数理解析研究所講究録
第 807 巻 1992 年 81-92

超曲面のアレクサンダー多項式 (After Dimca)

埼玉大理　酒井文雄　(Fumio Sakai)

1　序

$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 内の孤立特異点のみを持つ d 次超曲面 X を考察する. X を定義する斉次多項式を $f(x)$ とし、$F_X = \{x \in \mathbf{C}^{n+1} | f(x) = 1\}$ と置く. 写像 $h_X : F \ni x \to \zeta x \in F$ は X のモノドロミー写像と呼ばれる. ただし、$\zeta = e^{2\pi i/d}$. このとき、h_X の $H^{n-1}(F)$ への作用 h_X^* の特性多項式を X のアレクサンダー多項式と呼び、$\Delta_X(t)$ で表す. $(h_X)^d =$ 恒等写像に注意すると h_X^* の固有値は 1 の d 乗根であることが分かる. したがって、

$$\Delta_X(t) = \prod_{0 \leq b < d} (t - \zeta^b)^{A(\zeta^b)}$$

の形をしている. 一方、X の特異点 p に対して局所アレクサンダー多項式 $\Delta_p(t)$ が定義され、さらに、局所被約アレクサンダー多項式 $\tilde{\Delta}_p(t)$ も定義される. $\tilde{\Delta}_p(t)$ は $\Delta_p(t)$ の因子. 詳しくは §2 を参照. Dimca[D2] によって次の可除定理が証明された.

定理　上記の条件の元で、

$$(1) \qquad \Delta_X(t) \Big| \prod_{p \in \mathrm{Sing}(X)} \tilde{\Delta}_p(t)$$

が成立する.

この事実はXが$\mathbf{Q}$-多様体の場合には Libgober[L2] に述べられた．最近送られて来たプレプリント Libgober[L3] には別証明が述べられている．また$n=2$でXが既約の場合には [L1] を、またXが可約の場合には先駆的な仕事 [LV] を参照されたい．

このノートでは上記可除定理の証明を与える．概ね [D2] に沿ったが、なるべく初等的な形になるよう努めた．

2 局所アレクサンダー多項式

$\mathbf{C}^n$の原点pにおける孤立超曲面特異点(V,p)を考える．pの近傍におけるVの定義方程式を$g(x)$とし、次の記号を用いる．

B_ε 半径εの球

S_ε 半径εの球面

K_ε $S_\varepsilon \cap V$

Milnor[M] によればεを十分小さくとるとき、写像$S_\varepsilon \backslash K_\varepsilon \ni x \xrightarrow{\phi} g(x)/|g(x)| \in S^1$ はファイバー・バンドルの構造を持つ．このとき、$F_p=\phi^{-1}(1)$ と置くとF_pのコホモロジー群は$H^i(F_p,\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$（$i=0$）、$=\mathbf{Z}^\mu$（$i=n-1$）、$=0$（その他の$i$）の形をとることが知られている．中間次元のベッチ数$\mu=\dim H^i(F_p,\mathbf{Z})$は$(V,p)$の Milnor 数と呼ばれている．以下$\varepsilon$を省略し、$F=F_p$という略記も用いる．またコホモロジー群は$\mathbf{C}$係数とする．

$S\backslash K$はS^1上のファイバー・バンドルだから、モノドロミー作用素$h:F\to F$が自然に定義される．線形写像$h^*:H^{n-1}(F)\to H^{n-1}(F)$の特性多項式$\Delta_p(t)$を$(V,p)$の局所アレクサンダー多項式と呼ぶ．さらに、次の被約局所アレクサンダー多項式を定

義する.

(2) $$\tilde{\Delta}_p(t) = \prod_{\lambda}(t-\lambda)^{a_p(\lambda)}$$

ただし、指数 $a_p(\lambda)$ は次で定める.

$$a_p(\lambda) = \dim \mathrm{Ker}(h^* - \lambda I)$$

注意 1 (a) $\Delta_p(t) \in \mathbf{Z}[t]$、(b) $\tilde{\Delta}_p(t)|\Delta_p(t)$、(c) h^*が対角化可能ならば、$\tilde{\Delta}_p(t) = \Delta_p(t)$. 特に$h^*$が有限位数ならば$h^*$は対角化可能である. h^*が無限位数になる例については [A1],[Du],[W] 等を参照. (d) 加重付き斉次多項式の場合の計算方法は [M](cf. [Lo]、p.167) に与えられている. (e) $n=2$ のとき、$\Delta_p(t)$ の計算方法は [A2],[S] 等に述べられている.

