数理解析研究所講究録
第 805 巻 1992 年 238-248

modular curve の K_2 と "$L(E,1)\neq 0 \Rightarrow \#E(\mathbb{Q})<\infty$".

東京工業大学　加藤和也　(Kazuya Kato)

Kolyvagin は，$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E が modular である（modular curve で dominate される —— 谷山-Weil 予想によると $\mathbb{Q}$ 上のすべての楕円曲線がそうであるはず）とし，$L(E,1)\neq 0$ とすると，$E(\mathbb{Q})$ 及び E の Tate-Shafarevich 群 Ш(E) が有限であることを示した。本稿では，この「$E(\mathbb{Q})$の有限性」の部分の別証明のあらすじを述べる。（Ш(E)の有限性の方は，筆者は別証を得ていない。）

この別証では，Kolyvagin の道具であった Heegner point は使用せず，modular curve の K_2の中に Beilinson が定義した元と，p 進 Hodge 理論を用いる。

以下，体 K に対し，Galois cohomology $H^m(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K),\ )$ を $H^m(K,\ )$ と書く（$\bar{K}$ は K の分離閉包）。

§1.　p 進 Hodge 理論の復習

K を標数 0 の完備離散付値体で，剰余体が標数 $p>0$ の完

全体であるものとする。

(1.1) B_{dR}。

Fontaine は [2] において重要な体 B_{dR} を定義した。これは完備離散付値体で，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が作用し，その付値環は K を部分体として含み，$H^0(K, B_{dR}) = K$ が成立している。

$$B_{dR}^i = \{x \in B_{dR} \; ; \; x \text{の付値} \geqq i\} \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

とおく。

(1.2) 関手 D_{dR}。

Fontaine は [2] において重要な関手

D_{dR} : ($\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ が連続に作用する有限次 $\mathbb{Q}_p$-vector space の圏)

$\longrightarrow$ (降 filtration をもつ有限次 K-vector space の圏)

を，$D_{dR}(V) = H^0(K, B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$

$D_{dR}(V)$ の第 i filtration $D_{dR}^i(V) = H^0(K, B_{dR}^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$

$(i \in \mathbb{Z})$ と定義した。

注) D_{dR} と Tate twist の関係：$D_{dR}(V(r))$ が K-vector space としては $D_{dR}(V)$ と等しく，$D_{dR}^i(V(r)) = D_{dR}^{i+r}(V)$ となる。

(1.3) de Rham 表現

一般に $\dim_K D_{dR}(V) \leqq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ が成立する ([2]) が，ここで等号が成立する時，V は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の de Rham 表現であるといわれる。

(1.4) de Rham conjecture.

Faltings([1]) は，Fontaine が [2] において提出した次の予想 (de Rham conjecture と呼ばれた) を証明した。

「X を K 上の proper smooth scheme とすると，各 $m \in \mathbb{Z}$ に対し $H^m_{et}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)$ は $Gal(\overline{K}/K)$ の de Rham 表現であり，

$$D_{dR}(H^m_{et}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)) = H^m_{dR}(X/K)$$

$$D^i_{dR}(H^m_{et}(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Q}_p)) = Fil^i H^m_{dR}(X/K)$$

ここに Fil^i は Hodge filtration となる。

(1.5) dual exponential map.

V を $Gal(\overline{K}/K)$ の de Rham representation とする時，dual exponential map と呼ぶ準同型

$$\exp^* : H^1(K, V) \longrightarrow D^0_{dR}(V)$$

が，合成

$$H^1(K, V) \longrightarrow H^1(K, B^0_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \underset{(*)}{\overset{\cong}{\longleftarrow}} H^0(K, B^0_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = D^0_{dR}(V)$$

として定義される。ここに $(*)$ は，$-\log(\kappa) \in H^1(K, \mathbb{Z}_p)$ との cup 積（同型であることが示せる）である。但し

$$\log(\kappa) \in H^1(K, \mathbb{Z}_p) = Hom_{cont}(Gal(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_p)$$

は，$Gal(\overline{K}/K) \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\log} \mathbb{Z}_p$，ここに κ は 1 の p 巾根への作用，と定義する。

(1.6) dual exponential map と exponential map の間の双対性.

