数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 178-184

Eisenstein series of low weight

近畿大理工　長岡昇勇(Shoyu Nagaoka)

W. Kohnen は "Class numbers, Jacobi forms and Siegel-Eisenstein series of weight 2 on $Sp_2(\mathbb{Z})$" において Siegel-Eisenstein series $\lim_{s\to 0} E_2^{(2)}(Z,s)$ の Fourier 展開を，Jacobi modular 群の Eisenstein 級数を調べることにより与えた．講演では，この論文の結果の別証明を，Shimura の一般化された超幾何関数に対する理論と G. Kaufhold の古典的公式により比較的容易に得られることを示した

$\mathbb{H}_n$ を n 次の Siegel 上半空間，$Sp_n(\mathbb{R})$ を n 次実 symplectic 群とする．$Sp_n(\mathbb{R})$ は良く知られている様に $\mathbb{H}_n$ 上に一般化された一次分数変換により作用する．$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z})$ を n 次の Siegel modular 群とし，その部分群 $\Gamma_{n,\infty}$ を $\Gamma_{n,\infty} = \{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C = O_n \}$ で定義する．我々は次のタイプの Eisenstein 級数を考える．

$$E_k^{(n)}(Z,s) = \det(Y)^s \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{n,\infty} \backslash \Gamma_n} \det(CZ+D)^{-k} |\det(CZ+D)|^{-2s}$$

ここで $k \in \mathbb{Z}$, $(Z,s) \in \mathbb{H}_n \times \mathbb{C}$. この級数は $Re(s) > \frac{n-k+1}{2}$ の条件のもとで絶対収束し，そこで正則関数となる．

G. Shimura は論文 "On Eisenstein series" の中で このタイプの Eisenstein 級数 ($SU(n,n)$ の場合もこめて)に対して，次の問題を考えた．

(A) $E_k^{(n)}(Z,s)$ は s の関数として $s=0$ で holomorphic か？

(B) もしそうなら $E_k^{(n)}(Z,0)$ は Z について holomorphic か？

(C) これもそうなら $E_k^{(n)}(Z,0)$ は，cyclotomic な Fourier 係数をもつか？

上記論文においてこれらの問題に対する答えと，興味深い結果が述べられているが我々が以下に考える $n=2$ の場合には，$k \geqq 2$ であれば (A) の答えが affirmative であることが証明されている．Kohnen はこの結果をふまえ，前記論文において，$E_2^{(2)}(Z,0)$ の Fourier 展開の式を与えた．彼は Jacobi 形式の理論を使ったが，ここでは Shimura's hypergeometric functions の理論を使っても導かれることを示そう．そのためいくつかの定義を与える．

$Sym_n(\mathbb{R})$ を n 次実対称行列のなす $\mathbb{R}$ vector 空間，$Pos_n(\mathbb{R})$ を n 次正定値実対称行列のなすその部分集合とする．

$Y \in Pos_n(\mathbb{R})$，$T \in Sym_n(\mathbb{R})$，$(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\xi^{(n)}(Y,T;\alpha,\beta) = \int_{Sym_n(\mathbb{R})} \mathbf{e}(-tr(TV))\det(V+iY)^{-\alpha}\det(V-iY)^{-\beta}\,dV,$$

$$\eta^{(n)}(Y,T;\alpha,\beta) = \int_{V\pm T>0} \mathbf{e}(-tr(YV))\det(V+T)^{\alpha-\kappa}\det(V-T)^{\beta-\kappa}\,dV$$

とおく．ここで dV は $Sym_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 上の Euclidean measure，$\kappa = \kappa(n) = \frac{n+1}{2}$．上の積分は $Re(\alpha+\beta) > 2\kappa-1$ で絶対収束し．下の積分は $Re(\alpha+\beta) > \kappa-1$，$Re(\beta) > 2\kappa-1$ で絶対収束し次の等式が成立する：

$$\xi^{(n)}(Y,T;\alpha,\beta) = i^{n\beta-n\alpha}\,2^{n(1-\kappa)}(2\pi)^{n\kappa}\,\Gamma_n(\alpha)^{-1}\Gamma_n(\beta)^{-1}\,\eta^{(n)}(2Y,\pi T;\alpha,\beta)$$

$\xi^{(n)}$ の解析接続や解析的性質は．Shimura "Confluent hypergeometric functions on tube domains" で論じられている．

