数理解析研究所講究録
第805巻1992年204-215


# On contribution of elliptic elements to trace formula

三重大教育　古関春隆（Harutaka Koseki）

Selbergの跡公式（trace formula）はArthurによって数体上の一般のreductive群の場合に拡張され，Arthur-Selbergの跡公式と呼ばれるものが得られた。しかしながらこの公式を（Hecke作用素の跡の）explicitな計算の為に用いることは，一般には極めて困難であろう。たとえばelliptic regular elementの寄与には種々のtorusの“volume factor”が現れるが，これは一般には（非円分拡大の）相対類数などに帰着してしまう。しかし，保型形式論における様々な“comparisonの問題”に対しては，拡張された跡公式は有効な道具となると思われる。この場合，跡公式の一部または全体を，何らかの仮定のもとで単純な形に変形しておくことが望ましい。

以下では跡公式の単純化に関するKottwitz（+Arthur）の仕事の一部を紹介する。既にそれほど“最近の話題”ではなくなっている事なので恐縮ですが，この方面に初めて接する方の参考になれば幸いです。

## §1. elliptic term の記述

以下 $G$ は代数体 $F$ 上の連結かつ単連結な半単純代数群とする。アデール上の test-function $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, $f = \bigotimes_v f_v$, に対し Hecke 作用素 $\Upsilon(f) \in \mathrm{End}(L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})))$ を

$$(\Upsilon(f)\varphi)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \varphi(xg) f(g)\, dg$$

により定義する。このとき跡公式の左辺の方を cusp form の空間 $L^2_{cusp}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ における $\Upsilon(f)$ の跡とするならば，右辺は truncated Eisenstein series や weighted orbital integral で表される種々の項の和になる。

さて $\gamma \in G(F)$ が $F$ 上 elliptic であるとは，$\gamma$ が半単純で，中心化群 $G_\gamma$ の中心 $Z(G_\gamma)$ が $F$ 上 anisotropic となることであった。$G(F)$ の共役類や安定共役類に対しても，$F$ 上 elliptic という概念を定義することができる。跡公式の右辺における $G(F)$ の elliptic elements の寄与は

$$\sum_{\mathcal{O}} \tau(G_{\mathcal{O}})\, \mathcal{O}_{\mathcal{O}}(f)\ ;\quad \mathcal{O} \text{ は } G(F) \text{ の elliptic な共役類}$$

と表される。ここで $G_{\mathcal{O}}$ は $\gamma \in \mathcal{O}$ の中心化群（$\gamma$ のとり方によらない）で $\tau(G_{\mathcal{O}})$ はその玉河数，また $\mathcal{O}_{\mathcal{O}}(f)$ は軌道積分である：

$$\mathcal{O}_{\mathcal{O}}(f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\, \frac{dg}{dt} \quad (\gamma \in \mathcal{O})。$$

上の表示を安定共役類の言葉で書き直すことを考える。$G(F)$ の安定共役類とは "$\gamma_1, \gamma_2 \in G(F)$ について $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \exists x \in G(\overline{F})$ s.t. $x\gamma_1 x^{-1} = \gamma_2$" という同値関係に関する同値類のこ

とであった（$\bar{F}$は$F$の代数的閉包）。今後$G(F)$のellipticな安定共役類を代表的に$\mathcal{S}$で表す。$F$の各素点$v$における$G(F_v)$やアデール$G(\mathbb{A})$においても安定共役類という概念が同様に定義されるが，上の$\mathcal{S}$を含む$G(F_v)$の安定共役類と$G(\mathbb{A})$の安定共役類をそれぞれ$\mathcal{S}_v$および$\mathcal{S}_{\mathbb{A}}$で表す。さらに$\mathcal{S}$に含まれる$G(F)$の共役類全体を$\mathcal{S} \bmod G(F)$と書く。$\mathcal{S}_v \bmod G(F_v)$なども同様の意味で用いる。