補題 1 Wang の完全系列が成立する.

$$\to H^i(S\backslash K) \to H^i(F) \xrightarrow{h^*-I} H^i(F) \to H^{i+1}(S\backslash K) \to$$

証明 $S\backslash K$はS^1上のファイバー・バンドルだから$S\backslash K \approx F\times I/(x,0)\sim(h(x),1)$. 従って、次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & H^i(S\backslash K) & \to & H^i(F) & \to & H^{i+1}(S\backslash K, F) \\
 & \downarrow & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow \\
\to & H^i(F\times I) & \xrightarrow{\gamma} & H^i(\partial(F\times I)) & \xrightarrow{\delta} & H^{i+1}(F\times I, \partial(F\times I))
\end{array}$$

同一視 $H^i(F\times I) \cong H^i(F)$、$H^i(\partial(F\times I)) \cong H^i(F)\oplus H^i(F)$ をすると、$\gamma(\eta) = (\eta,\eta)$ だからγは単射. 従って、$H^{i+1}(F\times I, \partial(F\times I)) \cong H^i(F)$. このとき、$\delta\circ\alpha(\xi) = h^*(\xi)-\xi$. よって、$H^{i+1}(S\backslash K, F) \cong H^{i+1}(F\times I, \partial(F\times I))$ に注意することによって、上記補題の完全系列を得る.

系

$$a_p(1) = \begin{cases} \dim H^{n-1}(B\backslash V) & n > 2 \text{ の場合} \\ \dim H^{n-1}(B\backslash V) - 1 & n = 2 \text{ の場合} \end{cases}$$

定義 1　$H_p^i(V) = H^i(V, V\backslash p)$

補題 2　$a_p(1) = \dim H_p^{n-1}(V)$

証明　切除定理によって、$H_p^i(V) \cong H^i(V\cap B, V\cap B\backslash p)$．従って、$i \geq 2$のとき、$H_p^i(V) \cong H^{i-1}(V\cap B\backslash p)$．また、$\dim H_p^1(V) = \dim H^0(V\cap B\backslash p) - 1$．Thom同型によって同型$H^{i-1}(V\cap B\backslash p) \cong H^{i+1}(B\backslash p, B\backslash V)$が成立する．完全系列

$$\to H^i(B\backslash V) \to H^{i+1}(B\backslash p, B\backslash V) \to H^{i+1}(B\backslash p) \to H^{i+1}(B\backslash V)$$

を用いて、$H^i(B\backslash V) \cong H^i(S\backslash K) = 0\ (i \neq n, n-1, 0)$、$H^i(B\backslash p) = 0\ (i \neq 2n-1, 0)$に注意すると

$$(3)\quad \dim H_p^{n-1}(V) = \begin{cases} \dim H^{n-1}(B\backslash V) & n > 2 \text{ の場合} \\ \dim H^{n-1}(B\backslash V) - 1 & n = 2 \text{ の場合} \end{cases}$$

を得る．そこで、上記の系と併せて補題2を得ることができる．

注意 2

$$a_p(1) = \begin{cases} \dim H_p^n(V) & n > 2 \text{ の場合} \\ \dim H_p^n(V) - 1 & n = 2 \text{ の場合} \end{cases}$$

注意 3

$$H_p^{n+1}(V) = \begin{cases} 0 & n \neq 3 \text{ の場合} \\ \mathbf{C} & n = 3 \text{ の場合} \end{cases}$$

さて$\zeta = e^{2\pi i/d}$として値$a(\zeta^b)$を扱うために、$g(x) - t^d = 0$で定義された1次元高い孤立超曲面特異点$(\tilde{V}, \tilde{p})$を考える．$(\tilde{V}, \tilde{p})$のMilnorファイバーとモノドロミー作用素をそれぞれ$F_{\tilde{p}}, \tilde{h}$で表す．$G = \{\zeta^i | 0 \leq i < d\}$は位数$d$の巡回群である．$G$は$\zeta^i \cdot (x, t) = (x, \zeta^i t)$によって、$(\tilde{V}, \tilde{p})$に作用する．一般に$G$がベクトル空間$E$に作用しているとき、

$$E^{\chi_b} = \{v \in E | \zeta^i \cdot v = \zeta^{bi} v\}$$

と置く．ここで、χ_bは$\chi_b(\zeta^i) = \zeta^{bi}$となる$G$の指標．もちろん、$\chi_b$は$b \bmod d$で決定される．ところで，$G$は自然に$H^n_{\tilde{p}}(\tilde{V})$にも作用する．このとき次が成立する．