K を剰余体は有限体であるとする。次のような場合，(1.5)

の dual exponential map は，p 進 Lie 群の exponential map の dual と見なせる。p 進 Lie 群の exponential

(i) $\exp : K \longrightarrow K^{\times}\otimes\mathbb{Q}$; $a \mapsto \exp(p^n a)\otimes p^{-n}$ $(n \gg 0)$

(i)′ $\exp : \mathrm{Lie}(A) \longrightarrow A(K)\otimes\mathbb{Q}$; 上と同様

（A は K 上のアーベル多様体）を考える。

(ii) $\partial : K^{\times}\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow H^1(K, \mathbb{Q}_p(1))$

(ii)′ $\partial : A(K)\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow H^1(K, V_pA)$

（ここに $V_pA = T_pA\otimes\mathbb{Q}$，$T_pA$ は A の p 進 Tate 加群）をそれぞれ，$0 \to (\mathbb{Z}/p^n)(1) \to \overline{K}^{\times} \xrightarrow{p^n} \overline{K}^{\times} \to 0$，$0 \to {}_{p^n}A(\overline{K}) \to A(\overline{K}) \xrightarrow{p^n} A(\overline{K}) \to 0$ の連結準同型の $\varprojlim_n$ の $\otimes\mathbb{Q}$ とする。

合成 (ii)∘(i)，(ii)′∘(i)′ の $\mathbb{Q}_p$-dual をとる：

(iii) $$H^1(K, \mathbb{Q}_p) \underset{(*)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(H^1(K, \mathbb{Q}_p(1)), \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\text{(ii)∘(i)で}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \mathbb{Q}_p) \underset{(**)}{\cong} K$$

(iii)′ $$H^1(K, V_pA') \underset{(*)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(H^1(K, V_pA), \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\text{(ii)′∘(i)′で}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Lie}A, \mathbb{Q}_p) \underset{(**)}{\cong} \mathrm{coLie}(A)$$

（A′ は A の双対アーベル多様体，$\mathrm{coLie}(A) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Lie}(A), K)$），ここに (*) は $H^2(K, \mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p$ への cup 積による Tate duality，(**) は $K \times K \to \mathbb{Q}_p$; $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p}(xy)$ による。）ところが，

$$D^0_{dR}(\mathbb{Q}_p) = K$$

$$D^0_{dR}(V_pA') = D^0_{dR}(H^1_{et}(A\otimes_K\overline{K}, \mathbb{Q}_p)(1)) = \mathrm{fil}^1 H^1_{dR}(A/K) = \Gamma(A, \Omega^1_{A/K}) = \mathrm{coLie}(A)$$

であって，(iii), (iii)′ はそれぞれ de Rham 表現 $\mathbb{Q}_p$ 及び V_pA' の dual exponential map と同一視されるのである。

§2. zeta element.

次の (2.1) は，目標である「別証」のために必要ではなく，必要なのは (2.2) もしくはその系 (2.3) なのであるが，(2.1) は (2.2) の類似で，より易しいので，比較のため記した。

(2.1) 定理 ([3])　　円単数から出発して，1 の巾根 α と $r \geqq 1$ に対し，

$$c(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha),\ \mathbb{Q}_p(1-r))$$

で次の性質を持つものが作れる。(元 $c(\alpha)$ の定義は Soulé による。)

$$H^1(\mathbb{Q}(\alpha),\ \mathbb{Q}_p(1-r)) \to H^1(\mathbb{Q}(\alpha)\otimes\mathbb{Q}_p,\ \mathbb{Q}_p(1-r)) \xrightarrow{\exp^*} \mathbb{Q}(\alpha)\otimes\mathbb{Q}_p$$