以下ellipticな$\mathcal{S}$に対し$\sum\limits_{o \in \mathcal{S} \bmod G(F)} \tau(G_o)\, O_o(f)$を考えるのであるが，簡単のため<u>$\mathcal{S}$は regular</u> と仮定する。$\gamma_0 \in \mathcal{S}$を固定しておく。仮定より$\gamma \in \mathcal{S}$に対し$G_\gamma$はtorusで常に$G_{\gamma_0}$と同型である。$T = G_{\gamma_0}$とおく。また$F$の絶対Galois群を$\Gamma$と書く。

$\mathcal{S}$の元$\gamma = x\gamma_0 x^{-1}$ $(x \in G(\bar{F}))$に対し$\Gamma$上の1-cocycle $(\sigma \mapsto \sigma(x)^{-1}x)$を対応させることにより，集合として

$$\mathcal{S} \bmod G(F) \approx \mathrm{Ker}\,(H^1(F,T) \to H^1(F,G))。$$

同様に　$\mathcal{S}_v \bmod G(F_v) \approx \mathrm{Ker}\,(H^1(F_v,T) \to H^1(F_v,G))$。

そこで下のdiagramを考える：

$$\begin{tikzcd}
H^1(F,T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(F,G) \arrow[d, hook] \\
\bigoplus\limits_v H^1(F_v,T) \arrow[r] & \bigoplus\limits_v H^1(F_v,G)
\end{tikzcd}$$

（注意：$E_8$に対するHasse principleはTchernousovによって証明された。）　$G$のHasse principleより，共役類のHasse map

$\lambda_s : s \bmod G(F) \longrightarrow s_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ の fibre の元の個数は常に $Ш(T) := \mathrm{Ker}(H^1(F,T) \to \bigoplus_v H^1(F_v,T))$ の位数に等しい。他方 $T$ の指標群 $\mathrm{Hom}_{\bar{F}}(T,\mathbb{G}_m)$ を $X^*(T)$ と書くと [Ono] より $\tau(T) = \#(H^1(F,X^*(T)))/\#(Ш(T))$。以上よりひとまず,

$$(1) \qquad \sum_{o \in s \bmod G(F)} \tau(G_o)\, O_o(f) = \sum_{o \in \mathrm{Im}\,\lambda_s} \#(H^1(F,X^*(T)))\, O_o(f)\,.$$

さて $H^1(F,X^*(T))$ を $k(T/F)$ と書くことにすると，中山-Tate duality よりその Pontryagin dual は $k(T/F)^D = H^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))$ で与えられる。各 $\gamma \in s_{\mathbb{A}}$ に対し

$$X_o(\gamma) = \{(g,i) \in G(\bar{\mathbb{A}}) \times \mathrm{Hom}_{\bar{F}}(T,G) \mid ①, ②\}$$

① $i(\gamma_o) = g\gamma g^{-1}$

② $i$ は $T \hookrightarrow G$ と $G(\bar{F})$ の作用により同値

とおくと $X_o(\gamma) \neq \phi$ で，$X_o(\gamma)$ には $G(\bar{F})$ が左から作用する。$X(\gamma) = G(\bar{F}) \backslash X_o(\gamma)$ とおくとこれには $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ が左から，$T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})$ が右から作用し，$X(\gamma)$ は $T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})$ に関する $F$-torsor になる。そこで $X(\gamma)$ が定める $H^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))$ の元を $\mathrm{obs}(\gamma)$ とおくと作り方より $\mathrm{obs}(\gamma)$ は $\gamma$ を含む $s_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ の元 $o$ にのみ depend するので，これを $\mathrm{obs}(o)$ と書く。すると

$$\mathrm{obs}(o) = 0 \iff X(\gamma)^{\Gamma} \neq \phi \iff o \in \mathrm{Im}\,\lambda_s\,.$$

よって (1) を書き直すと

$$(2) \qquad \sum_{o \in s \bmod G(F)} \tau(G_o)\, O_o(f) = \sum_{o \in s_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in k(T/F)} \langle \mathrm{obs}(o), \kappa \rangle\, O_o(f)\,.$$