補題3

$$a_p(\zeta^b) = \dim\, H^n_{\tilde{p}}(\tilde{V})^{\chi_b}, \qquad 0 < b < d.$$

証明　補題2を$(\tilde{V}, \tilde{p})$に適用して、$a_{\tilde{p}}(1) = \dim\, H^n_{\tilde{p}}(\tilde{V})$. 分解

$$H^n_{\tilde{p}}(\tilde{V}) = \bigoplus_{0 \leq b < d} H^n_{\tilde{p}}(\tilde{V})^{\chi_b}$$

を考える．$F_d = \{t \in \mathbf{C} | t^d - 1 = 0\}$とすると，Sebastiani-Thom([ST],[O])の定理によって、$H^n(F_{\tilde{p}}) \cong H^{n-1}(F_p) \otimes \tilde{H}^0(F_d)$.
このことから、

$$\{\mathrm{Ker}\ (\tilde{h}^* - I)\}^{\chi_b} = H^{n-1}(F_p)^{\chi_{-b}} \otimes \tilde{H}^0(F_d)^{\chi_b}$$

が成立することが分かる．従って、等式$a_p(\zeta^{-b}) = \dim\, H^n_{\tilde{p}}(\tilde{V})^{\chi_b}$が成り立つ．ここで、$\Delta_p(t)$は実多項式だから、$a_p(\zeta^b) = a_p(\zeta^{-b})$.
以上により、補題3が示された．Q.E.D.

3 可除定理の証明

§1 の記号を用いる．すなわち、$X = \{f(x) = 0\} \subset \mathbf{P}^n$ を孤立特異点のみを持つ超曲面とする．以下、$n \geq 2$ とする．$S = \mathrm{Sing}(X) = \{p_1, \ldots, p_s\}$ と置く．$F_X = \{f(x) = 1\} \subset \mathbf{C}^{n+1}$、$G = \{\zeta^b | \zeta = e^{2\pi i/d}, 0 \leq b < d\}$ であった．次の記号を用いる．

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{P}^n \backslash X \\ X^* &= X \backslash S \\ \mathbf{P}^* &= \mathbf{P}^n \backslash S \end{aligned}$$

定義 2　$a(\lambda)$ および $A(\lambda)$ を

$$\prod_{p_i} \tilde{\Delta}_{p_i}(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{a(\lambda)}$$

$$\Delta_X(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{A(\lambda)}$$

で定める．特に、$a(\lambda) = \sum a_{p_i}(\lambda)$．

可除定理は各λについて不等式

$$A(\lambda) \leq a(\lambda) \tag{4}$$

が成立することと同値である．実際には、$\lambda = \zeta^b, b = 0, \ldots, d-1$ の場合に調べれば十分である．証明の基本になるのは次の局所コホモロジー完全系列である．

$$\rightarrow H_S^i(X) \rightarrow H^i(X) \rightarrow H^i(X^*) \rightarrow$$

補題 4　次の完全系列が成立する．

$$0 \rightarrow H^{n-1}(U) \rightarrow H_S^{n-1}(X) \rightarrow H^n(U)$$

証明　最初にUはアフィン多様体だから，$i \geq n+1$のとき、$H^i(U)=0$であることを注意しておく．次の定義をする．

$$H_0^i(X) = \mathrm{Coker}\,(H^i(\mathbf{P}^n) \to H^i(X)),$$

$$H_0^i(X^*) = \mathrm{Coker}\,(H^i(\mathbf{P}^n) \to H^i(X^*)),$$

$H^i(\mathbf{P}^n)$の像は$H^i(X) \to H^i(X^*)$において消えないので、次は完全系列．

$$H_0^{n-2}(X) \to H_0^{n-2}(X^*) \to H_S^{n-1}(X) \to H_0^{n-1}(X) \to H_0^{n-1}(X^*)$$

(5)

完全系列　$\to H^{n-1}(\mathbf{P}^n) \to H^{n-1}(X) \to H^n(\mathbf{P}^n, X) \to$ がある．Poincaré-Lefschetzの双対定理により、$H^n(\mathbf{P}^n, X) \cong H_n(U)$だから、$H^{n-1}(\mathbf{P}^n) \to H^{n-1}(X)$が単射であることに注意すると

(6) $$H_0^{n-1}(X) \cong H^n(U)$$

が判明する．同様に、

(7) $$H_0^{n-2}(X) \cong H^{n+1}(U) = 0$$

次に、完全系列

$$\to H^i(U) \to H^{i+1}(\mathbf{P}^*, U) \to H^{i+1}(\mathbf{P}^*) \to H^{i+1}(U) \to$$