($\mathbb{Q}(\alpha)\otimes\mathbb{Q}_p = \prod_i F_i$，$F_i$ は体とする時，$H^1(\mathbb{Q}(\alpha)\otimes\mathbb{Q}_p,\ )$ は $H^1(F_i,\ )$ の直積と定義し，$\exp^*$ も，F_i についての $\exp^*$ の直積と定義する) による $c(\alpha)$ の像 $\omega(\alpha)$ は，$\mathbb{Q}(\alpha)$ に属し，かつ，この $\omega(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$ の，任意の体準同型

$$\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \iota(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right) \qquad (N \geqq 1,\ (a, N) = 1)$$

について

$$\iota(\omega(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)^r}\left(\zeta_{\equiv a(N)} + (-1)^r \zeta_{\equiv -a(N)}\right)(r)$$

をみたす，ここに

$$\zeta_{\equiv a(N)}(s) \underset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \bmod N}} \frac{1}{n^s} .$$

(2.2) 定理([4]) Xをある$N \geq 1$についての$\mathbb{Q}$上の (compactified) modular curve $X_1(N)$とする。BeilinsonがXのK_2の中に作った元から出発して，1の巾根αと$\delta \in H^1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q})$に対し

$$c_\delta(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H^1_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1))$$

で次の性質を持つものが作れる。

$$H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H^1_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1)) \to H^1(\mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p, H^1_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1))$$
$$\xrightarrow{\exp^*} \Gamma(X, \Omega^1_{X/\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}_p$$

による$c_\delta(\alpha)$の像$\omega_\delta(\alpha)$は$\Gamma(X, \Omega^1_{X/\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{Q}(\alpha)$に属し，かつこの$\omega_\delta(\alpha)$の，任意の体準同型

$$\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C} \quad ; \quad \iota(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right) \qquad (N \geq 1, \ (a, N) = 1)$$

による像

$$\iota(\omega_\delta(\alpha)) \in \Gamma(X, \Omega^1_{X/\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C} \cong H^1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$$

は次で特徴づけられる。X上の任意の eigen cusp form fに対し，$H^1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$の中で

$$\iota(\omega_\delta(\alpha)) \text{ の } f \text{ 成分} = \left(\begin{array}{c} L_{\equiv a(N)}(f, 1)\, \delta + L_{\equiv -a(N)}(f, 1)\, \overline{\delta} \\ \text{の } f \text{ 成分} \end{array} \right)$$

となる。ここに$\overline{\delta}$はδの複素共役であり，$L(f, s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$の時

$$L_{\equiv a(N)}(f, s) \underset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \bmod N}} c_n n^{-s} .$$

(2.3)　Eを$\mathbb{Q}$上の楕円曲線でmodularであるものとする。Eに対応するeigen cusp formをfとし（したがって$L(E,s)=L(f,s)$となっている）．定理(2.2)の$c_\delta(1)$のf成分をとることで，次の定理が(2.2)から導かれる：

各$\delta\in H^1(E\otimes\mathbb{C},\mathbb{Q})^+$　($(\ )^+$はGal($\mathbb{C}/\mathbb{R}$)-fixed part)に対し，$H^1(\mathbb{Q},V_pE)$の元c_δで次をみたすものが存在する。

$$H^1(\mathbb{Q},V_pE)\longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_p,V_pE)\xrightarrow{\exp^*}\mathrm{coLie}(E)\otimes\mathbb{Q}_p$$

によるc_δの像ω_δは$\mathrm{coLie}(E)=\Gamma(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})$に属し，この$\omega_\delta\in\Gamma(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})$の，

$$\Gamma(E,\Omega^1_{E/\mathbb{Q}})\otimes\mathbb{R}\ \overset{\cong}{\Rightarrow}\ H^1(E\otimes\mathbb{C},\mathbb{R})^+=H^1(E\otimes\mathbb{C},\mathbb{Q})^+\otimes\mathbb{R}$$

