数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 106-118

On zero-manifold of theta function of two variables and its application to arithmetic

法政大工 平松豊一 (Toyokazu Hiramatsu)
神戸大自然 奥本龍郎 (Tatsuo Okumoto)

§1. 結果

k を実2次体とし，$\mathcal{O}_k$ をその整数環とする．$\mathcal{O}_k$ の総正な元を $\mathcal{O}_k$ 内で s 個の平方の和として表現する表現個数の問題を考える：

$$r_s(\mu) = \#\{\mu = x_1^2 + \cdots + x_s^2 \; : \; \mu \succ 0\}.$$

以下，$s = 3, 4$ とする．歴史的には，$k = \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 等が Götzky, Maass, Siegel, Dzewas, Cohn 等によって研究された．イデアル (2) の分解の仕方は

(1) $(2) = \mathfrak{p}$，(2) $(2) = \mathfrak{p}^2$，(3) $(2) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$

の3通りあるが，$\sqrt{5}$ では case (1) が，$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ では case (2) がおこる．そこで，ここでは case (3) の代表例として

$$k = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$$

を扱う．方法は，2次形式における Siegel の公式を使用せず，Jacobi - Mordell の方法に従う．結果は次の通りである：

1. $s=3$ の場合. この場合は, principal genus $[x_1^2+x_2^2+x_3^2]$ は類数 1 で, Siegel の公式を書き下すことによって $r_3(\mu)$ を得る (Dzewas). しかし, ここでは Cohn ([1]) と同じ手法をとる.

記号: $\mu > 0$

$K = k(\sqrt{-\mu})$

$h(\sqrt{17}, \sqrt{-\mu})$: K の類数

w : K 内の 1 の巾根の個数

$\delta_{K/k}$: K/k の相対判別式

定理 1. μ は, 2 の各素因数 γ に対し, $\left(\frac{-\mu}{\gamma}\right)_2 \neq 1$ をみたすものとする. そのとき,

$$r_3(\mu) = \frac{64}{3w} h(\sqrt{17}, \sqrt{-\mu}) N(\mu/\delta_{K/k})^{\frac{1}{2}} \prod_{\gamma|2} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{-\mu}{\gamma}\right)_2\right)$$
$$\times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\mu}{\gamma}\right)_2 - \left(\frac{-\mu}{\gamma}\right)_2^2\right),$$

ここで, $\left(\frac{-\mu}{\gamma}\right)_2$ は有理指標 $\left(\frac{p}{2}\right)$ に類似な指標を表す.

2. $s=4$ の場合. このとき, principal genus $[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2]$ の類数は 3 である. その代表は Kneser の方法 ([4]) で求まり, 次のようである:

$$Q_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

$$Q_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \pi x_3^2 + \bar{\pi} x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_3x_4)$$
$$+ 2(x_1+x_2)(\pi x_3 + \bar{\pi} x_4),$$

$$Q_3 = \pi x_1^2 + \bar{\pi} x_2^2 + 2x_1x_2 + \pi x_3^2 + \bar{\pi} x_4^2 + 2x_3x_4 .$$

ここで，$\pi\bar{\pi} = 2$，$\pi = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$，$\bar{\pi} = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ とする．

$\mu \succ 0$ に対し，

$$r_{4i}(\mu) = \#\{ (x_1, \cdots, x_4) \in \mathcal{O}_k^4 : Q_i(x_1, \cdots, x_4) = \mu \}$$

とおく．Siegel の公式は，表現数 r_{4i} ($i = 1, 2, 3$) の重み付き平均を与えるのみである．我々は，各 r_{4i} を扱う：

$$B(\mu) = \frac{4\,\delta(\mu)}{3} \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})$$

とおく．ここで，和はイデアル (μ) を割る odd ideals をわたるものとする．また，

$$\delta(\mu) = \begin{cases} 1 & (2, \mu) = 1 \\ 3 & \pi \mid \mu,\ \bar{\pi} \nmid \mu \text{ or } \pi \nmid \mu,\ \bar{\pi} \mid \mu \\ 9 & 2 \mid \mu . \end{cases}$$

