数理解析研究所講究録
第803巻 1992年 216-230

Selberg motif について

千葉大学(教養) 寺杣 友秀

1. Selbergは1944年、次の公式を示した。

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{1\le i<j\le n} |t_i - t_j|^{2z} \prod_{i=1}^{n} t_i^{x-1} \prod_{i=1}^{n} (1-t_i)^{y-1}\, dt$$

$$= n! \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(x+(j-1)z)\,\Gamma(y+(j-1)z)\,\Gamma(jz-1)}{\Gamma(x+y+(n+j-2)z)\,\Gamma(z+1)}$$

この公式に関して、類似の式がAskeyとEvansによってそれぞれ考察された。Askeyの予想は、いわゆるSelberg積分のq-analogとも言えるもので、Evansのそれは、有限体上のcharacter sumに関するものである。前者はKadellとHabsiegerにより独立に、後者は、G. Andersonにより示された。AndersonはEvans予想を解くために2つの多項式のResultantを用いたが、さらにその考え方は、curveの対称積を考えることにより幾何学的に解釈される。少し図式的に言うならば、Selberg integralに付随するmotifは、Fermat hypersurfaceのmotifで生成されるということである。ゆえにこの証明法は、PeriodやCharacter sumに対する結果を統一的に扱う方法であるといえる。この報告ではそのことを示すとともに、最後に、q-analogに関するAskey予想を上の考察をもとに、KadellやHabsiegerとは別の証明法を与える。このため、q-hypergeometric functionのdeterminantに関する結果が必要とな

って来る。

2. Motifの定義

kおよびLを標数0の体とする。Sをk上smoothなvarietyとする。次のdata(M1)〜(M5)を考える。

(M1) (M1.1) Variation of (pure) Hodge structure.

すべてのkのCへの埋め込みσに対して、$\sigma(S)(\mathbb{C})$上のL-係数のlocal systemを対応させるsystem$\{\mathcal{H}_{B,\sigma}\}$が、L-variation of pure Hodge structureであるとは、すべてのLのCへの埋め込み$\tau: L \hookrightarrow \mathbb{C}$に対して、$\mathcal{H}_{B,\sigma} \otimes_{L,\tau} \mathcal{O}_{\sigma(S)}$がholomorphic Hodge filtration $\mathcal{F}^{\bullet}_{\sigma,\tau}$をもち、すべての$\sigma(S)(\mathbb{C})$の点$s$に対して、(weightをwとする)

$$\bigoplus_{p+q=w}\left[\mathcal{F}^{p}_{\sigma,\tau}(\mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes_{\tau}\mathbb{C}(s))\cap(\mathrm{id}\otimes\iota)\mathcal{F}^{q}_{\sigma,\iota\tau}(\mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes_{\iota\tau}\mathbb{C}(s))\right]\cong\mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes_{\tau}\mathbb{C}(s)$$

が成り立つことである。ここでιはCのcomplex conjugateである。

(M1.2) Variation of mixed L-Hodge structure

kのすべての埋め込みσ Cに対して、$\sigma(S)(\mathbb{C})$上のL係数のlocal system $\mathcal{H}_{B,\sigma}$とその上のholomorphicなfiltration $\mathcal{F}^{\bullet}_{\sigma,\tau}$と、$\mathcal{H}_{B,\sigma}$のlocal systemとしてのfiltration $W_{k,\sigma}$ (weight filtration) が与えられ、$Gr^{W}_{k}(\mathcal{H}_{B,\sigma})$と、$\mathcal{F}^{\bullet}_{\sigma,\tau}$によって誘導されたfiltrationがvariation of pure Hodge structureとなる時、(weightはw) $\mathcal{H}_{B,\sigma}$をvariation of mixed Hodge structureという。

(M2) Mixed étale sheaf　$\mathcal{H}_{A^f}$は、S上のlocally free $A^f\otimes L$ étale sheafで、weight filtration Wをもって

