数理解析研究所講究録
第802巻1992年12-16


# 「辺に関するグラフ理論」の洗い直し

大阪大学医療技術短期大学部

山崎洋平（Yōhei Yamasaki）

What is widely known is seldom true.
And what is true is seldom well known.

ノーベル物理学賞を授賞したE.P.Wignerの言である。物事を在るがままに表すのは難しい。手段が貧弱な体系では表現も貧弱ならざるを得ないが、その体系にどっぷり浸かってしまうと貧弱さを自覚するのが難しくなる。

グラフの定義方法を大きく分けると有向・無向で２通り、Ｖ×Ｅ上のcoincidenceと見るかＶ×Ｖ上のadjacencyと見るかで２通り、全部で４通りある。

有向グラフを扱う立場に立てば無向グラフはその特殊例であり、無向グラフを扱う立場に立てば有向グラフはその特殊例になる。幸か不幸かその対応はどちらもontoではない。

coincidenceとadjacencyについても、辺を実体と見るか関係と見るかという単なる趣味の問題ではない。グラフの辺に関する命題はライングラフ上の頂点に関する命題にもマトロイド上の命題にも解釈し直す余地があり得る。命題は扱う者の好みを越えて、然るべき世界で書かれるべきである。

シャノンのゲームは当初次のようにグラフの辺に関して書かれていた：

> 2端点を持つグラフの辺を2人が交互に占め合う。
> 一方の競技者は2端点間を自分の占めた辺で
> つなごうとし、もう一方はそれを阻止しようとする。

このゲームは後にマトロイド版で解決した。ちなみに、頂点版は種々の意味で「難しい」、元来マトロイドで書かれるべき現象だったと言えよう。

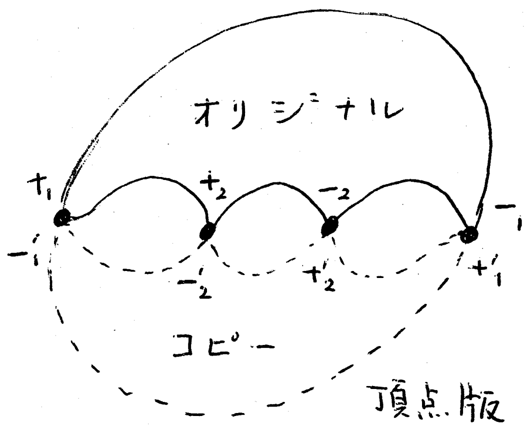
さてマトロイド版では「頂点」が存在しないため2端点の代わりを競技対象でない「端辺」が務めるが、いずれにしても確定少数個の特別な対象があるというのは感心しない。グラフ版でも端点を増やす試みには限界があり、結局はマトロイド版で端辺を解消して考えるのが最も一般的で自然な解決となった：

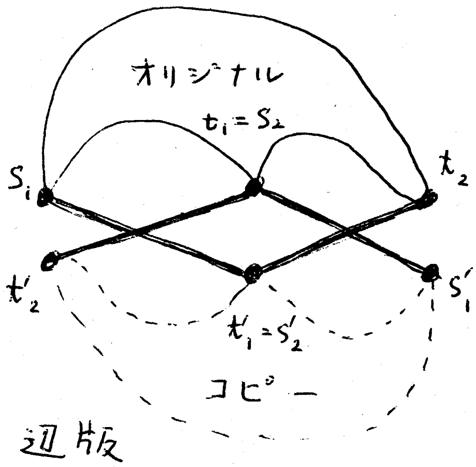
> 台集合X上に2つのマトロイド構造($\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}$)を考える。ただし$deg = rank' - rank$が増加関数であるものとする。2人の競技者が交互にXの元を占め合い、一方の競技者が占めた部分のdegがあらかじめ定められた数d以上になると彼の勝ちとなる。

この定式化では相手の立場に立って見ると、同じ台集合上($\mathcal{M}^*$, $\mathcal{M}'^*$)に関して$d^* = deg(X) - d + 1$とおいて同様のゲームをしていることに対応する。このことから競技者間の対称性も完全なものになった[2]。(辺に関する)シャノンのゲームに限れば、この定式化で説明できないものはどれもうまく解けていないのみならず、ある範疇に属するうまい解法が存在しないことが判明したものもある。

一方多種流問題では、グラフ論に留まって端点を解消するため群の作用を導入する方法が有効である。実際、多端点対を持つグラフで2つ以上の対の間を結ぶ点素なpathのないものは$Z_2$−グラフの世界でトポロジカルに特徴付けられる[1]。多端点対を持つグラフはそのコピーを(端点と対応端点のコピーどうし)接合することによって$Z_2$−グラフ化することができるからである。

ピーどうし）接合することによってＺ$_2$－グラフ化することができるからである。




「辺」に関する命題についても端点と対応端点のコピーの間を「端辺」でつなぐことによりＺ$_2$－グラフ化できる。もっとも「辺」に関する問題の十分条件を追求するのか「頂点」に関する問題の必要十分条件を追求するのかも既存の常識・権威に迎合することなく何が自然かという基準で判断せねばなるまい。

シャノンのゲームはグラフの「辺」に関する命題ではなくマトロイドに関する命題として解決するし、多種流問題の必要十分条件は部分的ながらも「辺」ではなく「頂点」に関して見つかっている。マトロイド上またはライン・グラフ化により「頂点」に関して翻訳でき、グラフの「辺」に関してのみ自然に解ける命題とはどんなものであろうか？

「オイラー・グラフの特徴付けはできるがハミルトン・グラフについてはＮＰ完全」----左様、ＮＰ≠Ｐだと仮定すれば後者が難しいと解釈する動機は理解できる（もっとも「・・・であると期待できない」からといって「・・・でないと期待できる」ものではない）。しかしオイラー条件とライン・グラフのハミルトン条件は同値ではないので「頂点」に関する命題とは無関係である。マトロイドに翻訳するため「連結性」を無視してサイクルの和になる条件を求める問題だとすると、マトロイドに翻訳困難な「次数」を用いて条件を表したところで「解いた」というほどのこととも思えない。「辺」に関するグラフ理論は必然性の吟味を要するように思われる。

## 参考文献


［１］　Y. Yamasaki, Theory of connexes I, Publ. RIMS Kyoto Univ. 17 (1981) 777-812

［２］　Y. Yamasaki, Shannon switching games without terminals II and III, Graphs and Combinatorics 5 (1989) 275-282 and to appear