での像は$L(E,1)\delta$に等しい。

§3.　$L(E,1)\neq 0\Rightarrow \#E(\mathbb{Q})<\infty$の証明法．

(3.1)　Eを$\mathbb{Q}$上の楕円曲線でmodularなものとする。$L(E,1)\neq 0\Rightarrow \#E(\mathbb{Q})<\infty$を示す。(2.3)の記号で，$\delta$を1次元$\mathbb{Q}$-vector space $H^1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Q})^+$の基底とすると，(2.3)より

$$L(E,1)\neq 0\iff \omega_\delta\neq 0。$$

次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Lie}\,E\otimes\mathbb{Q}_p \arrow[dl, "\cong"', "\exp"] \arrow[dd, "\omega_\delta"] \\
E(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & E(\mathbb{Q}_p)\otimes\mathbb{Q} \arrow[d, "\partial"'] & \\
H^1(\mathbb{Q}, V_pE) \arrow[r] & H^1(\mathbb{Q}_p, V_pE) \arrow[r, "\cup c_\delta"] & \mathbb{Q}_p
\end{tikzcd}$$

（$\cup c_\delta$ は c_δ との cup 積）。下の Lemma (3.2) により，最下辺の射の合成は 0 である。よって図より，下の(*)がわかる：

$$L(E,1)\neq 0 \iff \omega_\delta \neq 0 \iff \omega_\delta : \mathrm{Lie}\,E\otimes\mathbb{Q}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}_p$$

$$\Downarrow(*)$$

$E(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q} \to E(\mathbb{Q}_p)\otimes\mathbb{Q}$ は零射

$E(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q} \to E(\mathbb{Q}_p)\otimes\mathbb{Q}$ は単射ゆえ，それが零射であるのは $E(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}=0$ すなわち（$E(\mathbb{Q})$ は有限生成アーベル群だから）$E(\mathbb{Q})$ が有限であるときに限る。（証明終）

Lemma (3.2). Tate duality $H^1(\mathbb{Q}_p, V_pE)\times H^1(\mathbb{Q}_p, V_pE)\to\mathbb{Q}_p$ は，$H^1(\mathbb{Q}, V_pE)\times H^1(\mathbb{Q}, V_pE)$ の像を零化する。

（証明：相互法則と，$H^1(\mathbb{Q}_v, V_pE)$ が $\mathbb{Q}$ のすべての素点 $v\neq p$ に対し零であることによる。）

(3.3) 注．この証明では，(2.2) の $c_\delta(1)$ を用いたが，任意の 1 の巾根 α についての (2.2) の $c_\delta(\alpha)$ を用いれば，次のことが示せる。Dirichlet character $\chi : (\mathbb{Z}/N)^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対し，

$$L(E,\chi,1)\neq 0 \Rightarrow E(\mathbb{Q}(\exp(\tfrac{2\pi i}{N})))\otimes\mathbb{C} \text{ の } \chi \text{ 成分} = 0.$$

（これは Kolyvagin も示していない新しい結果のようである。）

§4. §2 の $c(\alpha)$, $c_\gamma(\alpha)$ の作り方。

(4.1)　まず (2.1) の $c(\alpha)$ を作るための出発点。

1 の巾根 $\alpha \neq 1$ に対し

$$c(\alpha) \underset{\mathrm{def}}{=} (1-\alpha)^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)^\times$$

とおく．任意の体準同型

$$\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \iota(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right) \quad (N \geq 1,\ (a, N) = 1)$$

に対し，

$$\log|\iota(c(\alpha))| = \zeta'_{\equiv a(N)}(0) + \zeta'_{\equiv -a(N)}(0)$$

(( )′ は微分) である。このように $\mathbb{Q}(\alpha)^\times$ の元 $c(\alpha)$ は zeta 関数に関係しており，多分「zeta の化身」なのである。この zeta の化身 $c(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)^\times$ から，(α を動かして) (2.1) に述べた zeta の化身 $c(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ ができるのである。

(4.2)　次に (2.2) の $c_\gamma(\alpha)$ を作るための出発点。

X を (2.2) のとおりとすると，Beilinson の regulator map

$$\mathrm{reg} : \Gamma(X \otimes \mathbb{C}, K_2) \longrightarrow H_1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$$