いる。よって、$\mathcal{H}_{A^f}$ は、S 上の étale sheaf なので、$\bar{\eta}$ を S の geometric point とすると、$\mathcal{H}_{A^f,\bar{\eta}}$ は $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ の作用を持っている。さらに $Gr^W_k(\mathcal{H}_{A^f})$ は、wt w の (potentially pure) な S 上の étale sheaf になると仮定する。ここで weigh w の potentially pure な sheaf とは、S のある $\mathbb{Z}$ 上 finite な regular scheme $\mathcal{S}$ が存在して、$\mathcal{H}_{A^f}$ は $\mathcal{S}$ 上の étale sheaf から induce され、$\mathcal{S}$ の closed geometric point での $\mathcal{H}_{A^f}$ への geometric Frobenius の action の複素絶対値はその剰余体の order の $\frac{w}{2}$ 乗になっていることである。

(M3) De Rham realization = S 上の locally free sheaf で、regular integrable connection をもつもの。

$\mathcal{H}_{DR}$ は $S\otimes L$ 上の locally free $\mathcal{O}_S\otimes L$ module の sheaf.（S 上は locally free になるかどうかはわからない。）言い換えれば、M を体として、$k \overset{\sigma}{\hookrightarrow} M$, $L \overset{\tau}{\hookrightarrow} M$ を fix した時、$\mathcal{H}_{DR} \otimes_{\sigma,\tau} M$ が、$\mathcal{O}_S \otimes_k M$ locally free module となることと同値である。また $\mathcal{H}_{DR}$ は、integrable で regular な connection ∇ をもっている。さらに weight filtration W があり、∇ で stable である。ただし、regularity を論ずるために、S の compact化 $\bar{S}$ は fix する。また、$\mathcal{O}_S\otimes L$-free な filtration $\mathcal{F}$ が存在して、Griffiths-tranversality

$$\nabla_{\sigma,\tau}(\mathcal{F}^i \otimes_{\sigma,\tau} M) \subset \mathcal{F}^{i-1} \otimes_{\sigma,\tau} M$$

を満たす。

さらに、(M1)(M2)(M3) の間に次の compatibility を課す。

(M4) $\underline{\mathrm{Comp}}_{A^f, B}$－　任意のkのCへの埋め込み $\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して，自然なtopologyの射 $S_{\mathbb{C}, cl} \xrightarrow[j]{} (S\otimes\mathbb{C})_{et}$ による $\mathcal{H}_{B,\sigma}$ のdirect image $j_*(\mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes A^f)$ と $\mathcal{H}_{A^f}|_{S\otimes\mathbb{C}}$ との間のWを保つ同型：$\mathrm{Comp}_{A^f, B}(\sigma)\ \mathcal{H}_{A^f}|_{S\otimes\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} {}_*(\mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes_{L,\tau}(L\otimes A^f))$ が与えられている。$k=S$ の時はこれは，任意のkの代数的閉包 $\bar{k}$ のCへの埋め込み $\bar{\sigma}$ でk上σを与えるものに対して，$\mathrm{Comp}_{A^f, B}(\bar{\sigma}): \mathcal{H}_{A^f}(\bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{B,\sigma}\otimes_L(L\otimes A^f)$ なる同型で，$\mathcal{H}_{A^f}(\bar{k})$ への $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ のactionとcompatibleになるものを与えることと同値である。

(M5) $\underline{\mathrm{Comp}}_{B, DR}$－　任意のkおよびLのCへの埋め込みσ，τに対して，$\mathrm{Comp}_{B,DR}: \mathcal{H}_B\otimes_\tau \mathcal{O}_{(S\otimes\mathbb{C})an} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{DR}\otimes_{(\mathcal{O}_{S,\tau})}\mathcal{O}_{(S\otimes\mathbb{C})an}$ なる同型が存在して，しかもそれぞれのfiltration $\mathcal{F}_{\sigma,\tau}$ とWは，この同型を通じて一致する。また左辺の∇-flatなsectionが，左辺のlocally constantなsectionと一致する。

<u>定義（S上のLを係数とするrealization）</u>　上にあげた5つのpair $(\{\mathcal{H}_{B,\sigma}\}_{\sigma:k\hookrightarrow\mathbb{C}}, \mathcal{H}_{A^f}, \mathcal{H}_{DR}, \mathrm{Comp}_{A^f, B}, \mathrm{Comp}_{B, DR})$ のなすcategoryをS上のLを係数とするrealizationのcategoryという。Realizationのcategoryでmorphismとは，それぞれの構造，compを保つ $\{\mathcal{H}_{B,\sigma}\}$, $\mathcal{H}_{A^f}$, $\mathcal{H}_{DR}$ 間のlinear mapのことである。容易にわかる様に，realizationのcategoryは，⊗，⊕，Homをもつabel圏である。S上のreduced scheme

