$(\mathfrak{B}^r_{\mathrm{dR}}, p)$-進位相に関して完備である。

(イ) 次数付き Γ-algebra の標準的な同型

$$gr^{\cdot}\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \cong \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} S_\infty(r)$$

がある。ただし、(r) は Tate-twist とする。

(ウ) 連続 cohomology 群は次のようになる。

$$\mathrm{H}^i(\Delta, \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}) = \begin{cases} (\widehat{R}[1/p] \bigotimes_K \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(O_K))^{\Gamma} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}) \cong \begin{cases} \widehat{R}[1/p] & (i = 0 \text{ または } 1) \\ 0 & (i \neq 0, 1) \end{cases}$$

ここで、$\mathrm{B_{dR}}(O_K)$ は Fontaine の定義した環で^は p-進完備化をあらわす。

(エ) $\mathrm{B_{dR}}$-connection $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \to \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ から決まる Γ-加群の複体

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} & \to & \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} & \to & \Omega^2 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} & \to \cdots \\ \text{degree} & & (0) & & (1) & & (2) & \end{array}$$

を DR とおき、その第 r-firtration DR^r を

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{B}^r_{\mathrm{dR}} & \to & \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}^{r-1}_{\mathrm{dR}} & \to & \Omega^2 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}^{r-2}_{\mathrm{dR}} & \to \cdots \\ & & (0) & & (1) & & (2) & \end{array}$$

で定めると、自然な複体射 $\mathrm{B_{dR}} \to \mathrm{DR}$ は filtered quasi-isomorphism となる。

(オ) 非退化な pairing

$$\mathrm{DR} \times \mathrm{DR} \longrightarrow \mathrm{DR}$$

が存在する。(cup 積)

(カ) $(R_1, C_1), (R_2, C_2)$ を先の条件を満たす対とするとき

$$\mathrm{DR}(R_1) \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathrm{DR}(R_2) \longrightarrow \mathrm{DR}(R_1 \bigotimes_{O_K} R_2)$$

は、filtered quasi-isomorpism である。(Künneth formula)

注 意. R が $W(k)$ 上 bad reduction の場合いを扱うためには、$\overline{R}$ は R_∞ 上必ずしも almost etale 拡大でないので対 (R, C) を考える必要がでてくる。

Hodge-Tate 理論の高次元化において古典理論の $\mathbb{C}_p$ に対応するのは $\widehat{\overline{R}}[1/p]$ ではなく S_∞ である。その理由は、標数 p に reduction したときに環 R は完全（p-乗写像が全射）でないから、p-基底に対応して連続 cohomology 群

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, \widehat{C}[1/p](r))$$

は古典的な場合のようには消えない。(S_∞ ならば $((i,r) \neq (0,0),(1,0))$ をのぞいて消える。) de Rham 構造の gr^0-部分商が Hodge-Tate 構造であることを考えると、$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ は上の性質 (ア)-(カ) を満たす必要がある。さらに、$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の $\mathrm{B_{dR}}$-connection は de Rham 表現に対して $\widehat{R}$ 上の locally free 層の複体が対応するので自然に定まる。

以下、$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ を構成する。

$R_0 = O_K[T_i^{\pm 1}\ ;\ i = 1, \cdots, d]$、$C_0 = O_K[T_i^{\pm p^{-\infty}}]$ とおき、$T_i^{p^{-n}} \mapsto u_i^{p^{-n}}$ で環準同型

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \cap & & \cap \\ C_0 & \longrightarrow & C \end{array}$$

を定める。また、C_0 への Γ の作用は C への作用から自然に導かれるものとする。最初に、

$$S = \text{projective limit } (C_0/pC_0 \overset{p\text{乗}}{\longleftarrow} C_0/pC_0 \overset{p\text{乗}}{\longleftarrow} \cdots)$$

とすると、S の元は $s_n = s_{n+1}^p$ なる C_0/pC_0 の元の列 $s = \{s_n\}$ であらわされる。$C_0 = C_0^p + pC_0$ (C_0/pC_0 は完全環) であるから、環準同型

$$\begin{array}{ccc} W_n(S) & \longrightarrow & C_0/p^n C_0 \\ [s_1, \cdots, s_n] & \mapsto & \tilde{s}_{1n}^{p^{n-1}} + p\tilde{s}_{2n}^{p^{n-2}} + \cdots + p^{n-1}\tilde{s}_{nn} \end{array}$$

