数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 199-203

Fourier coefficients of Klingen's Eisenstein series

名大理学部 北岡良之 (YOSHIYUKI KITAOKA)

動機については講演のときに述べたので結果のみ記すことにする。

記号

n, m を自然数、 R を環とする。

$M_{m,n}(R) := R$ 上の $m \times n$ 行列全体, $M_{m,n} := M_{m,n}(\mathbf{Z})$,$M_m := M_{m,m}(\mathbf{Z})$ 。

$\Lambda_n(R) := \{a = {}^t a \in M_n(R)\}$, $\Lambda_n := \Lambda_n(\mathbf{Z})$ 。

$\Lambda'_n := \{\lambda \in \Lambda_n(\mathbf{Q}) \mid 2\lambda \in \Lambda_n, \lambda$ の対角成分 $\in \mathbf{Z}\}$,

$\Lambda'_n(\mathbf{Z}_p) := \Lambda'_n \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$。

行列 A, B に対して ${}^t ABA$ が定義できるとき $B[A]$ と記す。

$\Gamma_n := Sp(n, \mathbf{Z})$, $U_n := SL_n(\mathbf{Z})$ 。

$\Gamma_n^\infty := \{\begin{pmatrix} a^{(n)} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n\}$, $P_{n,r} := \{\begin{pmatrix} v_1^{(r)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in U_n\}$ 。

$\Delta_{n,r}$ は Γ_n の左下 $(n-r) \times (n+r)$ 小行列が零行列となるものからなる部分群である。但 $r < n$ とする。

$H_n := \{z = {}^t z \in M_n(\mathbf{C}) \mid \Im z > 0\}$ 。

$e(x) := exp(2\pi i x)$ 。

$G \subset M_n$ に対して $G(q) := \{g \in G \mid g \equiv 1_n \bmod q\}$ とおく。 但 q は整数とする。

以後 n, r, k, q は自然数で $1 \leq r < n, q \geq 3$ とする。

$A \in M_n(\mathbf{C})$ に対し $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $A_1 \in M_r(\mathbf{C})$ と分解し添数は常にこの意味で用いる。また $m := n - r$ とする。

結果を述べるために更にいくつかの定義をする。

- 積分 $H(T, y; s)$ について。

$T \in \Lambda'_n, y \in \Lambda_n(\mathbf{R})$ に対し $T_1 > 0, y > 0$ と仮定し、$s \in \mathbf{C}$ に対して

$$H(T,y;s) := e(i \operatorname{tr} T_1 y_1) \int_{\substack{\sigma \in \Lambda_n(\mathbf{R}) \\ \sigma_1 = 0}} \det(\sigma_4 + iy_4)^{-k} \det(y^{-1} \left[\begin{smallmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_4 \end{smallmatrix}\right] + y_4)^{-s}$$
$$\times e(-\operatorname{tr} T_1 \cdot z_4^{-1}[z_3] - \operatorname{tr} \left(\begin{smallmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & \sigma_4 \end{smallmatrix}\right) T) d\sigma_2 d\sigma_4,$$

ここで $z_j := \sigma_j + iy_j$ かつ $d\sigma_2 := \prod_{ij} da_{ij}$ for $\sigma_2 = (a_{ij})$ 、また $d\sigma_4 = \prod_{i \leq j} db_{ij}$ for $\sigma_4 = (b_{ij})$ とおく。 $H(T, y; s)$ は $\Re s > (n-k)/2$ で絶対収束し、更に $\Re s \geq 0$ ならば

$$H(T,y;s) = O((\det T_1^{(r)})^{-m/2} (\det y_4^{(m)})^{(n+1)/2-k-s} exp(-2\pi \operatorname{tr} T_1(y_1 - y_4^{-1}[{}^t y_2])))$$

となり、 $w = \begin{pmatrix} w_1^{(r)} & w_2 \\ 0 & w_4 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbf{R})$ に対し

$$H(T[w], y[{}^t w^{-1}]; s) = |\det w_1|^{-m} |\det w_4|^{2k-n-1+2s} H(T, y; s)。$$