$\mathcal{X}$に対して、$\mathcal{H}^i(\mathcal{X}, L)$を、$(\{R^i(\sigma(f))_* L,\ R^i f_{et*}(L\otimes A^f),$ $\mathcal{H}^i_{DR}(\mathcal{X}/S)\otimes_{\mathbb{Q}} L,\ comp_{A^f,B},\ comp_{B,DR})$は自然な仕方でrealizationの元となる。ここでfは、構造射 $f:\mathcal{X}\to S$ である。これは、S上のschemeに対するcontravariant functorである。($\mathcal{H}^i_{DR}(\mathcal{X}/S)\otimes_{\mathbb{Q}} L$は、$\mathcal{X}$がsmoothでない時は、意味を少し変えなくてはならない。$\mathcal{H}^2(\mathbb{P}^1\times S, L)$を$L(-1)$と書く。Realization $\mathcal{H}$に対して、$\mathcal{H}\otimes L(-1)^{-m}$ $(m\geq 0)$ あるいは、$\mathrm{Hom}(L(-1)^{+m}, \mathcal{H})$ $(m\geq 0)$を、$\mathcal{H}(m)$と書く。(M1)(M2)(M3)のfiltration $W_\bullet$が、$W_k=$全体, $W_{k-1}=0$となる時、このmixed motifは、pureでwt kをもつといわれる。今 $\mathcal{X}\xrightarrow[f]{} S$がprojective smoothならば、$\mathcal{H}^i(\mathcal{X}, L)$はpureでwtはiである。またこの時、Poincare dualityにより、fがrelative dimension nをもてば、$\mathcal{H}^i(\mathcal{X}, L)\otimes\mathcal{H}^{2n-i}(\mathcal{X}, L)\to L(-2n)$はperfect pairingである。ゆえに、$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$それぞれS上projective smoothでrelative dimentionがn, mとすれば、ZをS上proper flatなcycleで、codimensionがpure d-次元ならば、上のPoincare dualityとfunctorialityを用いて、$\mathcal{H}^i(\mathcal{Y}, L)\longrightarrow\mathcal{H}^{i+2(d-m)}(\mathcal{X}, L)(m-d)$: $x\mapsto pr_{1*}(pr_2^* x\wedge d(Z))$が定義される。ここで$pr_{1*}$は、Poincare dualityによって定まるpr_1^*のtransposeである。また、$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$内のpure codimension dのS上proper flatなcycleのL係数の和を考えれば、それもまた同じく、$\mathcal{H}^i(\mathcal{Y}, L)$から

$\mathcal{H}^{i+2(d-m)}(Y, L)(m-d)$ へのmorphismを与える。この様なcycleの形式的な和をcorrespondenceと呼ぶ。

(定義) <u>Motifの圏</u>　$\mathcal{H}^i(X, L)$ の形のobjectから $\otimes$, $\oplus$, dual, 及びCorrespondenceによるkernel, cokernel imageをとる操作によって生成されたrealizationをmotifという。motifの圏のmorphismとは、correspondenceからinduceされたものを考える。Motifには、自然にrank (たとえば、$\mathcal{H}_B$ のlocal system としての次元) が定義でき、それにより、最高階の外巾としてdeterminantが定義できる。rankが1のmotifを、invertible motifという。この章は、invertible motif over $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ として最も重要であるFermat motifを定義して、終えることにしよう。

(定義) <u>Fermat motif</u>　X^n を $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 上定義されたaffine variety X^n: $x_0{}^d + \cdots + x_n{}^d = 1$ とする $(d > 1)$　今 $G = \mu_d{}^{(n+1)}$ は、$(g_0, \cdots, g_n) \in G$ が $(x_0, \cdots, x_n)$ の各成分への積によって作用する。$\chi = (\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$　$(\alpha_i \in \mathbb{Z}/d)$ をGの指標とする時、χ へのprojection p_χ を $p_\chi = \sum_{g \in G} \cdot \frac{1}{|G|} \chi^{-1}(g) g^*$ で定義する。$L = \mathbb{Q}(\zeta_d)$ とおく。$p_\chi \cdot H^n(X^n, L)$ は、もし、$\alpha_0 \neq 0, \cdots, \alpha_n \neq 0$, $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ ならpure wt n のinvertible motifとなる。これをFermat motifといい、$F(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ あるいは、$F(\chi)$ と書く。α の形によりweight n は自然にわかるので以下 n は省く。また、