は全射となる。ここで、$W_n(S)$ は長さ n の S-係数 Witt vector で $\tilde{s}$ は C_0/pC_0 の元 s の C_0 への持ち上げをあらわす。ideal (p) の自然な P.D.-構造と可換な上の全射の核に対する P.D.-包絡環を B_n として、$I_n^{[m]}$ を第 m 次 P.D.-ideal とする。次に、

$$D_{0m} = (\varprojlim_n B_n/I_n^{[m]})[1/p]$$

とおく。C は $R_\infty(= R\bigotimes_{R_0} C_0$ の $\overline{R}$ における整閉包) 上 bounded etale covering より、全射

$$D_{0m} \longrightarrow \widehat{C}_0[1/p]$$

に対して、p-進完備なその持ち上げ $\widehat{R}[1/p]$-algebra D_m で整構造を持ち、図式

$$\begin{array}{ccc} D_{0m} & \longrightarrow & \widehat{C}_0[1/p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_m & \longrightarrow & \widehat{C}[1/p]\ (\text{全射}) \end{array}$$

が可換になるものが唯一存在する。射影系 $\{D_m\}$ に対してその射影極限を

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}(R, C) = \varprojlim_m D_m$$

であらわす。ところで、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & W_n(S) \\ \zeta = \{\zeta_n\} & \mapsto & [\zeta^p, 0, \cdots, 0] \end{array}$$

から、Γ-準同型

$$\alpha : \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$$

が定まる。この写像は全射 $B_n \mapsto C_0/p^n C_0$ による $\zeta = \{\zeta_n\} \in \mathbb{Z}_p(1)$ の B_n への持ち上げ $\tilde{\zeta}_n$ に対して $(\tilde{\zeta}_n)^{p^n}$ をとったものの射影系により定まるものである。$\mathbb{Z}_p(1)$ の生成元 ζ を一つ固定して、$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ の元

$$t = \log(\alpha(\zeta)) = \sum (-1)^{k-1} \frac{(\alpha(\zeta) - 1)^k}{k}$$

を定める。これは $\alpha(\zeta) - 1 \in I_n^{[1]}$ より P.D.-環の性質で B_n において有限和となり、B_{dR} の中で収束する。

環 $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(R, C)$ とその filtration を

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} &= \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+[t^{-1}] \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^r &= t^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \end{aligned}$$

で定義する。これは、$\mathbb{Z}_p(1)$ の生成元 ζ のとり方によらず決まる。このとき、$log \circ \alpha$ によって、

$$\widehat{C}[1/p](r) \cong gr^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$$

が導かれる。これが Faltings の B_{dR} である。

さて、$E = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+[V_i\ ;\ i = 1, \cdots, d]$ とおき、

$$E \longrightarrow \widehat{C}[1/p]$$

を $V_i \mapsto 0$ かつ $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ 上では通常として定める。さらに、

$$J_m = \{x_1 \cdots x_m ; x_i \in \ker(E \to \widehat{C}[1/p])\} \text{ で生成される ideal}$$

として、$E_m = E/J_m$ とする。すると、E_m は p-進完備な D_m-algebra になる。環準同型 $R_0[1/p] \to E_m$ を

$$T_i \mapsto \frac{[\{u_i^{p^{-n+1}}\}, 0, \cdots]}{1 + V_i}$$

で定めると、$R[1/p]$ は $R_0[1/p]$ 上 etale より $\widehat{R}[1/p] \to E_m$ に延びる。$E_\infty = \varprojlim_m E_m$ とする。さきに固定した $t \in \mathrm{B}^1_{\mathrm{dR}}$ を用いて、$E_\infty[t^{-1}]$ の中で、

$$E_\infty^+ = \bigcup_{m \geq 0} t^{-m} \ker(E_\infty \to E_m)$$

とおく。D_m の整構造は $E_\infty^+/t^m E_\infty^+$ の整構造を導き、各 $E_\infty^+/t^m E_\infty^+$ は p−進完備な D_m−algebra となる。この m に関する完備化を

$$\mathfrak{B}^+_{\mathrm{dR}} = \varprojlim_m E_\infty^+/t^m E_\infty^+$$

とする。これより、求める環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} = \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R, C)$ が