特に,

$$H(T, T^{-1}; s) = \det T^{-(n+1)/2+k+s} \det T_1^{(r+1)/2-k-s} H(1_n, 1_n; s)$$

となる。 また $k > n$ の時容易に

$$\begin{aligned} H(T, y; 0) =& 2^{-(n-1)m/2} i^{-mk} (2\pi)^{m(k-r/2)} \pi^{-m(m-1)/4} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(k-(r+j)/2)^{-1} \\ & \times exp(-2\pi \operatorname{tr} Ty) \begin{cases} \det T_1^{(r+1)/2-k} \det T^{k-(n+1)/2} & \text{if } T > 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

がわかる。

- Möbius 関数について。
  M を有限アーベル群とする。 この時

$$\mu(M) := \begin{cases} \prod_p (-1)^{h_p} p^{h_p(h_p-1)/2} & \text{if } M \cong \oplus_p (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{h_p}, \\ 0 & \text{otherwise}。 \end{cases}$$

ここで p は全ての素数をわたる。 この時次の命題がなりたつ。

命題. M を有限アーベル群とすると

$$\sum_N \mu(N) = \sum_N \mu(M/N) = \begin{cases} 1 & \textit{if } M = 0, \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

ここで N は M の全ての部分群を動く。 また M の全ての部分群全体の集合の上で定義された関数 ϕ, ψ に対し

$$\psi(K) = \sum_{H \supset K} \phi(H)$$

(H は N の部分群を動く) が全ての部分群 K に対して成り立つことと

$$\phi(H) = \sum_{K \supset H} \mu(K/H) \psi(K)$$

が全ての部分群 H に対して成り立つことは同値である。

- $T' \in \Lambda_n'(\mathbf{Z}_p)$ に対し

$$\beta_p(T, x) := \sum_{c,d} x^{\operatorname{ord}_p \det c} e(\operatorname{tr} Tc^{-1}d)$$

ここで c,d は $GL_n(\mathbf{Z})\backslash\{(c,d)\mid \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_n, \det c|p^\infty\}/\left(\begin{smallmatrix} 1_n & \Lambda_n \\ 0 & 1_n\end{smallmatrix}\right)$ を動く。これは $\det T\neq 0$ なら x の多項式となる。更に $\gamma_p(T,x)$ を次のように定義する。

$$\gamma_p(T,x) := (1-x)(1+\epsilon p^{n-d/2}x)\prod_{1\leq i<n-d/2}(1-p^{2i}x^2),$$

ここで d,ϵ は次のように定義される。
V を $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上定義された quadratic space で、基底 $\{v_i\}_{i=1}^n$ に対し quadratic form q を次のように定義する。

$$q(\sum x_iv_i) := T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} \bmod p。$$

また $b(x,y):=q(x+y)-q(x)-q(y)$ によって bilinear form b を定義する。この時 $n-d$ を radical $\mathrm{Rad}(V):=\{v\in V\mid q(v)=0, b(v,V)=0\}$ の次元とし、もし d が奇数なら $\epsilon=0$ とする。もし d が偶数ならば $V=V_0\perp\mathrm{Rad}(V)$ と分解する。この時 V_0 が hyperbolic, 即ち $V_0=0$ 又は V_0 の Witt index が $d/2$ の時 $\epsilon=1$ とおく。そうでなければ、$\epsilon=-1$ とおく。
更に $T\notin\Lambda_n'(\mathbf{Z}_p)$ ならば $\beta_p(T,x)=\gamma_p(T,x)=0$ と定めると

$$\beta_p(T,x)=\sum_G (p^{n+1}x^2)^{\mathrm{ord}_p\det G}\gamma_p(T[G^{-1}],x)$$

が成り立つ。ここで G は $GL_n(\mathbf{Z}_p)\backslash(M_n(\mathbf{Z}_p)\cap GL_n(\mathbf{Q}_p))$ を動く。