$F(\underbrace{\alpha_1,\cdots,\alpha_1}_{n_1 個},\cdots,\underbrace{\alpha_p,\cdots,\alpha_p}_{n_p 個})$ を $F(n_1\alpha_1,\cdots,n_p\alpha_p)$ と書く。

3. Selberg integral に対する motif

Selberg integral は、次の variety S_n の period と考えられる。

S_n : $s^d=\prod_{i=1}^n t_i$, $t^d=\prod_{i=1}^n(1-t_i)$, $u^d=\prod_{i>j}(t_i-t_j)=w^2$.

S_n には、群 $\mu_d\times\mu_d\times\mu_d\times\mu_2$ が s, t, u, w への積により作用する。S_n は、t_i の置換により方程式の形が変わらないので、$A^n/\mathfrak{S}_n$ 上の covering と見る。ϕ を μ_2 の nontrivial な character, α, β, γ を μ_d の character とする。$H^n(S_n, \mathbb{Q}(\zeta_d))(\alpha,\beta,\gamma,\phi)$ で定義される $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 上の motif を考える。これを Selberg motif $S_n(\alpha,\beta,\gamma,\phi)$ と書く。

__定理__ $\gamma^i\ (i=1,\cdots,n)$, $\alpha\gamma^i, \beta\gamma^i\ (i=0,\cdots,n-1)$ 及び $\alpha\beta\gamma^i$ $(i=n-1,\cdots,2n-2)$ が nontrivial であるとする。この時、motif としての同型

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma,\phi) = \bigotimes_{i=0}^{n-1} F(\alpha\gamma^i, \beta\gamma^i, \gamma, \phi)\otimes\bigotimes_{i=0}^{n} F((n-i)\gamma)^{-1}$$

が存在する。

定理の証明は、次の命題を示すことにより得られる。

__命題__ $\gamma, \gamma^{n+1}, \alpha, \beta, \alpha\beta\gamma^n$ が nontrivial character であるとする。この時、motif としての同型

$$F((n+1)\gamma)\otimes S_{n+1}(\alpha,\beta,\gamma,\phi) \cong F(\alpha,\beta,n\gamma)\otimes S_n(\alpha\gamma,\beta\gamma,\gamma,\phi)$$

が存在する。

さて以下、命題の証明をしよう。まず初めに、Resultant variety $\tilde{R}_n$ を、$\tilde{R}_n:\ s^d=\prod_{i=1}^{n+1} y_i$, $t^d=\prod_{i=1}^{n+1}(1-y_i)$, $u^d=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n+1}(x_j-y_i)\times(-1)^{\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{1}{2}n(n+1)$ で定義すれば、これは $\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}^{n+1}=\{(x,y)\}$ の $\mu_d\times\mu_d\times\mu_d$-covering である。$\tilde{R}_n$には、$x_i$及び$y_j$の座標の入れかえにより、$\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_{n+1}$が作用するが、$R_n$を、$\tilde{R}_n/(\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_{n+1})$で定義すれば、$pr_1: R_n\longrightarrow\mathbb{A}^n/\mathfrak{S}_n$, $pr_2: R_n\longrightarrow\mathbb{A}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$が存在する。次に、$A_n/\mathfrak{S}_n$及び$A_{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$上の$R_n$と、あるtwistされたFermat hypersurfaceの間のcorrespondenceを定義する。今、$\xi_1,\cdots,\xi_n$及び$\eta_1,\cdots,\eta_{n+1}$を$x_1,\cdots,x_n$及び$y_1,\cdots,y_{n+1}$の基本対称式とする。$f_x(\eta)=\prod_{i=1}^{n+1}(x-y_i)$で定義される、$\eta_1,\cdots,\eta_{n+1}$に関するlinear formとする。まず、$R_n\times_{A_n/\mathfrak{S}_n}A_n$と、$A_n$上のFermat hypersurface F_1の間のcorrespondenceを定義する。ここでF_1は、twisted Fermat hypersurfaceである。$F_1:\ \sum_{i=0}^{n+1}\delta_i x_i^d=1$, $\delta_0=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-1}$, $\delta_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_i)^{-1}$, $\delta_i=-\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$ $(i=1,\cdots,n)$ で定義される。$x_i^d=f_{x_i}(\eta)$, $x_0^d=\eta_{n+1}$, $x_{n+1}^d=f_1(\eta)$とおいてこれがF_1を満たすことから、$(x_0,\cdots,x_{n+1})$を、$(s,t,u)=(x_0,x_{n+1},x_1\cdots x_n)$に対応させることにより、$F_1$から$R_n\times_{A_n/\mathfrak{S}_n}\mathbb{A}^n$への$\mathbb{A}^n$上のmorphismを与える。さらにこれは、$\mathfrak{S}_n\ltimes(\mu_d\times\mu_d^n\times\mu_d)$ equivariantであることを考えれば、次の$A_n/\mathfrak{S}_n$上のmotifの同型を得る。