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} = \mathfrak{B}^+_{\mathrm{dR}}[t^{-1}]$$
$$\mathfrak{B}^r_{\mathrm{dR}} = t^r \mathfrak{B}^+_{\mathrm{dR}}$$

と定まる。

$\sigma \in \Gamma$ の $\{u_i^{p^{-n}}\}$ への作用を $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$ とする。このとき、$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ への Γ の作用を

$$\sigma(1 + V_i) = \alpha(\zeta)(1 + V_i)$$

で定める。

また、D_m-準同型

$$E_m \longrightarrow \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} E_{m-1}$$

を、$1 + V_i \mapsto -dlog(u_i) \otimes (1 + V_i)$ で定めると、これは $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ 上で integrable な B_{dR}-connection

$$\nabla : \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$$

を定める。その定義より Griffith-transversarity $\nabla(\mathfrak{B}^r_{\mathrm{dR}}) \subset \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ をみたす。

兵頭氏の 環 S_∞ との関係は次のようになる。
Γ-加群の標準的な拡大

$$0 \to \widehat{C}[1/p] \to M \to \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} \widehat{C}[1/p](-1) \to 0$$

$$M = (\varprojlim_n (\Omega^1_{C/R})_{p^n-\mathrm{torsion}}) \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p(-1)$$

により[Fa1]、環 $S_\infty = S_\infty(R,C)$ は、

$$S_\infty = \varinjlim_m \mathrm{Sym}^m_{\widehat{C}[1/p]} M$$

$$\mathrm{Sym}^m_{\widehat{C}[1/p]} M \to \mathrm{Sym}^{m+1}_{\widehat{C}[1/p]} M \qquad [x_1 \otimes \cdots \otimes x_m] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m]$$

で定義される。$\widehat{C}[1/p]$-加群の準同型

$$\ker(E_2 \to E_1) \to (\varprojlim_n (\Omega^1_{C/R})_{p^n-\mathrm{torsion}}) \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

を $t \mapsto \{dlog(\zeta_n)\}$ ($\{\zeta_n\}$ は t を定めるとき固定した 1 のべき根)、$V_i \mapsto \{dlog(u_i^{p^{-n}})\}$ で定めると、これは Γ-準同型となり $\otimes\mathbb{Q}_p(-1)$ することにより同型

$$\ker(E_2 \to E_1)(-1) \to M$$

を得る。積構造から、Γ-同型

$$\ker(E_{m+1} \to E_m) \to \mathrm{Sym}^m_{\widehat{C}[1/p]} M$$

が誘導され、これより Γ-同型

$$gr^0 \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \cong S_\infty$$

が得られる。

また、S_∞ の連続 cohomology 群は、

<u>定理</u>. (兵頭)

$$\mathrm{H}^i(\Delta, S_\infty) = \begin{cases} (R \bigotimes_{O_K} O_{\overline{K}})^\wedge [1/p] & (i=0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, S_\infty(r)) \cong \begin{cases} \widehat{R}[1/p] & (i,r) = (0,0) \text{ または } (1,0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。

$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の位相に関する論議と spectral 系列

$$\mathrm{E}_1^{ab} = \mathrm{H}^{a+b}(\Delta, S_\infty(a)) \longrightarrow \mathrm{H}(\Delta, \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}})$$

により $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の連続 cohomology 群を求まる。

注 意. 今まで述べてきた局所理論の相対化についてふれる。

$$(R, C) \to (R', C')$$

をさきの条件をみたす対の間の環準同型で、$R'[1/p]$ は $R[1/p]$ 上 smooth かつ幾何的既約とする。$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R', C')$、$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(R', C')$ をそれぞれ $\mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}$、$\mathrm{B}'_{\mathrm{dR}}$ であらわし、$\Gamma' = \mathrm{Gal}(C'/R')$ 、$\Delta' = \mathrm{Gal}(C'/R' \bigotimes_R C)$ 、$\Omega^* = \Omega^*_{R'[1/p]/R[1/p]}$ と記号を定める。この状況で連続 cohomology 群は

$$\mathrm{H}^i(\Delta, \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}) = \begin{cases} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} \mathrm{B}'_{\mathrm{dR}})^{\frown} & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}) \cong \begin{cases} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\widehat{R}[1/p]} \widehat{R}'[1/p])^{\frown} & (i = 0 \text{ または } 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。Γ-加群の減少 filtration 付き複体 DR'

