数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 88-100

On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials

大阪大学教養部 伊吹山 知義 (Tomoyoshi IBUKIYAMA)

保型形式に作用する偏微分作用素としては、目的に応じて様々なものが考えられている。ここでは、次のような問題を考える。
「Dを有界対称領域、ΔをDに含まれる有界対称領域とする。D上の函数Fに作用する定係数正則線型偏微分作用素$\mathcal{D}$で もしFが保型形式なら、$\mathcal{D}(F)$ のΔへの制限も保型形式となるような$\mathcal{D}$ は何か？」
このような作用素は、部分的には Cohen, Eichler-Zagier, Satoh, Böcherer-Satoh-Yamazaki 等により考えられているし、また、Gross-Kohnen-Zagier による Birch-Swinnerton-Dyer 予想に関する論文では Cohen の定義した作用素が用いられている。実際にはここで述べる結果は、「上のような作用素は Green 函数や算術的交点理論と関係するはずで面白そうだ」という Zagier の見解を直接の動機としてなされた。Zagier

は．Dが上半平面3個の直積で保型形式の重さが$(2, 2, 2)$のとき．上のようになりそうな微分作用素の候補をあげ，その候補の非常に詳しい具体形を与えているが，その本質を，定式化し一般化するということは行われていなかった。ここではコンパクト群の表現という視点から．D，Δがsymplectic typeのとき，上のような$\mathfrak{D}$を統一的に扱う。この結果は．作用素の具体形を求めるのにも適していて．上に述べた先人たちの結果をすべて具体的なレベルで再証明できる。また．古典的なLegendre多項式やGegenbauer多項式を含む，より広いクラスの（多変数）多項式が，$\mathfrak{D}$の特徴づけに現れ，いくつかの場合は多変数の直交多項式系を与え．それらの母函数も求められる。古典的なLegendre微分方程式の拡張として．上記のような多項式を解にもつ具体的にrankのわかる微分方程式系（パッフ系）も現れ．その点でも興味深い。（ここで解の展開係数はかなり複雑であり．多変数超幾何級数のような単純な形ではない。）

§1．領域のとり方

n次のSiegel上半空間をH_nと書く。(D, Δ)の組として次の2つの場合を考える。

(1) $D = H_n$, $\Delta = H_{n_1} \times \cdots \times H_{n_r}$

$$(n = n_1 + \cdots + n_r)$$

ここでΔは自然にDの対角線にうめこんでおく。

(2) $D=(H_n)^r$, $\Delta=H_n$

ここでΔは diagonal embedding によりDにうめこむ。この2つの場合はある意味で双対的であって、以下では紙数の関係もあり、場合(1)のみ説明する。(場合(2)は preprint にゆずる。)さて、H_n の元 $Z=(z_{ij})$ $(1\leqq i,j\leqq n)$ に対し、

$$\frac{\partial}{\partial Z}=\left(\frac{1+\delta_{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\right)_{1\leqq i,j\leqq n}$$

と書く。Yをn次対称行列とすると、場合(1)では、該当する微分作用素 $\mathcal{D}$ は、Yの成分を変数とするある複素係数の多項式 $Q(Y)$ により、$\mathcal{D}=Q\left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)$ と書けるので、問題は、このQを与えることである。実際はベクトル値の保型形式も考えたいので、Qはベクトル値の多項式写像を考える。

§2. 不変調和多項式

この節では、Qの候補について解説する。今、n, n_i $(1\leqq i\leqq r)$ を場合(1)のようにとり、$GL_{n_1}(\mathbb{C})\times\cdots\times GL_{n_r}(\mathbb{C})$ の既約表現 $\tau=\tau_1\otimes\cdots\otimes\tau_r$ を1つ固定する。(但し τ_i は $GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の既約表現) 次に $d\geqq n$ となる自然数 d をとり $O(d)$ で d 次の直交群をあらわす。$M_{n_i,d}(\mathbb{C})$ の変数を X_i と書き、τの表現空間を V とする。以上の記号のもとで次の3つの性質をみたす $M_{n_1,d}(\mathbb{C})\times\cdots\times M_{n_r,d}(\mathbb{C})$ から、

Vへの多項式写像Pを考える。

(1) $P(X_1,\cdots,X_r)$は各X_iについて pluri-harmonic

(2) $P(a_1X_1,\cdots,a_rX_r)=(\tau_1(a_1)\otimes\cdots\otimes\tau_r(a_r))P(X_1,\cdots,X_r)$

$$a_i\in GL_{n_i}(\mathbb{C}),\quad 1\leqq i\leqq r$$

(3) $P(X_1g,\cdots,X_rg)=P(X_1,\cdots,X_r)\qquad(g\in O(d))$

但しここで pluri-harmonic というのは，$X_i=(x^{(i)}_{kp})$ とおくとき，

$$\sum_{p=1}^{d}\frac{\partial^2 P}{\partial x^{(i)}_{kp}\partial x^{(i)}_{lp}}=0\qquad\text{for all } k,l\ (1\leqq k,l\leqq n)$$