定理 2．各 r_{4i} は次で与えられる：

$$r_{41}(\mu) = B(\mu) + L(\mu),$$

$$r_{42}(\mu) = B(\mu) + \tfrac{1}{2} L(\mu),$$

$$r_{43}(\mu) = B(\mu) - \tfrac{2}{3} L(\mu).$$

ここで，$L(\mu)$ はある種の error function を表す．

§2. Gundlach's imbedding and zero-manifolds of theta functions

まず，Gundlach's imbedding（[2]）を述べる．実2次体 k に対し，Hammond's imbedding は複素上半平面 $\mathfrak{H}_+$ の直積 $\mathfrak{H}_+\times\mathfrak{H}_+$ の埋込みであるが，Gundlach のは $\mathfrak{H}_+$ と複素下半平面 $\mathfrak{H}_-$ の直積 $\mathfrak{H}_+\times\mathfrak{H}_-$ の埋込みである．

実2次体 k の整数環を $\mathfrak{o}_k=\mathfrak{o}$，$d_k$ を k の判別式，$\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{o}$-ideal とし，

$$\Gamma(\mathfrak{o},\mathfrak{c})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix} : \alpha,\delta\in\mathfrak{o},\ \beta\in\mathfrak{c},\ \gamma\in\mathfrak{c}^{-1},\ \alpha\delta-\beta\gamma=1\right\}$$

とおく．$\Gamma(\mathfrak{o},\mathfrak{o})=SL(2,\mathfrak{o})$ である．次に，$k\ni\nu$ の共役を $\nu^{(i)}$ $(i=1,2)$ とし

$$\tilde{\nu}=\begin{pmatrix}\nu^{(1)}&\\ &\nu^{(2)}\end{pmatrix}$$

とおく．$L=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL(2,k)$ に対し

$$\tilde{L}=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}&\tilde{\beta}\\ \tilde{\gamma}&\tilde{\delta}\end{pmatrix}\in Sp(2,\mathbb{R}).$$

$\{\omega_1,\omega_2\}$ を k の integer basis として

$$W=\begin{pmatrix}\omega_1^{(1)}&\omega_1^{(2)}\\ \omega_2^{(1)}&\omega_2^{(2)}\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}W&0\\ 0&{}^tW^{-1}\end{pmatrix}\in Sp(2,\mathbb{R}).$$

さて，$\mathfrak{H}_2$ を degree 2 の Siegel 上半平面とするとき，

$$z=(z_1,z_2)\in\mathfrak{H}_+\times\mathfrak{H}_-\longrightarrow\Psi(z)=\begin{pmatrix}\mathrm{tr}\left(\frac{\omega_1^2}{\sqrt{d_k}}z\right)&\mathrm{tr}\left(\frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{d_k}}z\right)\\ \mathrm{tr}\left(\frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{d_k}}z\right)&\mathrm{tr}\left(\frac{\omega_2^2}{\sqrt{d_k}}z\right)\end{pmatrix}\in\mathfrak{H}_2;$$

また，$\mathfrak{d}$ を k の差積として

$$L=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in\Gamma(\mathfrak{o},\mathfrak{d}^{-1})\longrightarrow\Phi(L)=M\tilde{L}M^{-1}=\begin{pmatrix}W\tilde{\alpha}W^{-1}&W\tilde{\beta}\,{}^tW\\ {}^tW^{-1}\tilde{\gamma}W^{-1}&{}^tW^{-1}\tilde{\delta}W\end{pmatrix}\in Sp(2,\mathbb{Z}).$$

この組 (Φ, Ψ) を k に関する Gundlach's modular imbedding と呼ぶ.

注. $d_k \equiv 1 \bmod 4$ なら, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{d_k})$. また, $d_k \equiv 0 \bmod 4$ なら, $d_k = 4\tilde{d}_k$ として $\omega_1 = -\sqrt{\tilde{d}_k}$, $\omega_2 = 1$.