Kottwitz は $s$ が singular の場合にも (2) の形の等式を証明したのであるが，その場合には，固定された $\gamma_0 \in s$ に対し，$I_0 = G_{\gamma_0}$ とおき，$I_0$ の L 群の連結成分を $\hat{I}_0$，$\hat{I}_0^{\Gamma}$ の中心をその単位元の連結成分で割った群 $\pi_0(Z(\hat{I}_0^{\Gamma}))$ を $\mathfrak{K}(I_0/F)$ として，$\mathfrak{K}(I_0/F)^D$ の中に $obs(O)$ を構成している：

<u>定理 1.</u> elliptic (singular) な安定共役類 $s \subset G(F)$ に対し，

$$\sum_{O \in s \bmod G(F)} \tau(G_O)\, \mathcal{O}_O(f) = \sum_{O \in s_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \ \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I_0/F)} \langle obs(O), \kappa \rangle\, e(O)\, \mathcal{O}_O(f)。$$

ここで $e(O)$ は [Kot 1] で定義された符号因子 $(\pm 1)$ である。

この定理と (2) では符号因子 $e(O)$ の部分が見かけ上ズレている。実は各素点における $O_v \in s_v \bmod G(F_v)$ に対して $e(O_v) = \pm 1$ が定義され，$O = (O_v)_v \in s_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})$ に対しては $e(O) = \prod_v e(O_v)$ であるが，$O \in \mathrm{Im}\,\lambda_s$ のときは積公式 $\prod_v e(O_v) = 1$ が成立するので，結局ズレは生じない。

次に $s$ が regular のとき，$H^1(F, X^*(T)) \approx \pi_0(\hat{T}^{\Gamma})$ となることを確認しておく。実際 T の 1-parameter subgroups の群を $X_*(T)$ とすると，$\hat{T} = \mathrm{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)$。完全列 $1 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathbb{C}^\times \to 1$ より

$$1 \to \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times) \to 1 \quad (\text{exact})。$$

よって

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_{\Gamma}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Gamma}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times) & \longrightarrow & H^1(F, \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{Z})) & \to & 0 \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
\mathrm{Lie}(\hat{T}^{\Gamma}) & \xrightarrow{\quad exp \quad} & \hat{T}^{\Gamma} & & H^1(F, X^*(T)) & &
\end{array}$$

## §2. elliptic term の単純化

$G(F)$ の (elliptic な) 安定共役類 $\mathfrak{s}$ と $F$ の素点 $v$ に対して, local な stable orbital integral $SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v)$ を

$$SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v) = \sum_{O_v \in \mathfrak{s}_v \bmod G(F_v)} e(O_v)\, O_{O_v}(f_v)$$

と定義する。$G(F_v)$ 上の調和解析において distribution $SO_{\mathfrak{s}_v}$ は, $O_{O_v}$ そのものよりも基本的な役割りを果たすことが多い。しかし global な跡公式における $\mathfrak{s}$ の寄与は, 一般には $SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v)$ 達の積には分解しない (定理1参照)。だが test-function $f$ が都合のよい成分をもつ場合には, 実際そのように分解する:

**定理 2.** $\mathfrak{s} \subset G(F)$ を elliptic (singular) な安定共役類とする。$F$ のある有限素点 $\mathfrak{F}$ において, test-function $f$ の $\mathfrak{F}$-成分 $f_{\mathfrak{F}}$ が任意の $O_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{s}_{\mathfrak{F}} \bmod G(F_{\mathfrak{F}})$ において

$$e(O_{\mathfrak{F}})\, O_{O_{\mathfrak{F}}}(f_{\mathfrak{F}}) = \begin{cases} c & \cdots\ \mathfrak{s}_{\mathfrak{F}} \text{ が } F_{\mathfrak{F}} \text{ 上 elliptic}, \\ 0 & \cdots\ \text{otherwise} \end{cases}$$

($c$ は $\mathfrak{s}_{\mathfrak{F}}$ で決まる定数) をみたすならば,

$$(*) \qquad \sum_{O \in \mathfrak{s} \bmod G(F)} \tau(G_o)\, O_o(f) = \prod_v SO_{\mathfrak{s}_v}(f_v).$$