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} & \to & \Omega^1 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} & \to & \Omega^2 \bigotimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} & \to \cdots \\ \text{degree} & & (0) & & (1) & & (2) & \end{array}$$

も同様に定義されて、自然な複体射 $(\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} \mathrm{B}'_{\mathrm{dR}})^{\frown} \to \mathrm{DR}'$ が filtered quasi-isomorphism になる。また、cup 積、Künneth formula もある。

§3. de Rham 表現

V を p-進 Γ-表現、すなわち、Γ-作用をもつ有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間とする。

定 義. V が Γ に関する de Rham 表現とは、自然な写像

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\widehat{R}[1/p]} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\mathbb{Q}_p} V) \longrightarrow \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

が同型になることをいう。

Tate-twist $\mathbb{Q}_p(r)$ は、$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(r) = \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}\{r\}$ (filtration の r 回 twist) と $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の性質 (ウ) より de Rham 表現となる。

de Rham 表現の圏は、直和、tensor 積、双対、引きもどしに関して閉じている。

de Rham 表現 V に対して

$$\mathrm{DR}(V) = (\mathrm{DR}\bigotimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma}$$

と定める。すると、これは locally free $\widehat{R}[1/p]$-加群の filtration 付きの複体になる。$\mathrm{DR}(\cdot)$ は、cup 積および Künneth formula をもつ。

de Rham 層を定義するにあたって次の補題が重要である。

<u>補 題</u>. $\amalg(R_\lambda, C_\lambda)$ を先の条件をみたす対で、$\amalg\mathrm{Spec}\ R_\lambda \to \mathrm{Spec}\ R$ を rigid etale covering とする。このとき、V が $(\mathrm{Spec}\ R)_{et}$ 上の *de Rham* 表現であることと、各 λ に対して V が $(\mathrm{Spec}\ R_\lambda)_{et}$ 上の *de Rham* 表現であることは同値である。

これより、de Rham 層の概念は rigid etale 的な性質になる。

<u>注 意.</u> §2 の最後の注意と同様に今まで述べてきた局所理論の相対化もある。

§4. 比較定理

X を K 上の完備非特異多様体で、$\mathfrak{X}$ をその O_K 上の proper flat model とする。[Fa2][Fa3]より、$\amalg(R_\lambda, C_\lambda)$ で §2 の条件をみたし、$\amalg\ \mathrm{Spec}\ R_\lambda \to \mathfrak{X}$ が rigid etale covering になるものが存在する。

<u>定 義</u>. V を X_{et} 上の smooth $\mathbb{Q}_p$-層とする。V が de Rham 層とは、各 (R_λ, C_λ) 上で V が de Rham 表現になることをいう。

§3 の補題より、この定義は rigit etale covering のとり方によらない。

V を de Rham 層とする。各 $(\mathrm{Spec}\ R_\lambda[1/p])_{et}$ 上で $(\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}\bigotimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma}$ は、locally free 層となるから $\mathfrak{X}$ の rigid etale site 上の locally free 層となる。X は K 上 proper より代数化可能で、X 上の locally free 層が得られる[EGA III]。同様に、複体 $\{\mathrm{DR}(V)_\lambda\}$ も代数化可能で、X 上の locally free 層の減少 filtration 付きの複体となる。この複体を $\mathrm{DR}(V)$ とかくことにする。

(R, C) を §2 の条件をみたす対として、$f : X \to \mathrm{Spec}\ R[1/p]$ を proper smooth morphism とする。$\overline{X} = X \bigotimes_{R[1/p]} \overline{R}[1/p]$ とおく。

<u>主 定 理</u>. V を X_{et} 上の de Rham 層とすると、$\mathrm{H}^i(\overline{X}, V)$ は $R[1/p]$ 上の de Rham 表現となる。さらに、次の標準的なな同型

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{H}^i(\overline{X}, V) \cong \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \bigotimes_{\widehat{R}[1/p]} \mathbb{H}^i(X, \mathrm{DR}(V))$$

