数理解析研究所講究録
第808巻1992年209-226

Clebsch-Gordan Coefficients for $U_q(su(1,1))$

早大理工数学 澁川陽一 (Youichi Shibukawa)

本稿では、量子群$U_q(sl_2)$の1つの実形である$U_q(su(1,1))$の紹介として、$U_q(su(1,1))$の無限次元既約ユニタリ表現、特に離散系列の表現とそのテンソル積表現の分解について、Lie環sl_2の表現論と対比させながら扱っていく。

1. 量子群$U_q(sl_2)$とその実形の表現

以下、本稿を通じてqは $0<q<1$ であるとする。

1.1 量子群$U_q(sl_2)$

<u>定義 1.1.1</u> Lie環sl_2の包絡環$U(sl_2)$のq-analogue $U_q(sl_2)$は、次の生成元と基本関係式により定められる$\mathbb{C}$上のalgebraである。

生成元 $k^{\pm 1}, e, f$

基本関係式 $kk^{-1} = k^{-1}k = 1$

$$ke k^{-1} = qe \ , \ kfk^{-1} = q^{-1}f$$

$$[e, f] = \frac{k^2 - k^{-2}}{q - q^{-1}}$$

この $U_q(sl_2)$ を省略して U_q と表し、「量子群 U_q」などと書くこともある。なぜこれが sl_2 の包絡環の q-analogue と呼ばれるかということについては、神保［2］を参照のこと。

さらに、量子群 U_q は Hopf 代数の構造を持つ。以下に余積 Δ だけ定義しておく。

定義 1.1.2　余積 Δ は $U_q \to U_q \otimes U_q$ の algebra homomorphism で、生成元上

$$\begin{cases} \Delta(k^{\pm 1}) = k^{\pm 1} \otimes k^{\pm 1} \\ \Delta(e) = k^{-1} \otimes e + e \otimes k \\ \Delta(f) = k^{-1} \otimes f + f \otimes k \end{cases}$$

となっている。

1.2. Lie 環 sl_2 の実現

定義 1.2.1　Lie 環 sl_2 は

$$sl_2 = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus \mathbb{C}H$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という3次元ベクトル空間で、次の bracket 積が定められてい

るものである。

$$[X, Y] = XY - YX \qquad (\forall X, Y \in sl_2)$$

よく知られているように、Lie環 sl_2 は2変数の多項式環 $\mathbb{C}[s,t]$ 上の微分作用素として実現される。実際、

$$E := s\partial t, \quad F := t\partial s, \quad H := s\partial s - t\partial t$$

とおいてやるとよい。これはLie環 sl_2 の表現を $\mathbb{C}[s,t]$ 上に構成したということである。このとき、既約成分として次のものが現れる。

$$V_j = \bigoplus_{m=-j}^{j} \mathbb{C}\, T_m^j \qquad (j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \cdots, \quad m = -j, -j+1, \cdots, j)$$

$$T_m^j := \frac{s^{j+m}\ t^{j-m}}{\{(j+m)!\,(j-m)!\}^{\frac{1}{2}}}$$

そして基底 $\{T_m^j\}$ に対する H, E, F の作用が

$$\begin{cases} H T_m^j = 2m\, T_m^j \\ E T_m^j = \{(j+m+1)(j-m)\}^{\frac{1}{2}}\, T_{m+1}^j \\ F T_m^j = \{(j+m)(j-m+1)\}^{\frac{1}{2}}\, T_{m-1}^j \end{cases}$$

となることは、容易に確かめられる。

この表現はLie環 sl_2 のコンパクトな実形 $su(2)$ の既約ユニタリ表現となっている。

<u>定義1.2.2</u> $su(2) = \{ A \in sl_2 \mid A + {}^t\bar{A} = 0 \}$

この $su(2)$ の定義には別の表示がある。

<u>定義 1.2.3</u>　antilinear な antiautomorphism である写像 $*: sl_2 \to sl_2$ を　$H^* = H$, $E^* = F$, $F^* = E$　で定める。このとき

$$su(2) := \{ A \in sl_2 \mid A^* = -A \}$$

実際、$A \in sl_2$ に対し、$A^* = {}^t\bar{A}$ となっているので、定義 1.2.2 がこのように書き換えられることは当然である。そこで、以下我々は $su(2)$ を sl_2 と写像 $*$ との組とみなしていく。

$$su(2) := (sl_2, *)$$

<u>定義 1.2.4</u>　sl_2 の表現 V に、

$$\langle av, w \rangle = \langle v, a^* w \rangle \qquad a \in sl_2,\ v, w \in V$$