この定理も一般の場合の証明は長くなるので, $\mathfrak{s}$ が regular の場合の証明を述べることにする。§1と同じく, $\gamma_0 \in \mathfrak{s}$ を固定して $T = G_{\gamma_0}$ とおく。定理1において $o$ に関する和と $\kappa$ に関する和は交換できることがわかるので, $(*)$ の左辺は

$$\sum_{\kappa\in \mathfrak{k}(T/F)} \Big( \sum_{o\in \mathcal{S}_{\mathbb{A}} \bmod G(\mathbb{A})} \langle obs(o), \kappa \rangle\, e(o)\, \mathcal{O}_o(f) \Big)$$

と表される。ここで $\kappa\neq 0$ のとき $o$ に関する和が消えることが言えれば，定理2は証明されたことになる。

そこで $\kappa\in \mathfrak{k}(T/F)$, $\kappa\neq 0$, を固定し，上の表示の $\kappa$ に対応する項を $Q(\kappa)$ とおく。$F$ の素点 $v$ に対し，$\mathfrak{k}(T/F)=H^1(F, X^*(T))$ から $H^1(F_v, X^*(T))$ への局所化による $\kappa$ の像を $\kappa_v$ と書く。固定された $\gamma_0\in\mathcal{S}$ を通じて $\mathrm{Ker}(H^1(F_v,T)\to H^1(F_v,G))$ は $\mathcal{S}_v \bmod G(F_v)$ と同一視される（P. 3 参照）。前者の元 $x_v$ に対応する後者の元を $x_v(\gamma_0)$ と表す。すると容易にわかるように，$\gamma_0$ を含む $\mathcal{S} \bmod G(F)$ の元を $O_0$ として，

$$Q(\kappa) = \langle obs(O_0), \kappa \rangle \prod_v \sum_{x_v} \langle x_v, \kappa_v \rangle\, e(x_v(\gamma_0))\, \mathcal{O}_{x_v(\gamma_0)}(f_v)。$$

ここで $v$ が有限素点のときは $x_v$ の変域 $\mathrm{Ker}(H^1(F_v,T)\to H^1(F_v,G))$ は $H^1(F_v,T)$ そのものに一致する。よって定理2の仮定と次の lemma より $Q(\kappa)=0$ が示された。Q.E.D.

**Lemma.** torus $T$ が $F_y$ 上 anisotropic ならば，localization $H^1(F, X^*(T)) \longrightarrow H^1(F_y, X^*(T))$ は injective である。

（証明）

$X^*(T)$ は torsion-free ゆえ $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$ に tensor して

$$0\to X^*(T)\to X^*(T)\otimes\mathbb{Q}\to X^*(T)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0 \quad (\text{exact})。$$

これに伴う（$F$ および $F_y$ 上の）Galois cohomology の長完全列において，仮定より $H^0(F, X^*(T)\otimes\mathbb{Q}) = H^0(F_y, X^*(T)\otimes\mathbb{Q}) = 0$ だから，

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to H^0(F, X^*(T)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & H^1(F, X^*(T)) & \to & H^1(F, X^*(T))\otimes\mathbb{Q} = 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to H^0(F_{\mathfrak{p}}, X^*(T)\otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \to & H^1(F_{\mathfrak{p}}, X^*(T)) & \to & H^1(F_{\mathfrak{p}}, X^*(T))\otimes\mathbb{Q} = 0
\end{array}$$

横列は exact で左縦列は明らかに injective。よって右縦列も injective. Q.E.D.

## §3. Euler-Poincaré 関数と simple trace formula

$F$ の有限素点 $\mathfrak{p}$ を固定する。$G(F_{\mathfrak{p}})$ の Tits building を $\mathcal{B}$ とおくと $G(F_{\mathfrak{p}})$ は $\mathcal{B}$ に，そして $\mathcal{B}$ の facet 達の集合に，作用する。$\{\text{facets of } \mathcal{B}\}$ の $G(F_{\mathfrak{p}})$-作用に関する基本領域 $\mathcal{S}$ をひとつ取っておく。$\mathcal{S}$ は有限集合である。