を用いる．Thom同型によって、$H^{i-1}(X^*) \cong H^{i+1}(\mathbf{P}^*, U)$が成立するので、完全系列

$$0 \to H^{n-1}(U) \to H^{n-2}(X^*) \to H^n(\mathbf{P}^*) \to 0$$

を得る．一方、完全系列

$$\to H^n(\mathbf{P}^n) \to H^n(\mathbf{P}^*) \to H^{n+1}(\mathbf{P}^n, \mathbf{P}^*) \to H^{n+1}(\mathbf{P}^n) \to$$

によって、$H^n(\mathbf{P}^*) = 0$（n 奇数）、$= \mathbf{C}$（n 偶数）が分かる．明らかに、$H^{n-2}(\mathbf{P}^n) \longrightarrow H^{n-2}(X^*)$ は単射であるから、

$$(8) \qquad H_0^{n-2}(X^*) = H^{n-1}(U)$$

が成立する．上記の (6)、(7) および (8) を完全系列 (5) に代入することによって、補題 4 の証明が終わる．Q.E.D.

不等式 (4) の証明 ($\lambda = 1$ の場合)．$F_X/G = U$ だから、$A(1) = \dim H^{n-1}(U)$ である．また補題 2 を用いると $a(1) = \dim H_S^n(X)$ が分かる．従って、補題 4 の全射性は不等式 (4) を示している．

$\lambda \neq 1$ について不等式 (4) を証明するには以下で定義される $\tilde{X}$ の考察が必要になる．

$$\tilde{X} = \{f(x) - t^d = 0\} \subset \mathbf{P}^{n+1}$$

このとき、$\pi : \tilde{X} \longrightarrow \mathbf{P}^n$ は d 重の被覆写像であって、$\tilde{S} = \mathrm{Sing}(\tilde{X}) = \pi^{-1}(S)$ となっている．各 p_i の逆像は 1 点 $\tilde{p}_i$ である．$\tilde{U} = \mathbf{P}^{n+1} \backslash \tilde{X}$、$\tilde{H} = \{t = 0\}$ と置くと $\tilde{U} \cap \tilde{H} = U$、$\tilde{U} \backslash \tilde{H} = \mathbf{C}^{n+1} \backslash F_X$ である．G は $(\zeta^b)(x,t) = (x, \zeta^b t)$ によって $\mathbf{P}^{n+1}$ に作用している．G はさらに $\tilde{U}$ にも作用している．また F_X 上にも自然に $x \longrightarrow \zeta^{-1} x$ によって作用している．次の完全系列がある．

$$\longrightarrow H^i(\tilde{U}) \longrightarrow H^i(\tilde{U} \backslash \tilde{H}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{U}, \tilde{U} \backslash \tilde{H}) \longrightarrow$$

ここで留数写像によって $H^i(\tilde{U} \backslash \tilde{H}) = H^i(\mathbf{C}^{n+1} \backslash F_X) \cong H^{i-1}(F_X)$ が成立する．また $U \subset \tilde{U}$ に関する Thom 同型によって、$H^{i-1}(U) \cong H^{i+1}(\tilde{U}, \tilde{U} \backslash \tilde{H})$ となっている．以上をまとめて完全系列

$$\longrightarrow H^n(\tilde{U}) \longrightarrow H^{n-1}(F_X) \xrightarrow{\phi} H^{n-1}(U) \longrightarrow$$

を得る．$H^{n-1}(F_X)^G = H^{n-1}(U)$ だったから、写像ϕは全射．このことから、$0 < b < d$ なる b について

$$H^n(\tilde{U})^{\chi_b} \cong H^{n-1}(F_X)^{\chi_{-b}}$$

が成立する．よって、$A(\zeta^b) = \dim H^n(\tilde{U})^{\chi_b}$ が成り立つ．

不等式 (4) の証明 ($\lambda \neq 1$ の場合)．補題 3 により、$a(\zeta^b) = \dim H^n_{\tilde{S}}(\tilde{X})^{\chi_b}$である．一方、$\tilde{X}$に関する補題 4 によって、

$$0 \to H^n(\tilde{U})^{\chi_b} \to H^n_{\tilde{S}}(\tilde{X})^{\chi_b}$$

が成立する．以上により不等式 (4) が$\lambda = \zeta^b$、$0 < b < d$ についても成り立つことが示された．

注意 4　[D2] では補題 4 の代わりに [D1] で述べられた逆の向きの完全系列

$$H^n(U) \to H^n_S(X) \to H^{n-1}(U) \to 0$$

を用いている．ただ、$n = 2, 3$ の場合には、別に特別な議論が必要で、[D1]、[D2] の証明そのままでは不備である．この意味で、上記補題 4 の完全系列を用いる方がシンプルである．Dimca 氏の手紙によれば近く出版予定の著書の中では低次元の場合の議論をしてあるとの事である。