次に Siegel 級数について説明する．Λ_n で n 次半整対称行列のなす集合を表わすものとする．$(s,T) \in \mathbb{C}\times\Lambda_n$ に対して，

$$\alpha^{(n)}(s,T) = \sum_{\substack{R\in Sym_n(\mathbb{Q})\\ R \bmod Sym_n(\mathbb{Z})}} \nu(R)^{-s}\,\mathbf{e}(tr(TR))$$

なる特異級数を考える．ここで $\nu(R)$ は．$R = C^{-1}D$，$\begin{pmatrix} * & * \\ C & D\end{pmatrix} \in \Gamma_n$ と表示したとき $\nu(R) = |\det C|$ と定義されたものとする．知られている様にこの級数は $Re(s) > n+1$ で収束し，次の

表示をもつ:

$$\alpha^{(n)}(s,T)=\prod_{p:\mathrm{prime}}\alpha_p^{(n)}(s,T),\quad \alpha_p^{(n)}(s,T)=\sum_{R_p}\nu(R_p)^{-s}\,e(\mathrm{tr}(TR_p)),$$

ここで $\nu(R_p)$ は P の巾. 級数 $\alpha_p^{(n)}$ を Shimura "On Eisenstein series" にある様に Siegel 級数と呼ぶことにする.

<u>定理1</u>. $E_k^{(n)}(Z,s)$ は, 次の形の Fourier 展開をもつ.

$$E_k^{(n)}(Z,s)=\det(Y)^s\Big\{1+\sum_{j=1}^{n}\sum_{T\in\Lambda_j}\sum_{Q\in\hat{U}_{n\times j}}\xi^{(j)}(Y[Q],T;k+s,s)$$
$$\cdot\alpha^{(j)}(k+2s,T)\,e(\mathrm{tr}(X[Q]T))\Big\}.$$

ここで $U_{n\times j}=\{Q\in M_{n\times j}(\mathbb{Z})\mid (Q\ *)\in GL_n(\mathbb{Z})\}$ で, $\hat{U}_{n\times j}$ は次の同値関係による代表系: $Q_1\sim Q_2 \Leftrightarrow \exists U\in GL_j(\mathbb{Z})$ s.t. $Q_2=Q_1U$. さらに $Y[Q]={}^tQYQ$, $Z=X+iY\in \mathbb{H}_n$

我々はこの定理を $E_2^{(2)}(Z,s)$ にあてはめる. すると 次の様な表示をもつことがわかる.

$$E_2^{(2)}(Z,s)=A_0(Y,s)+A_{1,1}(Z,s)+A_{2,1}(Z,s)+A_{2,2}(Z,s)$$

$$A_0(Y,s)=\det(Y)^s+\det(Y)^s\sum_{Q\in\hat{U}_{2\times1}}\xi^{(1)}(Y[Q]:0;s+2,s)\,\alpha^{(1)}(2s+2,0)$$
$$+\det(Y)^s\,\xi^{(2)}(Y,O_2;s+2,s)\,\alpha^{(2)}(2s+2,O_2),$$

$$A_{1,1}(Z,s)=\det(Y)^s\sum_{0\neq t\in\mathbb{Z}}\sum_{Q\in\hat{U}_{2\times1}}\xi^{(1)}(Y[Q],t;s+2,s)\,\alpha^{(1)}(2s+2,t)$$
$$\cdot e(X[Q]t).$$

$$A_{2,j}(Z,s)=\det(Y)^s\sum_{T\in\Lambda_2^{(j)}}\xi^{(2)}(Y,T;s+2,s)\,\alpha^{(2)}(2s+2,T)\,e(\mathrm{tr}(XT))$$

ここで $j=1,2$ で $\Lambda_2^{(j)}$ は Λ_2 の元で rank が j なるものを集めてきたもの.

<u>命題1.</u>

$$\lim_{s\to 0}A_0(Y,s)=1-\frac{18}{\pi^2\sqrt{\det(Y)}}\left(\frac{\gamma}{2}+1+\frac{1}{2}\log\frac{v'}{4\pi}-\log|\eta(W_Y)|^2\right).$$

命題の記号の説明: まず γ は Euler 定数. v' は $Y=\begin{pmatrix} v & y\\ y & v'\end{pmatrix}\in Pos_2(\mathbb{R})$ で, W_Y は, この Y について

$$W_Y=\frac{y+i\sqrt{\det(Y)}}{v'}\in H_1$$

で定義したもの. $\eta(s)$ は Dedekind eta 関数.