が定義される。Beilinson は 1 の巾根 α と $\gamma \in H_1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q})$ に対し，

$$c_\gamma(\alpha) \in \Gamma(X \otimes \mathbb{Q}(\alpha), K_2) \otimes \mathbb{Q}$$

で次の性質をもつものを作った。任意の体準同型

$$\iota : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \qquad \iota(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right) \quad (N \geqq 1,\ (a, N) = 1)$$

に対し

$$\mathrm{reg}(\iota(c_\gamma(\alpha))) \in H_1(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R})$$

は次で特徴づけられる。X上の任意の eigen cusp form f に対し,

$$\mathrm{reg}(\iota(c_\gamma(\alpha))) \text{ の } f \text{ 成分} = \left(\begin{matrix} L'_{\equiv a(N)}(f, 0)\gamma + L'_{\equiv -a(N)}(f, 0)\bar{\gamma} \\ \text{の } f \text{ 成分} \end{matrix}\right)$$

このように $c_\gamma(\alpha) \in \Gamma(X \otimes \mathbb{Q}(\alpha), K_2) \otimes \mathbb{Q}$ は zeta の化身であり, この zeta の化身から, (2.2) に述べた zeta の化身 $c_\delta(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H^1_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1))$ ができるのである。

(4.3) $\mathbb{Q}(\alpha)^\times$ 内の元 $c(\alpha)$ から $H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ の元を作る作り方は次のとおり。簡単のため α の位数 N が p でわりきれるとする。各 $n \geqq 0$ に対し α の p^n 乗根 x_n を, $x_{n+1}^p = x_n$ となるようにとる。写像

$$(*) \qquad \mathbb{Q}(x_n)^\times \xrightarrow{\partial} H^1(\mathbb{Q}(x_n), (\mathbb{Z}/p^n)(1)) \underset{\theta}{\overset{\cong}{\longleftarrow}} H^1(\mathbb{Q}(x_n), (\mathbb{Z}/p^n)(1-r))$$

ここに θ は $(\mathbb{Z}/p^n)(1)$ の底 x_n^N との cup 積の r 乗, を考え, この写像による $c(x_n) \in \mathbb{Q}(x_n)^\times$ の像を $t_n \in H^1(\mathbb{Q}(x_n), (\mathbb{Z}/p^n)(1-r))$ とおき, t_n の $H^1(\mathbb{Q}(\alpha), (\mathbb{Z}/p^n)(1-r))$ への norm を s_n とおく。$(c(x_n))_{n \geqq 0}$ が norm についての逆系をなすことから $(s_n)_{n \geqq 0}$ も逆系をなし, $\varprojlim_n s_n \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ がきまるが, この元を $c(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}_p(1-r))$ と定義するのである。

$c_\delta(\alpha) \in H^1(\mathbb{Q}(\alpha), H^1_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_p)(1))$ の定義もこれと同

様である。但し $\gamma = 2\pi i\delta$ とおき ($H_1 = H^1 \cdot 2\pi i$ と見る), (*) の代わりに

$$(**) \quad \Gamma(X \otimes \mathbb{Q}(x_n), K_2) \xrightarrow{\tau} H^1(\mathbb{Q}(x_n), H^1_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}/p^n)(2))$$
$$\underset{\theta}{\overset{\cong}{\leftarrow}} H^1(\mathbb{Q}(x_n), H^1_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}/p^n)(1))$$

但し τ は chern class map, θ は x_n^N との cup 積, を用いる。

[1] G. Faltings, Crystalline cohomology and p-adic
in "Algebraic analysis, geometry, and Number theory",
JAMI Inaugural conf.. (The Johns Hopkins Univ. Press 1989)

[2] J.-M. Fontaine, Sur certain types de répresentations p-adiques
du groupe de Galois d'un corps local, construction d'un
...., Ann of math 115 (1982) 529-577.

[3] K. Kato; Approach to the Iwasawa theory of Hasse-Weil
L-functions via B_{dR} (準備中).

[4] K. Kato; p-adic Hodge theory and values of zeta
functions of elliptic cusp forms (準備中)