次に, zero-manifolds of theta functions :

$$A, B, C, D, E \in \mathbb{Z}, \quad (A, B, C, D, E) = 1$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2$$

$$R(A, B, C, D, E; Z) = Az_1 + Bz_2 + Cz_3 + D(z_2^2 - z_1 z_3) + E$$

とする.

$$U(A, B, C, D, E; Z) = \{ Z : R(A, B, C, D, E; Z) = 0 \}$$

を singular relation $R = 0$ の zero-manifold と云い,

$$I(A, B, C, D, E) = B^2 - 4AC - 4DE$$

をその不変量と云う.

例 1. $d_k = 4\tilde{d}_k$ のとき,

$$\Psi(\mathfrak{H}_+ \times \mathfrak{H}_-) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2 : z_1 - \tilde{d}_k z_3 = 0 \right\}$$

$$= U(1, 0, -\tilde{d}_k, 0, 0; Z).$$

$$I(1, 0, -\tilde{d}_k, 0, 0) = \tilde{d}_k.$$

例 2. Diagonal of $\mathfrak{H}_2$:

$$\Delta = \left\{ Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2 : z_2 = 0 \right\}$$

$$= U(0,1,0,0,0;Z),$$

$$I(0,1,0,0,0) = 1.$$

さて，ここでテータ関数を導入する：

$$\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{g}} e^{\pi\sqrt{-1}\,(Z[\mathfrak{g}+\frac{1}{2}\mathfrak{a}] + {}^t\mathfrak{b}\mathfrak{g})};$$

ここで，$\mathfrak{a} = \binom{a_1}{a_2}$，$\mathfrak{b} = \binom{b_1}{b_2}$，$\mathfrak{g} \in \mathbb{Z}^2$，$Z[x] = {}^t x Z x$.

$$\textcircled{H}(Z) = \prod_{\substack{\mathfrak{a},\mathfrak{b} \bmod 2 \\ {}^t\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv 0 \bmod 2}} \vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

とおく．Gundlach's imbedding により，

$$\alpha = a_1\omega_1 + a_2\omega_2, \quad \beta = b_1\omega_1 + b_2\omega_2$$

$$(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \equiv 0 \bmod 2)$$

として，

$$\vartheta(z;\alpha,\beta) = \sum_{\nu\in\mathcal{O}_k} (-1)^{tr(\frac{\beta}{\sqrt{d_k}}\nu)}\, e^{\pi\sqrt{-1}\,tr(\frac{1}{\sqrt{d_k}}(\nu+\frac{\alpha}{2})^2 z)},$$

$$\textcircled{H}(\psi(z)) = \widetilde{\textcircled{H}}(z) = \prod_{\alpha,\beta} \vartheta(z;\alpha,\beta).$$

これらに対して，次の定理が成立する．

定理 A（Hecke - Freitag）．

1）$\textcircled{H}(Z)$ は $Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する重さ 5 の modular form である．

2）$\textcircled{H}(Z)$ の zero-manifold U は不変量 1 をもち，$Z_0 \in$

Uの近傍で,

$$\textcircled{H}(Z) = R(A, B, C, D, E; Z)\cdot(\text{巾級数}, \neq 0 \text{ at } Z_0).$$

定理B(Gundlach). 1) kの類数は1とする. また,

σ : $z = (z_1, z_2) \longrightarrow -z^* = (-z_2, -z_1)$ とし

$$\hat{\Gamma}_{(1,-1)} = \langle SL_2(\mathcal{O}), \sigma \rangle$$

とおく. そのとき,

$$\mathfrak{U}^*_\lambda = \left\{ z \in \mathfrak{H}_+ \times \mathfrak{H}_- : tr\left(\frac{\lambda}{\sqrt{d_k}} z\right) = 0 \right\}$$

が $\textcircled{H}(\psi(z))$ の $\hat{\Gamma}_{(1,-1)}$ - ineq. zero-manifolds の完全系を与える.