という意味である。上の(1)～(3)を満たすPの集合を$\mathcal{H}^{inv}$と書き，その元を invariant pluri-harmonic polynomial map と呼ぶことにしよう。$\mathcal{H}^{inv}$は勿論n,r,n_i,τのとり方による。$\mathcal{H}^{inv}$はかなり特別なτに対してのみ$\{0\}$と異なるし，また，$\mathcal{H}^{inv}\neq\{0\}$でも$\mathcal{H}^{inv}$は$\mathbb{C}$上1次元とは限らない。しかし，$\mathcal{H}^{inv}$がどの$\tau$に対し何次元あるかを知ることは，少くとも原理的には可能である。その手続は大体次の通りである。一般に行列環$M_{l,m}(\mathbb{C})$上の pluri-harmonic polynomials には群$GL_l\times O(m)$が $P(X)\to P(aXg)$ $(a\in GL_l,\ g\in O(m))$ により作用するが，この作用の既約分解は，Kashiwara-Vergne によりわかっている。さて，上の条件のうち(1),(2)をみたすP全体の集合を$\mathcal{H}$とかくと$\mathcal{H}\supset\mathcal{H}^{inv}$であるが，

$\mathcal{H}$ には群 $O(d)^r$ が

$$p(X_1,\cdots,X_r) \to p(X_1 g_1,\cdots,X_r g_r) \qquad (g_i \in O(d),\ 1 \leqq i \leqq r)$$

と作用している。この作用が何であるかは，τ に応じて，Kashiwara - Vergne 理論により求められる。この $O(d)^r$ の表現を λ とすれば，$\mathcal{H}^{inv}$ は λ を $O(d)^r$ の対角成分

$\Delta(O(d)) = \{(g,g,\cdots,g) \in O(d)^r\}$ に制限したときの，単位表現に対応する成分であり，$\mathcal{H}^{inv}$ の次元は，この単位表現の重複度であり，これは通常の表現論から原理的には求まる量である。具体的な場合については後でもう1度ふれる。

§3. 微分作用素についての結果

序文の問題で述べた $\mathcal{D}$ が $\mathcal{H}^{inv}$ から得られるというのが，大体の結論であるが，正確に述べるために少し記号を準備する。前と同様 $n = n_1 + \cdots + n_r$ とする。一般に $Sp(m, \mathbb{R})$ で size $2m$ の実シンプレクティック群をあらわし，

$$G = Sp(n_1, \mathbb{R}) \times \cdots \times Sp(n_r, \mathbb{R})$$

とおく。G を $Sp(n, \mathbb{R})$ に，

$$G \ni \left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & & 0 & B_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & A_r & 0 & & B_r \\ C_1 & & 0 & D_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & C_r & 0 & & D_r \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$$

でうめこみ，この像も G と書くことにする。さて，$GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{n_r}(\mathbb{C})$ の表現 (τ, V) と，$H_{n_1} \times \cdots \times H_{n_r}$

の元 $Z=(Z_1,\cdots,Z_r)$ 及び G の元 $g=\left(\begin{pmatrix}A_1, B_1\\ C_1, D_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}A_r & B_r\\ C_r, & D_r\end{pmatrix}\right)$ に対し.

$$j_\tau(g,Z)=\tau_1(C_1Z_1+D_1)\otimes\cdots\otimes\tau_r(C_rZ_r+D_r)$$

と書く。(但し $\tau=\tau_1\otimes\cdots\otimes\tau_r$) 更に. $H_{n_1}\times\cdots\times H_{n_r}$ 上の V-valued function F に対し.

$$(F|_\tau[g])(Z)={}^t j_\tau(g,Z)^{-1}F(gZ)$$

とおく。特に. $r=1$, $n=n_1$ で $\tau=\det^k$ ならば. 通常の記号通り $F|_\tau[g]$ のかわりに $F|_k[g]$ とかく。

さて n, n_i $(1\leqq i\leqq r)$ を固定し. 偶数なる $d\geqq n$ を選び $d=2k$ とかく。これらに対し. 前節のように $\mathcal{H}^{inv}$ を考えたいのだが. どの τ に対して $\mathcal{H}^{inv}\neq\{0\}$ となるかは表現論の問題であるので. 一応別の問題として扱うこととし. ある τ に対して $\mathcal{H}^{inv}\neq\{0\}$ と仮定する。以下この節では. このような τ を固定する。$\mathcal{H}^{inv}$ の定義の条件(3) と仮定 $d\geqq n$ により. H. Weyl の不変式に関する結果を用いると任意の $P\in\mathcal{H}^{inv}$ に対し. n 次対称行列の各成分を変数とする多項式 Q が存在して

$$P(x_1,\cdots,x_r)=Q(X\,{}^tX)$$

とかける。但しここで

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}$$ とおいた。

このような Q に対し $\mathcal{D} = Q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ とおく。すると