各 $\sigma \in \mathcal{S}$ に対しその $G(F_{\mathfrak{p}})$ 内での stabilizer を $G(F_{\mathfrak{p}})_\sigma$ と表す。各 $G(F_{\mathfrak{p}})_\sigma$ は $G(F_{\mathfrak{p}})$ の開 compact 部分群になる。このとき $G(F_{\mathfrak{p}})$ の Euler-Poincaré 関数 $f_{EP}$ を次の様に定義する：

$$f_{EP} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} (-1)^{\dim\sigma} \mathrm{vol}(G(F_{\mathfrak{p}})_\sigma)^{-1} (G(F_{\mathfrak{p}})_\sigma \text{ の特性関数})。$$

定義より $f_{EP} \in C_c^\infty(G(F_{\mathfrak{p}}))$。ただし vol( ) は $G(F_{\mathfrak{p}})$ 上の Haar 測度に関する体積で，$f_{EP}$ はこの Haar 測度の取り方に依存する。これを modify した $\tilde{f}_{EP} := (-1)^q f_{EP}$ ($q = \mathrm{rank}_{F_{\mathfrak{p}}} G$) を，ここでは仮に，正値 Euler-Poincaré 関数と呼ぶことにする。

Euler-Poincaré関数という名称は，$f_{EP}$が$G(F_{\mathfrak{p}})$のEuler-Poincaré測度と結びつくことに由来していると思われる。すなわち$f_{EP}$が$G(F_{\mathfrak{p}})$のHaar測度$dg$に関して定義されている時測度$f_{EP}(1)dg$は$dg$および$\mathcal{S}$のとり方によらず，$G(F_{\mathfrak{p}})$のEuler-Poincaré測度となる。（つまり$G(F_{\mathfrak{p}})$のcocompactかつtorsion-freeな(離散)部分群$\Gamma$のEuler-Poincaré標数は

$$\chi(\Gamma) := \sum_{p} (-1)^p \dim_{\mathbb{Q}} H^p(\Gamma, \mathbb{Q}) = \int_{G(F_{\mathfrak{p}})/\Gamma} f_{EP}(1)\, dg$$

で与えられる（Serre）。）

また表現論的には$\tilde{f}_{EP}$は$G(F_{\mathfrak{p}})$のSteinberg表現のpseudo-coefficientになる（Casselman）。すなわち$G(F_{\mathfrak{p}})$の既約tempered表現$\pi$に対し，

$$\mathrm{trace}\, \pi(\tilde{f}_{EP}) = \begin{cases} 1 \cdots \pi : \text{Steinberg表現}, \\ 0 \cdots \text{otherwise}。\end{cases}$$

さて$\tilde{f}_{EP}$は§2定理2の"$f_{\mathfrak{p}}$の条件"をみたす。実はより強く，次が成立する：

<u>定理3.</u> $\tilde{f}_{EP}$の軌道積分は$dg$および$\mathcal{S}$のとり方によらない。さらに$\mathcal{A}$を$G(F_{\mathfrak{p}})$の安定共役類，$\mathcal{O} \in \mathcal{A} \bmod G(F_{\mathfrak{p}})$とするとき，

$$e(\mathcal{O})\, \mathcal{O}_{\mathcal{O}}(\tilde{f}_{EP}) = \begin{cases} c \cdots \mathcal{A}\text{が}F_{\mathfrak{p}}\text{上elliptic}, \\ 0 \cdots \text{otherwise}. \end{cases}$$

ここで$c$は$\mathcal{A}$で決まる定数である。

（この定理や定理2における$G_{\mathcal{O}}(F_{\mathfrak{p}})$の測度のとり方については

[Kot 4] 参照。)

よってある有限素点 $\wp$ において test-function の $\wp$-成分を $G(F_\wp)$ の正値 Euler-Poincaré 関数にすれば、跡公式の"右辺"における elliptic elements の寄与は定理2の(*)の形に単純化される。さらに、定理3を眺めていると、elliptic でない元の寄与が消えることも言えそうな気がしてくるが、これは(少なくとも現在のところ)"$\wp$ における仮定"だけからは証明できない。

<u>定理4.</u> $F$ のある有限素点 $\wp$ において $f_\wp$ は $G(F_\wp)$ の正値 Euler-Poincaré 関数で、$\wp$ と異なるある有限素点 $l$ において $f_l$ は $G(F_l)$ の supercuspidal 表現の行列成分であるとする。このとき

$$\mathrm{trace}(\gamma(f) \mid L^2_{\mathrm{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))) = \sum_{s} \prod_{v} SO_{s_v}(f_v)。$$