命題 $\mathcal{H}^{n+1}(R_n, L)(\alpha,\beta,\gamma) \cong \Delta_n^* F(\alpha,\beta,n\gamma)\otimes K(\alpha\gamma,\beta\gamma,\gamma,\phi)$

ここで Δ_n は、$A^n/\mathfrak{S}_n \to \mathbb{Q}(3d)$ なる構造射、$K(\alpha\gamma,\beta\gamma,\gamma,\phi)$ は、$A^n/\mathfrak{S}_n$ 上の Kummer covering S_n の character $(\alpha\gamma,\beta\gamma,\gamma,\phi)$-part に対する motif である。条件から、$F(\alpha,\beta,n\gamma)$ は、pure weight $(n+1)$ の motif である。

系 $H^i(R_n,L)(\alpha,\beta,\gamma)\cong F(\alpha,\beta,n\gamma)\otimes H^{i-(n+1)}(S_n,L)(\alpha\gamma,\beta\gamma,\gamma,\phi)$

なる motif の同型が存在する。

同様の議論を pr_2 に対してもくり返すことにより、

$$H^i(R_n,L)(\alpha,\beta,\gamma)\cong F((n+1)\gamma)\otimes H^{i-n}(S_{n+1},L)(\alpha,\beta,\gamma,\phi)$$

を得る。2つの同型を合わせて命題を得る。

3. q-analog

q-analog については、Askey [A] の論文があるので、それを引用することにして、まず notation を定義しよう。§4については preprint [T] ができているので、参照されたい。

今、$q\in\mathbb{C}$ を、$0<|q|<1$ なる複素数として、$q=\exp(2\pi i\tau)$ を満たす τ を fix する。この τ を fix することにより、任意の実数 α に対して、$q^\alpha=\exp(2\pi i\tau\alpha)$ と定義する。また、$f(x)$ を $\mathbb{C}^\times$ 上の関数とした時、その Jackson integral を下の右辺が収束する時

$$\int_0^r f(x)\,d_qx = r(1-q)\sum_{i=0}^\infty f(rq^i)q^i$$

で定義する。もっと一般に、$\int_{r_1}^{r_2} f(x)\,d_qx=\int_0^{r_2}f(x)\,d_qx-\int^{qr_1}f(x)\,d_qx$

と定義する。任意 $a\in\mathbb{C}$ に対して，$(a)_\infty=\prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ は絶対収束する。また $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，$(a)_\alpha=(a)_\infty/(q^\alpha a)_\infty$ で定義する。α が自然数の時は，これは q の多項式である。Γ-関数の q-analog Γ_q を，$\Gamma_q(\alpha)=\{(q)_\infty/(q^\alpha)_\infty\}\cdot(1-q)^{1-\alpha}$ で定義すると，$q\to1$ の時は，古典的な Γ-関数に収束する。よって，$\alpha\in\mathbb{R}$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$，$\tau=(\tau_i)\in\mathbb{R}^n$ で，$\tau_i-\tau_j\notin\mathbb{Z}\ (i\neq j)$ とする。

q-hypergeometric function $f(\tau,\alpha,\beta,x)$ 及び $F_i(\tau,\alpha,\beta)$ $(i=1,\cdots,n)$ を，

$$f(\tau,\alpha,\beta,x)=x^\alpha\prod_{i=1}^{n}(q^{-\tau_i}x)_{\beta_i},\quad F_i=\int_0^{q^{\tau_i}}f(\tau,\alpha,\beta,x)\,d_qx$$