4　Lefschetz 型双対定理

Poincaré-Lefschetz 双対定理および Thom 同型定理についてまとめておく．詳細は [Do] 参照．

Poincaré-Lefschetz 双対定理 （cf. [Do], p.297） $X \supset T \supset S$をコンパクト多面体、$X \setminus S$は向き付け可能な n 次元多様体、Sは

Tの閉集合とし、$T\backslash S$は$X\backslash S$の閉空間を仮定する．このとき、任意のアーベル群Gに対して次の双対同型が存在する．

$$H^i(T,S,G)\cong H_{n-i}(X\backslash S, X\backslash T, G)$$

例 1　$X\subset \mathbf{P}^{n+1}$を超曲面とし、$S=\mathrm{Sing}(X)$、$X^*=X\backslash S$とおくと、

$$H^i(X,S)\cong H_{2n-i}(X^*)$$

Thom 同型 (cf. [Do], p.314)　Mを向き付け可能m次元多様体、Nをそのn次元閉部分多様体とする．さらに、(T,S)をNの閉部分集合の組とする．$k=m-n$とすると、次の同型が存在する．

$$H_i(N\backslash S, N\backslash T)\cong H_{i+k}(M\backslash S, M\backslash T)$$

例 2　§3 の状況に適用してみる．$M=\mathbf{P}^*, N=T=X^*, S=\emptyset, U=\mathbf{P}^n\backslash X$とすることによって、同型

$$H_i(X^*)\cong H_{i+2}(\mathbf{P}^*, U)$$

を得る．

例 3　留数写像　$H^i(\mathbf{C}^{n+1}\backslash F_X)\to H^{i-1}(F_X)$の同型性を導いてみよう．まず、Thom 同型によって、

$$H^{i-1}(F_X)\cong H^{i+1}(\mathbf{C}^{n+1}, \mathbf{C}^{n+1}\backslash F_X)$$

が成立する．次の完全系列がある．

$$H^i(\mathbf{C}^{n+1})\to H^i(\mathbf{C}^{n+1}\backslash F_X)\to H^{i+1}(\mathbf{C}^{n+1}, \mathbf{C}^{n+1}\backslash F_X)\to$$

従って、$i>0$のとき、同型

$$H^i(\mathbf{C}^{n+1}\backslash F_X)\cong H^{i-1}(F_X)$$

が成立する．

参考文献

[A1] A'Campo,N.:Sur la monodromie des singularités isoleés d'hypersurfaces complexes. Invent. Math. **20**, 147–169 (1973)

[A2] A'Campo,N.:La fonction zêta d'une monodromie. Comment. Math. Helv. **50**, 233–248 (1975)

[D1] Dimca,A.:Betti numbers of hypersurfaces and defects of linear systems. Duke Math. J. (1990)

[D2] Dimca,A.:Alexander polynomials for projective hypersurfaces. Preprint (1989)

[Do] Dold,A.:Lectures on Algebraic Topology. Grund. Math. Wiss. **200** (1972)

[Du] Durfee,A.H.:The characteristic polynomial of the monodromy. Pac. J. Math. **59**, 21–26 (1975)

[L1] Libgober,A.:Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes. Duke Math. J. **49**, 833–851 (1982)

[L2] Libgober,A.:Homotopy groups of the complements to singular hypersurfaces. Bull. A.M.S. **13**, 49–51 (1985)

[L3] Libgober,A.:Homotopy groups of the complements to singular hypersurfaces II. Preprint (1992)

[Lo] Looijenga,E.J.N.:Isolated singular points on complete intersections. London Math. Soc. Lecture Note **77** (1984)

[M] Milnor,J.:Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Studies **61** Princeton Univ. Press 1968.

[O] Oka,M.:On the homotopy types of hypersurfaces defined by wighted homogeneous polynomials, Topology **12**, 19–32 (1973)

[S] Steenbrink,J.H.M.:Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. In real and complex singularities, Oslo. Sijthoff and Noordhoff, 5–25 (1976)

[ST] Sebastiani,M. and Thom,R.:Un résultat sur la monodromie. Invent. Math. **13**, 90–96 (1971)

[W] Woods,J.M.:Some criteria for finite and infinite monodromy of plane algebraic curves. Invent. Math. **26**, 179–185 (1974)