ここで $s$ は $G(F)$ の($F_\wp$ 上)elliptic な安定共役類を動く。

さて、今までの $F$-group $G$ に対し、その quasi-split inner $F$-form $G'$ をとり、inner-twisting $\psi/\bar{F} : G \xrightarrow{\sim} G'$ を固定する。1-cocycle $(\sigma \mapsto \psi({}^{\sigma}\psi)^{-1})$ の定める $H^1(F, G'_{ad})$ の元を $c_\psi$ とおく。$G'_{ad}$ は仮定より連結であるから、$F$ の素点の有限集合 $S$ で、$v \notin S$ ならば $c_\psi$ の $H^1(F_v, G'_{ad})$ への像が $0$ となるようなものが存在する。必要ならば $S$ を拡げて、$S$ は1個以上の有限素点を含むと仮定してよい。$v \notin S$ ならば $\psi$ を少しひねった写像によって $G$ は $G'$ と $F_v$ 上同型になる。以後 $v \notin S$ では $G(F_v)$ を $G'(F_v)$ と

同一視する。

$G$の跡公式を$G'$の跡公式と比較するため，test-function $f=\otimes_v f_v\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$と$f'=\otimes_v f'_v\in C_c^\infty(G'(\mathbb{A}))$について以下の仮定を設ける：

① $v\notin S$ならば$f_v=f'_v$,

② 任意の有限素点$\mathfrak{p}\in S$において$f_\mathfrak{p}$は$G(F_\mathfrak{p})$の，$f'_\mathfrak{p}$は$G'(F_\mathfrak{p})$の正値Euler-Poincaré関数，

③ 任意の無限素点$v\in S$において$f_v$と$f'_v$のstable orbital integralの間に"matching"が成立している，

④ ある有限素点$\mathfrak{l}\notin S$において$f_\mathfrak{l}=f'_\mathfrak{l}$は$G(F_\mathfrak{l})=G'(F_\mathfrak{l})$のsupercuspidal表現の行列成分。

ここで③の意味については[Shel]などを見られたい。

<u>定理5.</u> 上の①～④のもとで

$$\mathrm{trace}(r(f)|L^2_{cusp}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})))=\mathrm{trace}(r(f')|L^2_{cusp}(G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})))。$$

これは定理4とSelberg principleなどから従う。

さて，ある無限素点$w\in S$において$G(F_w)$がcompactであると仮定する。このとき$G'(F_w)$はcompact Cartan subgroupを持ち，従って離散系列表現を持つ。$G(F_w)$の(有限次元)既約unitary表現$\pi_w$をとると，$\pi_w$との間に"character relation"が生じるような$G'(F_w)$の離散系列表現が$[W:W_c]$個存在する。ただし$W$は$G'(\mathbb{C})$のWeyl群，$W_c$は$G'(F_w)$の，compact Cartan部分群

に関するWeyl群である。これらの中の任意のひとつを$\pi'_w$とおく。

<u>予想.</u> $\pi'_w$のHarish-Chandra parameterがある程度以上"regular"なとき，上の④を次の④′でおきかえても定理5は成立する：

④′ 上の無限素点$w\in S$において，$f_w$は$\pi_w$のcharacterで$f'_w$は$\pi'_w$のpseudo-coefficient.

この方向では伊吹山氏，橋本氏，筆者などの研究があるが，一般には未解決と思われる。

## — References —

[Kot1] R. Kottwitz, *Sign changes in harmonic analysis on reductive groups*, Trans. AMS 278 (1983), 289 – 297

[Kot2] ——, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. 51 (1984), 611 – 650

[Kot3] ——, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. 275 (1986), 365 – 399

[Kot4] ——, *Tamagawa numbers*, Ann. Math. 127 (1988), 629 – 646

[Ono] T. Ono, *On the Tamagawa number of algebraic tori*, Ann. Math. 78 (1963), 47 – 73

[Shel] D. Shelstad, *Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$*, Compos. Math. 39 (1979), 11 – 45