で定義する。今までの条件のもとで，これは well defined である。これは，$q^{-\tau_i}=y_i$ とおいて，$q\to1$ の時を考えれば，古典的な Appel の hypergeometric function になる。

4.1. q-hypergeometric function の determinant

この章では2種類の determinant を計算しよう。

4.1.1 第一の determinant formula

$$D(\alpha,\beta)=\det\begin{pmatrix}F_1(\tau,\alpha,\beta),&\cdots,&F_1(\tau,\alpha+n-1,\beta)\\ \vdots&&\\ F_n(\tau,\alpha,\beta),&\cdots,&F_n(\tau,\alpha+n-1,\beta)\end{pmatrix}$$

とすると，

定理

$$D(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)\prod_{i=1}^{n}\Gamma_q(\beta_i+1)}{\Gamma_q(\alpha+\sum_{i=1}^{n}\beta_i+n+1)}\prod_{i=1}^{n}q^{(\tau_i+1)(\alpha+1)}\times\prod_{i\neq j}(q^{-\tau_i+\tau_j+1})_{\beta_i}\prod_{i>j}q(q^{\tau_i}-q^{\tau_j}).$$

証明　$F(\tau,\alpha,\beta) = {}^t(F_1(\tau,\alpha,\beta),\cdots,F_n(\tau,\alpha,\beta))$ とおくと、$\sum_{j=0}^{n} m_j F(\alpha+j,\beta)=0$ なる差分方程式を満たすことが Stokes の定理の q-analog から出て来る。ただし、m_j は $\sum_{j=0}^{n} m_j x^j = q^{-\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-\tau_i-1}x) - \prod_{i=1}^{n}(1-q^{-\tau_i+\beta_i}x)$ によって定義される。
今、差分方程式 R_i を $(R_i f)(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta+e_i)$ (ただし、$e_i=(0,\cdots,\overset{i}{1},\cdots,0)$) で定義する。

命題　$$(R_i D)(\alpha,\beta) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(1-q^{\beta_i-\tau_i+\tau_j+1})}{1-q^{\alpha+1}\prod_{j=1}^{n}q^{\beta_j+1}}\, D(\alpha,\beta)$$

証明　左辺は $\det(F(\alpha,\beta)-q^{-\tau_i+\beta_i}F(\alpha+1,\beta),\cdots,F(\alpha+n-1)-q^{-\tau_i+\beta_i}F(\alpha+n,\beta))$ なので、上の差分方程式を使って命題を得る。

上の命題をくり返し使い、

$$D(\alpha,\beta) = \frac{(q^{\alpha+1}\prod_{j=1}^{n}q^{\beta_j+1})_\infty}{\prod_{i,j}(q^{\beta_i-\tau_i+\tau_j+1})_\infty}\, D(\alpha,(\infty,\cdots,\infty))$$

を得る。$\beta=(0,\cdots,0)$ の時に再びこの式を使い、定理を得る。

4.1.2 第二の determinant formula

前節で定義した hypergeometric function に対して、α が整数、β_i が自然数、で、τ_i が全て自然数の時は、やはり hypergeometric function が定義され、また別の determinant formula が成り立つ。β が自然数の時は、被積分関数は x に関する多項式なので、$\tau_i-\tau_j\in\mathbb{Z}$ の時にも、積分は意味がある事に注意する。$y_0,\cdots,y_n\in q^{\mathbb{N}}$ とする。

$$g(y_0, m, x) = x^m \prod_{i=0}^{n} (y_i^{-1} x)_\beta, \quad G_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} g(y_0, m, x)\, d_q x$$

$$D(y_0) = \det \begin{pmatrix} G_0(y_0, 0), \cdots, & G_0(y_0, n-1) \\ \vdots & \\ G_{n-1}(y_0, 0), \cdots, & G\ (y_0, n-1) \end{pmatrix}$$