2) 更に, λについては, 例えば kの基本単数のノルムが -1 ならば次で与えられる:

(1) $d_k = 4\tilde{d}_k$ のとき, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $m^2 < \tilde{d}_k$ に対し,

$$\lambda = \zeta_m = m + \sqrt{\tilde{d}_k};$$

(2) $4 \nmid d_k$ のとき, $u \in \mathbb{Z}^+$, u : odd, $u^2 < d_k$ に対し,

$$\lambda = \zeta_u = \frac{1}{2}(u + \sqrt{d_k});$$

(3) (1)の ζ_m に対しては, $s \in \mathbb{Z}$, $s^2 | N(\zeta_m)$ なる s と,

$N(\lambda_1) = N(\zeta_m)/s^2$ なる λ_1 の積

$$\lambda = s\lambda_1;$$

(2)の ζ_u に対しては, $\zeta_u = \lambda_0^2\lambda_1$, $N(\lambda_0) = s$ なる s, λ_1 で

$$\lambda = s\lambda_1.$$

3) $\tilde{\textcircled{H}}(z)$ は $\hat{\Gamma}_{(1,-1)}$ に関する重さ5の modular form

である.

例3. $d_k = 5$. $\widetilde{\Theta}(z)$ の zero-manifold mod $\hat{\Gamma}(2,-2)$ は

$$\mathfrak{N}^*_{\xi_1} \quad (\xi_1 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}))$$

唯一つである.

例4. $d_k = 4\tilde{d}_k$ のとき:

$$\begin{cases} \mathfrak{N}^*_{\xi_0} \text{ 及び } \mathfrak{N}^*_{\xi_1} \quad (\xi_0 = \sqrt{2},\ \xi_1 = 1+\sqrt{2}), & \text{if } \tilde{d}_k = 2, \\ \mathfrak{N}^*_{\xi_0} \text{ 及び } \mathfrak{N}^*_{\xi_1} \quad (\xi_0 = \sqrt{3},\ \xi_1 = 1+\sqrt{3}), & \text{if } \tilde{d}_k = 3. \end{cases}$$

例5. $d_k = 17 \equiv 1 \bmod 4$.

$$\mathfrak{N}^*_{\xi_1},\ \mathfrak{N}^*_{\xi_3} \text{ 及び } \mathfrak{N}^*_{\lambda_1};$$

ここで, $\xi_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$, $\xi_3 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$, $\lambda_1 = 4+\sqrt{17}$ for ξ_1. また, $\mathfrak{N}^*_{\lambda_1}$ は $\vartheta(z;1,1)$ の唯一の zero-manifold である.

§3. 定理の証明

ここでは, 定理1の証明の大略を述べるにとどめる. 定理2の証明については, Hermann [3] を参照.

定理1の証明の大略を次の順序で述べる: まず, テータ関数から singular series を構成し, その係数を調べる. そして, zero-manifolds を使いテータ関数と singular series の一致性を吟味する.

$k = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$, $\xi_1 = \xi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$, $\lambda_1 = \lambda = 4+\sqrt{17}$ とおく. まず,

$$SL(2,\mathcal{O}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．テータ関数

$$\vartheta(z\,;\,c,d) = \sum_{\nu\in\mathcal{O}} e\left(\nu d + \left(\nu+\frac{c}{2}\right)^2 z\right),$$

$e(\nu) = e^{\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}\left(\frac{\nu}{\sqrt{17}}\right)}$, $c, d \in \{0, 1, \xi, \bar{\xi}\}$, $cd \equiv 0 \bmod 2$ or $c=d=1$

は，次のような基本的変換をもつ：

(i) $\vartheta(\lambda^2 z\,;\,c,d) = e(cd\lambda^2)\,\vartheta(z\,;\,c,d)$,

(ii) $\vartheta(z+\xi\,;\,c,d) = e(c\xi^2/4)\,\vartheta(z\,;\,c,(c+1)\xi+d)$,

(iii) $\vartheta(z+1\,;\,c,d) = e(c/4)\,\vartheta(z\,;\,c,c+d+1)$,

(iv) $\vartheta\left(-\frac{1}{z}\,;\,c,d\right) = N(z)^{\frac{1}{2}}\,\vartheta(z\,;\,d,c)$.