- exponential sums について

$T\in\Lambda_n', \tilde{\sigma}\in\Gamma_m, \tilde{v}_2\in M_{r,m}, c,d\in M_m$ $(\det c\neq 0)$ かつ自然数 α に対して、もし $a,b\in M_m$ で $\Gamma_m\ni\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\equiv\tilde{\sigma}\bmod\alpha$ となるものがあれば

$$K_\alpha(T,(c,d);\tilde{\sigma},\tilde{v}_2) := \sum_{\substack{v_2\in M_{r,m} \bmod \alpha M_{r,m}{}^tc \\ v_2\equiv\tilde{v}_2 \bmod \alpha}} e(\mathrm{tr}\, T\begin{pmatrix} ac^{-1}[{}^tv_2] & -v_2{}^tc^{-1} \\ -c^{-1}{}^tv_2 & c^{-1}d\end{pmatrix}/\alpha)$$

とし、そのような a,b がなければ $K_\alpha(T,(c,d);\tilde{\sigma},\tilde{v}_2):=0$ とする。又自然数 α,β と $\sigma=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in M_{2m}$ に対し $[\alpha\ddagger\sigma]_\beta$ で、Γ_m の元で $\bmod\beta$ で $\left(\begin{smallmatrix} \alpha a & b \\ c & \alpha^{-1}d\end{smallmatrix}\right)$ に合同な元をあらわす。一般にはそのような元は存在しないが、以下では存在する場合しか表れない。

- 自然数 a に対して $\hat{a}:=\left(\begin{smallmatrix} 1_{m-1} & \\ & a\end{smallmatrix}\right)$ とおく。

さて Klingen's Eisenstein series を定義しよう。
f を degree r, weight k, level q の cusp form とする。$M=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_r, N\in\Gamma_n, s\in\mathbf{C}$ に対し

$$\begin{aligned} j(M,z) &:= \det(cz+d) \quad \text{for } z\in H_r, \\ (f|M)(z) &:= j(M,z)^{-k}f(M(z)) \quad \text{for } z\in H_r, \\ (f\|_sN)(z) &:= j(N,z)^{-k}f(N(z)_1)\left(\frac{\det\Im N(z)}{\det\Im N(z)_1}\right)^s \quad \text{for } z\in H_n, \end{aligned}$$

suffix 1 は定義により左上 $r \times r$ 小行列であった。又定義により

$$f|M = f \quad \text{for } M \in \Gamma_r(q)$$

であった.

$M \in \Gamma_n$ に対し

$$E^k_{n,r}(f,s;q,M)(z) := \sum_K (f||_s K)(z) \quad \text{for } z \in H_n$$

とおく。ここで K は $\Delta_{n,r}(q)\backslash\{K \in \Gamma_n \mid K \equiv M \bmod q\}$ を動く。これは $\Re s$ が充分大なら絶対収束する。 特に $k > n+r+1$ なら $s=0$ で絶対収束し、degree n, weight k, level q の modular form となっており、更に Eisenstein series と cusp forms とで degree n, weight k, level q の modular forms の空間を張る。結果を述べるためにもう一つ記号を用意する。

$$\eta = \begin{pmatrix} a_1^{(r)} & 0 & b_1^{(r)} & * \\ * & * & * & * \\ c_1^{(r)} & 0 & d_1^{(r)} & * \\ 0 & 0 & 0 & d_4^{(m)} \end{pmatrix} \in \Delta_{n,r}$$

に対し

$$(\det d_4)^k f| \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right)(z) = \sum_{t>0} b(t;\eta) e(\operatorname{tr} tz/q) \quad (z \in H_r)$$

で $b(t;\eta)$ を定める。

定理. $T \in \Lambda'_n, \det T \neq 0$ とすると

$$q^{-r(r+1)/2} \int_{x \in \Lambda_n(\mathbf{R})/q\Lambda_n} E^k_{n,r}(f,s;q,M)(x+iy) e(-\operatorname{tr} Tx/q)dx =$$

$$2\varphi(q)^{-1}[\Gamma^\infty_m : \Gamma^\infty_m(q)]^{-1}[P_{n,r} : P_{n,r}(q)]^{-2}[GL_r(\mathbf{Z}) : U_r(q)]^{-1} \sum_{w \in U_n/P_{n,r}(q)} H(q^{-1}T[w], y[{}^t w^{-1}]; s)$$