とおく。2つ目のdeterminant formulaは、

<u>定理</u>

$$D(y_0) = q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\Gamma_q(\beta+1)^{n+1}}{\Gamma_q((n+1)(\beta+1))} \prod_{0 \leqq i \neq j \leqq n} (q y_i^{-1} y_j)_\beta \prod_{n \geqq i > j \geqq 0} (y_i - y_j)$$

<u>証明</u>　今、$\lim_{y_0 \to 0} y_0^\beta G_i(y_0, m) = (-1)^\beta q^{\beta(\beta-1)/2} \int_{y_j}^{y_{j+1}} x^{m+\beta} \prod_{i=1}^{n} (y_i^{-1} x)_\beta d_q x$

を使って、$\lim_{y \to 0} y_0^{n\beta} D(y_0)$ が前節から計算される。$D(y_0)$ と、$D(q y_0)$ の関係は、前節と同様に、Stokesの定理を使い、

$$D(q y_0) \frac{\prod_{1} (1 - q^\beta y_0^{-1} y_j)}{1 - q^{(n+1)(\beta+1)}} (1 - q^{\beta+1}) = D(y_0) \frac{\prod_{0} (1 - q^{-\beta-1} y_0^{-1} y_j)}{1 - q^{-(n+1)(\beta+1)}}$$

で与えられる。これより定理を得る。

<u>4.2. Askey予想の別証について</u>

この章では、ある多変数の被積分関数のJackson integralに関するFubiniの定理を使い、それによって、Selberg integralのinductiveな関係式を与える。まず差積のq-analogを定義し、Askey予想を述べよう。今、$D_n^{(r)}(x)$ を、

$D_n^{(r)}(x) = \Delta_n(x)^2 \cdot \prod_{i \neq j} (q x_i x_j^{-1})_{r-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{(n-1)(r-1)}$ で定義する。
($\Delta_n(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$ である)

$\delta_n = \{ 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1 \mid x_i \in q^{\mathbb{Z}} \}$ として、Selberg integralの

q-analog を

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma)=\int_{S_n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n}(qx_i)_{\beta-1}D_n^{(\gamma)}(x)\,d_qx$$

で定義する。

<u>定理</u>（Askey 予想, Kadell, Habsieger）

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma)=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\Gamma_q(\alpha+i\gamma)\Gamma_q(\beta+i\gamma)\Gamma_q((n-i)\gamma)}{\Gamma_q(\gamma)\Gamma_q(\alpha+\beta+(n-1+i)\gamma)}\,q^{\mu(\alpha,\gamma,n)}\cdot(-1)^{n(n-1)\gamma/2}$$

が成り立つ。ここで．μは次の式で与えられる。

$$\mu(\alpha,\gamma,n)=\gamma^2n(n-1)(n-2)/3+\gamma(\gamma-1)n(n-1)/4+\alpha\gamma n(n-1)/2$$

さて．この定理の証明に用いられる被積分関数，及び積分領域であるが，それは次の $I(x,y)$ 及び D で与えられる。

$$I(x,y)=\Delta_{n+1}(y)\Delta_n(x)\prod_{i=0}^{n}y_i^{\alpha-1}\prod_{j=1}^{n}x_j^{(n+1)(\gamma-1)}$$
$$\prod_{i=0}^{n}(qy_i)_{\beta-1}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=0}^{n}(q^{2-\gamma}x_j^{-1}y_i)_{\gamma-1}$$

$$D=\{0\leqq y_0\leqq x_1\leqq y_1\leqq\cdots\leqq x_n\leqq y_n\leqq 1\mid x_i,y_j\in q^{\mathbb{Z}}\}$$

積分 $\int_D I(x,y)\,d_qx\,d_qy$ を次の2通りの仕方で求める。(多変数の Jackson integral とは．単に．$d_qx_1,\cdots,d_qx_n,d_qy_0,\cdots d_qy_n$ の積測度で与えられたものと考える。)

(1) $$\int_{S_n}\left\{\int_{D(x)}I(x,y)\,d_qy\right\}d_qx$$

$$D(x)=[0,x_1]\times[x_1,x_2]\times\cdots\times[x_n,1]$$

$$S_n=\{0\leqq x_1\leqq\cdots\leqq x_n\leqq 1\mid x_i\in q^{\mathbb{Z}}\}$$

(2) $\displaystyle\int_{S_{n+1}} \left\{ \int_{D(y)} I(x,y)\, d_q x \right\} d_q y$