次に，テータ ϑ の $z=\alpha/\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathcal{O})$ の近くでの挙動を調べると，

$$H_{c,d}(\alpha/\beta) = \sum_{\nu \bmod \beta} e\left(\nu d + \left(\nu+\frac{c}{2}\right)^2\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

とおくとき，

$$\vartheta(z\,;\,c,d) \approx \begin{cases} H_{c,d}(\alpha/\beta)\,\mathrm{sgn}\,N(\beta)/N(\beta)^{\frac{1}{2}}N(\beta z-\alpha)^{\frac{1}{2}}, & \alpha/\beta \neq 1/0 \\ \delta_{0,c}\ (\text{Kronecker delta}), & \alpha/\beta = 1/0. \end{cases}$$

更に，$H_{c,d}$ の作り方より

(i)′ $H_{c,d}(\lambda^2\alpha/\beta) = H_{c,d}(\alpha/\beta)\,e(cd\xi^2)$,

(ii)′ $H_{c,d}(\alpha/\beta+\xi) = H_{c,(c+1)\xi+d}(\alpha/\beta)\,e(\xi^2 c/4)$,

(iii)′ $H_{c,d}(\alpha/\beta+1) = H_{c,c+d+1}(\alpha/\beta)\,e(c/4)$,

(iv)′ $H_{d,c}(\alpha/\beta)/N(\beta)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{sgn}(\alpha,\beta)\cdot H_{c,d}(-\beta/\alpha)/N(\alpha)^{\frac{1}{2}}$,

ここで，
$$\operatorname{sgn}(\alpha,\beta)=\begin{cases}-1, & \operatorname{sgn}N(\alpha)\cdot\operatorname{sgn}N(\beta)=-1,\\ 1, & \text{otherwise}\end{cases}$$
が成立する．

さて，収束項を用いて singular series（: Hecke's modular function）を次のように定義する：

$$\Psi(c,d;z;k,s)$$
$$=\delta_{0,c}+\sum_{\alpha/\beta}H^{k}_{c,d}(\alpha/\beta)\operatorname{sgn}^{k}N(\beta)/N(\beta)^{\frac{k}{2}}N(\beta z-\alpha)^{\frac{k}{2}}|N(\beta z-\alpha)|^{s},$$

ここで，$k\in\mathbb{Z}$，$s\in\mathbb{C}$．Ψ は $\frac{k}{2}+\operatorname{Re}s>2$ で絶対収束する．$\Psi(c,d;z)=\Psi(c,d;z;k,s)$ と略記するとき，(i)′〜(iv)′ より，次の (i)″〜(iv)″ を得る：

(i)″ $\Psi(c,d;\lambda^2 z)=\Psi(c,d;z)\,e^{k}(cd\zeta^2)$,

(ii)″ $\Psi(c,d;z+\zeta)=\Psi(c,(c+1)\zeta+d;z)\,e^{k}(c\zeta^2/4)$,

(iii)″ $\Psi(c,d;z+1)=\Psi(c,c+d+1;z)\,e^{k}(c/4)$,

(iv)″ $\Psi(c,d;-1/z)=\Psi(d,c;z)N^{\frac{k}{2}}(z)|N(z)|^{s}$.

最終的には，$s\to 0$，$k=3$ とする．そのとき必要なのは，$c=d=0$ のときの係数故，
$$H(\alpha/\beta)=H_{0,0}(\alpha/\beta),\quad \Psi(z)=\Psi(0,0;z)$$
とおく．Poisson - Lipschetz の公式より，$\Psi(z)$ は次のように書ける：
$$\Psi(z)=1+\sum_{\mu\in\mathcal{O}}\frac{B(\mu,z)}{4\sqrt{17}}\rho(\mu),$$
ここで，

$$B(\mu, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} e(-\rho\mu)\, d\rho\, d\rho' / N(\rho+z)^{\frac{k}{2}} |N(\rho+z)|^{s},$$

$$P(\mu) = \sum_{\substack{\alpha/\beta \bmod 2 \\ \alpha\beta \equiv 0 \bmod 2}} H^{k}(\alpha/\beta)\, e(-\mu\alpha/\beta) |N(\beta)|^{k+s}.$$