$$\times \sum_{\tilde{v} = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{v}_1^{(r)} & \tilde{v}_2 \\ * & * \end{smallmatrix}\right) \in U_n/U_n(q)} \sum_{\eta \in \Delta_{n,r}(q)\backslash\Delta_{n,r}} \sum_{\substack{\tilde{\sigma} = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_m/\Gamma_m(q) \\ \eta N(\tilde{v},\tilde{\sigma}) \left(\begin{smallmatrix} w^{-1} & \\ & {}^t w \end{smallmatrix}\right) \equiv M \bmod q}} \sum_{v_1 \in U_r(q)\backslash(M_r \cap GL_r(\mathbf{Q}))}$$

$$\times |\det v_1|^{m-2s} \{ \sum_{\substack{g \in U_r(q)\backslash(M_r \cap GL_r(\mathbf{Q})) \\ gv_1 \equiv \tilde{v}_1 \bmod q}} \mu(\mathbf{Z}^r/\mathbf{Z}^r g) |\det g|^{-2s} b(T[w]_1^{(r)}[v_1^{-1}g^{-1}];\eta) \}$$

$$\times \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi(-1)=(-1)^k}} \{ \prod_{p \nmid q} \gamma_p(T[w]_1[v_1^{-1}], \chi(p)p^{-k-2s})^{-1} \} \{ \sum_{\substack{V_1 \in U_r \backslash M_r \\ \det V_1 > 0, (\det V_1, q) = 1}} \mu(\mathbf{Z}^r/\mathbf{Z}^r V_1) \chi(\det V_1)^2$$

$$\times (\det V_1)^{n+1-2k-4s} \prod_{p \nmid q} \beta_p(T\left[w \begin{pmatrix} V_1 v_1 & \\ & 1_m \end{pmatrix}^{-1}\right], \chi(p)p^{-k-2s}) \}$$

$$\times \sum_{\substack{\tilde{V}_2 \in M_{r,m} \bmod qM_{r,m} \\ g\tilde{V}_2 \equiv \tilde{v}_2 \bmod q}} \prod_i \{ \sum_{a_i \bmod q_i} \bar{\chi}_i(a_i) \sum_{c_i \in U_m(q_i)\backslash\{c_i \in M_m \mid 0 < \det c_i \mid q_i^\infty\}} \{ \prod_{j \neq i} \chi_j(\det c_i) \} (\det c_i)^{-k-2s}$$

$$\times \sum_{d_i \in M_m \bmod q_i c_i \Lambda_m} K_{q_i}(T\left[w\begin{pmatrix} v_1 & \\ & 1_m \end{pmatrix}^{-1}\right], (c_i, d_i); [qq_i^{-1} \ddagger \begin{pmatrix} {}^t\hat{a}_i & \\ & \hat{a}_i^{-1} \end{pmatrix} \tilde{\sigma}]_{q_i}, (qq_i^{-1})^{-1} \tilde{V}_2 \hat{a}_i^{-1})\}.$$

ここで φ は *Euler* の関数であり、 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_r$ に対し

$$N(v, \sigma) := \begin{pmatrix} v & \\ & {}^t v^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & \\ & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \\ & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \\ & c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1_r & \\ & d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

とおく。又 χ は $\bmod q$ で定義された *Dirichlet* 指標で $\chi(-1) = (-1)^k$ となるものを動く。$q = \prod_i q_i$ は q の素因子分解であり、χ_i は $\bmod q_i$ で定義された *Dirichlet* 指標で $\chi = \prod_i \chi_i$ となるものである。

注意. $H(T, y; 0)$ の形から $k > n$ なら $E^k_{n,r}(f, s; q, M)$ の *Fourier* 展開の各項は $s = 0$ で確定した値を持つなら z について *holomorphic* となるように思える ($\det T = 0$ に対しても)。f が *Hecke operators* の同時固有関数である事を仮定すればもう少し簡単になるはずであるが、いまだ試みていないし *level* を割る *primes* でどんな *Hecke operators* を考えればよいのかわからない。