が存在する。この同型は、Galois 群の作用、filtration 、chern class map を保つ。ただし、$\mathbb{H}^*(X, \mathrm{DR}(V))$ は $\mathrm{DR}(V)$ の hypercohomology とする。

証明は[Fa1][Fa2]の論議と同様である。その概略は以下のようになっている。

両辺の cohomology は $\mathfrak{X}$ 上の hyper rigid etale covering の hyper céch cohomology で計算できる。$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の局所理論により、両者を計算する複体を rigid etale local に結ぶ。

$\mathfrak{X}$ 上の rigid etale local な Δ'-cochain の図式

$$\begin{aligned} C^*(\Delta', (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \underset{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}{\otimes} \mathrm{B}'_{\mathrm{dR}}) \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V) \xrightarrow{a} \quad & C^*(\Delta', \mathrm{DR}' \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V) \\ & \xleftarrow{b} C^*(\Delta', \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} \underset{\widehat{R}'[1/p]}{\otimes} \mathrm{DR}'(V)) \\ & \xleftarrow{c} \quad \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \underset{\widehat{R}[1/p]}{\otimes} \mathrm{DR}'(V) \end{aligned}$$

を考える。上の図式で Δ'、$\mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}$、$\mathrm{DR}'$ は §2 の最後の注意の中の記号で、それぞれ R'/R の相対 Galois 群、環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R', C')$ 、$\widehat{R}'[1/p]/\widehat{R}[1/p]$ 上の相対複体を表す。この図式で a と c とは 環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の性質より quasi-isomorphism であり、b は de Rham 層の定義より同型となる。

Δ'-cochain $C^*(\Delta', V)$ の rigid etale hypercovering を走らせた hypercohomology 群は、rigid etale cohomology の性質より etale cohomology 群 $\mathrm{H}^*(\overline{X}, V)$ と自然に同型となる。(torsion のときの差が十分小さい p-べき)

先の Δ'-cochain と cochain 射

$$C^*(\Delta, V) \to C^*(\Delta', (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \underset{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}{\otimes} \mathrm{B}'_{\mathrm{dR}}) \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V)$$

とを合わせ、自然な変換

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} \mathrm{H}^i_{et}(\overline{X}, V) \longrightarrow \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \underset{\widehat{R}[1/p]}{\otimes} \mathbb{H}^i(X, \mathrm{DR}(V))$$

を得る。具体的な計算により、vector bundle の chern class が上の自然な変換で可換になることが示せる。このことと normal cone の変形理論とから characteristic class の可換性が導かれる。これより、両者の Poincaré 双対性が可換になることがいえる。したがって、上の変換は直和因子への同型となる。対角成分の特性類の可換性より、逆写像も Poincaré 双対性と可換になり定理を得る。

参考文献

[BO] Berthelot,P. and Ogus,A.:, "Note on crystalline cohomology," Princeton University Press, 1978.

[Fa1] Faltings,G.:, *p-adic Hodge theory*, J. Am. Math. Soc. **1** (1988), 255–299.

[Fa2] Faltings,G.:, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic and Analysis, Geometry and Number Theory, Johns Hopkins University Press (1990), 25–80.

[Fa3] Faltings,G.:, Letter.

[Fo1] Fontaine,J.-M.:, *Modules Galoisiens, modules filtres et anneaux de Barsotti-Tate*, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[Fo2] Fontaine,J.-M.:, *Sur certains types de représetations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local, construction d'un anneaux Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.

[H] Hyodo,O.:, *On variation of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284** (1989), 7–22.

[I] Illusie,L.:, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique* [*d'après G.Faltings, J.-M.Fontaine et al.*], Séminaire Bourbaki 1989 / 90, exposé $n^0$726.

[Ta] Tate,J.:, *p-divisible groups*, Proceedings of a Conference on Local Fields (1967), 158–183, Springer, Berlin.

[Tsu] Tsuzuki,N.:, *Variation of p-adic de Rham structures*, Preprint.

[EGA III] Grothendieck,A. and Dieudonné,J.:, *Eléments de Géométrie Algébrique III*, Publ.Math.IHES **11** (1961);, **17** (1963).