<u>定理</u>. 仮定を上の通りとし、H_n 上の V-valued C^∞-function F をとると、任意の $g \in G$ に対し、

$$(\mathcal{D}F)\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_r \end{pmatrix}\Bigg|_{\tau_1' \otimes \cdots \otimes \tau_r'}[g] = \mathcal{D}(F|_k[g])\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_r \end{pmatrix}$$

となる。

ここで $\tau = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ に対し、$\tau_i' = \tau_i \otimes \det^k$ $\left(k = \frac{d}{2}\right)$

とおいた。

つまり文章で簡単に言えば、$\mathcal{D}$の作用と Gの作用が、Δへ制限すれば可換になるということであり、これにより保型性は保たれることがわかる。つまり、

<u>系</u> Γ を $Sp(n, \mathbb{R})$ の covolume finite な離散群とし、Fを H_n 上のΓに関する重さ kの保型形式とすると、$\mathcal{D}F$ の $H_{n_1} \times \cdots \times H_{n_r}$ への制限は、$\Gamma \cap G$ の重さ $\tau_1' \otimes \cdots \otimes \tau_r'$ の保型形式である。

以上の結果で、kを整数（dを偶数）とすべき理由は特になく、kが半整数でも当然よいはずだが、怠慢のためまだ

やっていない。証明は本質的には Weil 表現の公式によるが $d \geqq n$ なる仮定も用いている。

§4. 微分作用素の具体形.

いつ $\mathcal{H}^{inv} \neq \{0\}$ になるかは、$r=2$ なら簡単にわかるし、他にもいろいろわかる場合があるが、ここでは、$n=3, r=3$ $n_1=n_2=n_3=1$ の場合をとりあげる。$d \geqq 4$ とし、d は偶数とは仮定しない。$d=2\kappa$ とおく。（κ は半整数ないし整数）$\mathcal{H}^{inv}$ の定義をもう1度今の場合に書くと、次のように書ける。$x, y, z \in \mathbb{R}^d$ として、

(1) $P(x,y,z)$ は、x, y, z それぞれについて harmonic である。

(2) $P(x,y,z)$ は x, y, z それぞれについて斉次多項式である。（次数を以下では $a_1, a_2, a_3 \geqq 0$ とかく。）

(3) $P(xg, yg, zg) = P(x,y,z)$ $\quad (\forall g \in SO(d))$ である。

以上の (1), (2) を満たす多項式（$3d$ 変数）の全体は、実際は $SO(d)^3$ の表現空間であり、次数 a_1, a_2, a_3 の $SO(d)$ のいわゆる球表現のテンソル積を与えている。条件 (3) は、これを diagonal に制限した時の単位表現の成分を与える条件であり、簡単な計算により、$\mathcal{H}^{inv} \neq \{0\}$ となるのは

$$a_1 = \nu_2+\nu_3, \quad a_2 = \nu_3+\nu_1, \quad a_3 = \nu_1+\nu_2 \qquad (\nu_i \geqq 0)$$

となる ν_i（整数）の存在が必要十分であることがわかる。しかもこの時、$\dim \mathcal{H}^{inv}=1$ である。実は $n=2$, $r=2$ で $\mathcal{H}^{inv}$ を考えると、これは Legendre ないし Gegenbauer polynomials からなっているので、$n=3$ では、どうなるかに興味がある。ν_1, ν_2, ν_3 に応じて $\mathcal{H}^{inv}=\mathcal{H}^{inv}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ と書こう。各 $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ に対して $\mathcal{H}^{inv}(\nu)$ の基底を与える母函数を求めることができる。すなわち、$\mathbb{R}^d$ の普通の内積を $(\ ,\ )$ であらわし、$m_1=(x,x)$, $m_2=(y,y)$, $m_3=(z,z)$, $r_1=(y,z)$, $r_2=(z,x)$, $r_3=(x,y)$ とおく。また X_1, X_2, X_3 を独立変数として

$$\Delta_0 = 1 - r_1X_1 - r_2X_2 - r_3X_3 + r_1m_1X_2X_3 + r_2m_2X_3X_1 + r_3m_3X_1X_2 + m_1m_2X_3^2 + m_2m_3X_1^2 + m_3m_1X_2^2$$

$$d(T) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 2m_1 & r_3 & r_2 \\ r_3 & 2m_2 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 2m_3 \end{pmatrix}$$