ここで，$k=3$，$s \to 0$ として

$$\Psi(z) = \sum_{\mu > 0} Z(\mu) e(\mu z),$$

$$Z(\mu) = 4\pi^2 P(\mu) (N(\mu)/d_k)^{\frac{1}{2}}.$$

$P(\mu)$ の計算は煩雑故省略する．$H(\alpha/\beta)$ が β について乗法的であることより，local な考察をして結果が得られる．

最後に，テータ関数と singular series の一致性について：

まず，$\mathfrak{A}^{*}_{\lambda_1}$，$\mathfrak{A}^{*}_{\zeta_1}$，$\mathfrak{A}^{*}_{\zeta_3}$ がそれぞれ $\vartheta(z; 1, 1)$，$\vartheta(z; \bar{\zeta}_1, \zeta_1)$，$\vartheta(z; \zeta_1, \bar{\zeta}_1)$ の唯一の zero-manifold である．これらの zero-manifolds は，それぞれ変数変換

$$z_1 = -\bar{\lambda}_1 u + v, \quad z_2 = -\lambda_1 u + v;$$

$$z_1 = -\bar{\zeta}_1 u + v, \quad z_2 = -\zeta_1 u + v;$$

$$z_1 = -\bar{\zeta}_3 u + v, \quad z_2 = -\zeta_3 u + v.$$

をすることにより，すべて $v=0$ で表される．以下では，最初の場合のみを扱う．他の場合も同様である．

関数 $\Xi(z; 1, 1)$ が 変換 (i)″〜(iii)″ をみたすとし，上の変換により，$\Gamma(u, v) = \Xi(z; 1, 1)$ とおき，

$$\Gamma_t(u) = \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^t \Gamma(u,v)\Big|_{v=0}$$

とする．更に，$j\ (\geqq 0)$ を

$$\Gamma_0(u) \equiv \cdots \equiv \Gamma_{j-1}(u) \equiv 0,\quad \Gamma_j(u) \not\equiv 0$$

なる有理整数とする．このとき，

$$\begin{cases} \Gamma_t(u+1) = -\sqrt{-1}\,\Gamma_t(u), \\ \Gamma_t(-1/u) = \sqrt{-1}\,\Gamma_t(u)\,u^{2t+3}, \\ \Gamma_t(u) \to 0 \quad \text{as } u \to \sqrt{-1}\,\infty . \end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases} \Gamma_t^4(u+1) = \Gamma_t^4(u), \\ \Gamma_t^4(-1/u) = \Gamma_t^4(u)\,u^{8t+12}, \\ \Gamma_t^4(u) = O\left(J(u)^{-2}\right) \quad \text{as } u \to \sqrt{-1}\,\infty . \end{cases}$$

$(J(u)$: Klein invariant$)$

このことより，$j=3$ が示され，singular series とテータ関数 ϑ^3 とが同じ order の zeros をもつことがわかる．

以上より，10個の比達

$$\Psi(z;c,d)/\vartheta^3(z;c,d)$$

は $\mathfrak{H}_+ \times \mathfrak{H}_-$ 上で finite singularities をもたず，(i) ~ (iv) 及び (i)″ ~ (iv)″ より互に置換しあう故，それらはすべて定数になる．

詳しくは準備中の論文を参照して下さい．

以上

References

[1] H. Cohn, Calculation of class numbers by decomposition into three integral squares in the fields of $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$, American J. of Math., 83 (1961), 33–56.

[2] K.-B. Gundlach, Nullstellen Hilbertscher Modulformen, Nach. Ak. Wiss. Göttingen (1981), 1–38.

[3] C. F. Hermann, Symmetrische Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$, Math. Ann., 256 (1981), 191–197.

[4] M. Kneser, Klassenzahlen definiter quadratischen Formen, Arch. Math., 8 (1957), 241–250.