$D(y) = [y_0, y_1] \times \cdots \times [y_{n-1}, y_n]$,

$S_{n+1} = \{ 0 \leq y_0 \leq y_1 \cdots \leq y_n \leq 1 \mid y_i \in q^{\mathbb{Z}} \}$

(1), (2) 共に、まず内側の積分から計算するが、それには 4.1 で求めた determinant の結果が使われる。紙面の都合上、ここでは (1) の内側の積分の計算のみをすることにしよう。

$$\int_{D(x)} I(x,y)\, d_q y = \Delta_n(x) \prod_{j=1}^{n} x_j^{(n+1)(\gamma-1)} \times A \text{ 、ここで、}$$

$$A = \int_{[0,x_1]\times\cdots\times[x_n,1]} \Delta_{n+1}(y) \prod_{i=0}^{n} y_i^{\alpha-1} \prod_{i=0}^{n} (q y_i)_{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=0}^{n} (q^{2-\gamma} x_j^{-1} y_i)_{\gamma-1}\, d_q y$$

となる。今後簡単のため、$x_0 = 0$、$x_{n+1} = 1$ と書き、$\{0, \cdots, n\}$ の置換を $\mathfrak{S}_{n+1}$ と書く。

$$A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{n} \int_{[x_i, x_{i+1}]} y^{\sigma_i + \alpha - 1} (q y)_{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} (q^{2-\gamma} x_j^{-1} y)_{\gamma-1}\, d_q y$$

$$= \det \left(\int_{[x_i, x_{i+1}]} y^{k+\alpha-1} (q y)_{\beta-1} \prod_{j=1}^{n} (q^{2-\gamma} x_j^{-1} y)_{\gamma-1}\, d_q y \right)_{i,k} .$$

となる。$(q^{2-\gamma} x_j^{-1} y)_{\gamma-1}$ は、$y = x_j, q x_j, \cdots, q^{\gamma-2} x_j$ で $(j = 1, \cdots, n)$ 0 であり、$(q y)_{\beta-1}$ は $y = q^{-1}$ で 0 なので、積分区間 $[0, x_1], \cdots, [x_i, x_{i+1}]$ $\cdots [x_n, 1]$ はそれぞれ $[0, q^{\gamma-2} x_1], \cdots, [q^{\gamma-2} x_i, q^{\gamma-2} x_{i+1}], \cdots, [q^{\gamma-2} x_n, q^{-1}]$ でとりかえてかまわない。そこで、前節の determinant の公式を使えば、

$$A = D(\tau, \alpha-1, (\gamma-1, \cdots, \gamma-1, \beta-1))$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)^n}{\Gamma(\alpha+\beta+n\gamma)} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-\gamma+1} \prod_{i=1}^n (x_i)_{\beta+\gamma-1} \prod_{i\neq j} (qx_ix_j^{-1})_{\gamma-1}$$

$$(-1)^{n(\gamma-1)} q^{K_1}, \qquad K_1 = n\alpha(\gamma-1) + n(n-1)(\gamma-1)/2 - n(\gamma-1)(\gamma-2)/2$$

となる。ゆえに(1)の積分は、Selberg integral を用いて、

$$\int_D I(x,y)\, d_qy\, d_qx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)^n}{\Gamma(\alpha+\beta+n\gamma)} (-1)^{n(\gamma-1)} q^{K_1+K_2} S_n(\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \gamma)$$

となる。ここで $K_2 = n(\alpha+\gamma-1) + n(n-1)(\gamma-1) + n^2$. (2)の積分も同様であるが、二番目の determinat formula を使うことろが異なる。結果として、(2)の表現は、

$$\int_D I(x,y)\, d_qx\, d_qy = \frac{\Gamma_q(\gamma)^{n+1}}{\Gamma_q((n+1)\gamma)} \cdot q^{K_3}\ S_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$K_3 = -n(n+1)(\gamma-1)(\gamma-2)/2 + n(n+1)/2$$

を得て、上の二つの式を比較して、Selberg integral に関する inductive な式を得る。

References [A] Askey, Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM. J. Math Anal., 18 (1987) pp. 938–951

[T] T: Determinants of q-hypergeometric functions and another proof of Askey conjecture. (preprint)