とおく。また、

$$R = \frac{1}{2}\left(\Delta_0 + \sqrt{\Delta_0^2 - 4d(T)X_1X_2X_3}\right)$$

とおく。$X_1=X_2=X_3=0$ のまわりでの展開、

$$\frac{1}{R^{d-2}\sqrt{\Delta_0^2 - 4d(T)X_1X_2X_3}} = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=0}^{\infty} P_{\nu_1\nu_2\nu_3}(T)\, X_1^{\nu_1}X_2^{\nu_2}X_3^{\nu_3}$$

により $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ を定義する。すると

<u>定理</u>　$P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{inv}}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ の（定数倍を除いて唯1つの）0でない元を与える。

つまり前頁の式が母函数を与えているわけである。なおこの母函数は $k=2$ の時は Zagier による。$P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ は、もともと x, y, z の（各成分の）多項式だが、m_i, r_i の多項式でもある。今 $\xi_1 = \dfrac{r_1}{2\sqrt{m_2m_3}}$, $\xi_2 = \dfrac{r_2}{2\sqrt{m_3m_1}}$, $\xi_3 = \dfrac{r_3}{2\sqrt{m_1m_2}}$ とおけば、

$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x,y,z) = m_1^{\frac{(\nu_2+\nu_3)}{2}} m_2^{\frac{\nu_3+\nu_1}{2}} m_3^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

となる3変数多項式 $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ が存在するのが容易にわかる。実はこれが本来の Legendre 多項式の類似物である。これの直交多項式系としての意味をつけよう。

$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 1 & \xi_1 \\ \xi_2 & \xi_1 & 1 \end{pmatrix} > 0, \ \xi_i \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく。ここで >0 は、行列が正定値であることを示す。$d\xi_i$ で通常の Lebesgue measure をあらわす。

<u>定理</u>　$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$　$(\nu_1,\nu_2,\nu_3=0,1,2,\cdots)$ は、D_3 上の measure $(1-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2+2\xi_1\xi_2\xi_3)^{k-2}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ に関する L^2 空間の完備直交系を与える。

§5. パッフ系

記号を前節の通りとする。$P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ が x, y, z それぞれについて harmonic という条件は、"radial part" をとれば、r_i, m_i の微分方程式になり、更に $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ を解にもつ微分方程式を導く。これが Legendre 微分方程式の類似である。これを書き下すと次の3連立偏微分方程式系となる。

$$(1-\xi_i^2)\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi_i^2}+(1-\xi_{i+1}^2)\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi_{i+1}^2}+2(\xi_{i+2}-\xi_i\xi_{i+1})\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi_i \partial \xi_{i+1}}$$

$$-(d-1)\left(\xi_i\frac{\partial Q}{\partial \xi_i}+\xi_{i+1}\frac{\partial Q}{\partial \xi_{i+1}}\right)+(\nu_i+\nu_{i+1})(\nu_i+\nu_{i+1}+d-2)Q=0$$

($i=1, 2, 3$. また index は mod 3 で考える。)

ここで d はもともとは x, y, z の size (直交群の次数) であり、ν_i は表現から決まる整数であったが、以下では d, ν_1, ν_2, ν_3 は任意の複素数とする。

<u>定理.</u> 上の偏微分方程式系は、rank がちょうど 8 のパッフ系と同値であり、特異点以外では (局所的に) 8次元の正則解を持つ。(d, ν_i は任意)

§6. あとがき

作用素$\mathcal{D}$は、(特に具体的に与えた場合) 正則保型形式から新しい正則保型形式を作る等、いろいろな利用法があるであろう。また§4, 5 のような結果を、一般の場合に完全に具体的にやりとげられれば、かなり面白いのではと思う。しかし、最も興味を感ずるのは、§5のパッフ系の解のうちで多項式にならないものである。Gross-Kohnen-Zagierでは、第2種Legendre函数が、かなり不思議な感じで登場し、その数学的な意味はよくわかっていない。§5のcaseは、非多項式解が7次元あるわけで、これらの保型形式論で占める位置は何であるか、今の所よくわからない。

文献

[1] Böcherer-Satoh-Yamazaki, On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series, preprint

[2] H. Cohen, Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Ann. 217, 271-285

[3] Eichler-Zagier, Theory of Jacobi forms, Birkhäuser 1985

[4] T. Ibukiyama, On invariant harmonic polynomials on polyspheres and some related differential equations, preprint

[5] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials, preprint

[6] T. Satoh, On certain vector valued Siegel modular forms of degree two, Math. Ann 274, 335-352

[7] D. B. Zagier, Spherical polynomials on $GL(2)\backslash GL(2)^3/GL(2)$, preprint