証明は, $\xi^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$ の $T=0_j$ での公式と, Y に対する Epstein zeta 関数についての Kronecker limit formula を使う.

<u>命題2.</u>

$$\lim_{s\to 0}A_{1,1}(Z,s)=288\sum_{0\le T\in\Lambda_2^{(1)}}\left(\sum_{d|\mathrm{cont}(T)}d\,H\left(\frac{|\mathrm{disc}(T)|}{d^2}\right)\right)e(\mathrm{tr}(TZ)).$$

記号の説明: $\mathrm{cont}(T)$ は $T=\begin{pmatrix} m & \frac{r}{2}\\ \frac{r}{2} & n\end{pmatrix}$ $(m,n,r\in\mathbb{Z})$ と表わしたとき $\mathrm{cont}(T)=\mathrm{g.c.d}(m,r,n)$. また $\mathrm{disc}(T)$ は $\mathrm{disc}(T)=r^2-4mn$ なる整数 (ここでは $T\in\Lambda_2^{(1)}$ より $\mathrm{disc}(T)=0$) $H(\Delta)$ は判別式 $-\Delta$ の二元二次形式に対する Kronecker-

Hurwitz class number を表わす(詳しくは Eichler-Zagier の " The theory of Jacobi forms " か Cohen の論文を参照).

ここでは $H(0) = -\frac{1}{12}$.

命題 3.

$$\lim_{s\to 0} A_{2,1}(Z,S) = -\frac{72}{\pi^3}\sum_{T\in\Lambda_2^{(1)}}\frac{1}{2}\eta^{(2)}(2Y,\pi T;2,0)\,\sigma_0(\mathrm{cont}(T))\,e(\mathrm{tr}(TX))$$

記号の説明: $\eta^{(2)}(\cdots)$ は前に定義した関数(を解析接続したもの), $\sigma_0(\ )$ は $\sigma_s(x) = \sum_{0<d|x} d^s$ で定義される divisor 関数.

命題 4.

$$\lim_{s\to 0} A_{2,2}(Z,S) = 288\sum_{0<T\in\Lambda_2}\Big(\sum_{d|\mathrm{cont}(T)} d\,H\big(\frac{|\mathrm{disc}(T)|}{d^2}\big)\Big)\,e(\mathrm{tr}(TZ))$$

$$-\frac{72}{\pi^3}\sum_{0\neq \mathrm{disc}(T)=\square}\eta^{(2)}(2Y,\pi T;2,0)\,\sigma_0(\mathrm{cont}(T))\,e(\mathrm{tr}(TX))$$

この命題の証明は Kaufhold の古典的論文 " Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulformen 2. Grades " で与えられている $\alpha^{(2)}(S,T)$ の具体的公式と, 超幾何関数 $\xi^{(2)}$ の解析的性質 (Shimura により調べられている) を組合せることに得られる.

以上の命題を合わせて次の主定理を得る.

定理 2. $E_2^{(2)}(Z,s)$ は $s=0$ で finite で $E_2^{(2)}(Z,0)$ は次の Fourier 展開をもつ：

$$E_2^{(2)}(Z,0) = 1 - \frac{18}{\pi^2\sqrt{\det(Y)}}\left(\frac{\gamma}{2} + 1 + \frac{1}{2}\log\frac{v'}{4\pi} - \log|\eta(w_Y)|^2\right)$$

$$- \frac{72}{\pi^3} \sum_{\substack{0\neq T\in\Lambda_2 \\ \mathrm{disc}(T)=\mathrm{square}}} \varepsilon_T\, \eta^{(2)}(2Y,\pi T;2,0)\,\sigma_0(\mathrm{cont}(T))\, e(\mathrm{tr}(TX))$$

$$+ 288 \sum_{\substack{0\neq T\in\Lambda_2 \\ T\geqq 0}} \left(\sum_{d\mid \mathrm{cont}(T)} d H\left(\frac{|\mathrm{disc}(T)|}{d^2}\right)\right) e(\mathrm{tr}(TZ)).$$

ここで $\varepsilon_T = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } \operatorname{rank} T = 1 \\ 1 & \text{if } \operatorname{rank} T = 2 \end{cases}$

注意：Kohnen の original の論文では $\eta^{(2)}(\cdots)$ の部分が別の関数 $\beta(x,y)$ で表わされているが，相方が一致することについては現在 rank $T=1$ の部分について証明されている．もちろん任意の T について証明されるべきである．)