を満たす Hermite 内積が定められているとき、表現 V を $su(2)$ のユニタリ表現という。

前出の V_j に対しては、

$$\langle T^j_m, T^j_{m'} \rangle = \delta_{mm'}$$

として Hermite 内積を導入すればよい。

1.3　量子群 U_q の実現

セクション1.2と同様に、量子群 U_q にも実現がある。x, u を変数とする。そして、

$$A := \{ \varphi = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{mn} x^m u^n \mid \varphi_{mn} \in \mathbb{C},\ \exists m_0 \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \varphi_{mn} = 0\ (\forall m > m_0) \}$$

$$\varphi = \psi \iff \varphi_{mn} = \psi_{mn}\ (\forall m, n)$$

とおく。これは、x については負巾を許している。また φ の

中の和には形式的無限和も許しているベクトル空間である。

このAには代数構造とU_q-moduleの構造が入る。

<u>代数構造</u>　$x^m u^n \cdot x^{m'} u^{n'} := q^{m'n}\, x^{m+m'}\, u^{n+n'}$

正確には、

$$\varphi \cdot \psi := \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \Big(\sum_{\substack{m' \in \mathbb{Z} \\ n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{m-m', n'}\, \psi_{m', n-n'}\, q^{m'n'} \Big) x^m u^n$$

係数のところに現れているm', n'は、(m, n)をfixしたときに、いずれも有限の範囲しか動かないことに注意。

<u>U_q-module構造</u>

$$\begin{cases} e\, x^m u^n = q^{\frac{1}{2}(-m+n-1)}\, [n]\, x^{m+1}\, u^{n-1} \\ f\, x^m u^n = q^{\frac{1}{2}(m-n-1)}\, [m]\, x^{m-1}\, u^{n+1} \\ k\, x^m u^n = q^{\frac{1}{2}(m-n)}\, x^m u^n \end{cases}$$

ただし、$[m] = \dfrac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$とおく。これは$q$-integerと呼ばれる。

<u>Remark</u>　この代数構造とU_q-module構造の間には、q-Leibniz ruleといわれる関係がある。これは次のものである。

$$a(x^m u^n \cdot x^{m'} u^{n'}) = \mu(\Delta(a)(x^m u^n \otimes x^{m'} u^{n'}))$$

ただし、$\mu(\varphi \otimes \psi) = \varphi \psi$である。

Aの既約成分（a / 部）は次のようになっている。

$$\tilde{V}_j := \bigoplus_{m=-j}^{j} \mathbb{C}\, \tilde{T}^j_m \qquad (j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \cdots)$$

$$\tilde{T}^j_m := \frac{x^{j+m}\, u^{j-m}}{([j+m]!\,[j-m]!)^{\frac{1}{2}}}$$

ただし、$[m]! = [m][m-1]\cdots[1]$，$[0]! = 1$ とする。

$$\begin{cases} k^{\pm 1}\, \tilde{T}^j_m = q^{\pm m}\, \tilde{T}^j_m \\ e\, \tilde{T}^j_m = ([j+m+1][j-m])^{\frac{1}{2}}\, \tilde{T}^j_{m+1} \\ f\, \tilde{T}^j_m = ([j+m][j-m+1])^{\frac{1}{2}}\, \tilde{T}^j_{m-1} \end{cases}$$

前出の表現V_jと比較してみると、$\tilde{T}^j_m$や、e、fの作用については、整数が q-integer に変わっただけである。

1.4 量子群U_qの実形

前出の既約表現$\tilde{V}_j$は量子群U_qの実形$U_q(su(2))$の既約ユニタリ表現となっている。これについて説明していく。

まずここで、$U_q(su(2))$といっているのは、量子群$U_q(sl_2)$と写像$*$：$U_q(sl_2) \to U_q(sl_2)$の組のことである（定義1.2.3およびその下参照）。

$$U_q(su(2)) := (U_q(sl_2), *)$$

この$*$は antilinear な antiautomorphism で、$U_q(su(2))$の場合、

$$k^* = k, \quad e^* = f, \quad f^* = e$$

というものである。このように$*$を定めてやると、$\tilde{V}_j$に次のような Hermite 内積が入る。

$$\langle a v, w \rangle = \langle v, a^* w \rangle \qquad a \in U_q,\ v, w \in \tilde{V}_j$$

$$\langle \tilde{T}^j_m, \tilde{T}^j_{m'} \rangle = \delta_{mm'}$$

これをもって、表現$\tilde{V}_j$はユニタリ表現であるといっている。$U_q(su(2))$の既約ユニタリ表現が、$\tilde{V}_j$ ($j=0,\frac{1}{2},1,\cdots$) で尽くされるということはよく知られている事実である。

さて、Lie環 sl_2 には、実形 $su(2)$ の他に non-compact な実形である $su(1,1)$ も存在する。その q-analogue $U_q(su(1,1))$ は、

$$U_q(su(1,1)) := (U_q(sl_2), *)$$
$$k^* = k, \quad e^* = -f, \quad f^* = -e.$$

として定義される。

1.5 離散系列の表現

前出の表現$\tilde{V}_j$ は $U_q(su(2))$の既約ユニタリ表現ではあるが $U_q(su(1,1))$ の既約ユニタリ表現とはなっていない。ユニタリ性が成立しないからである。実際、$U_q(su(1,1))$ の既約ユニタリ表現は無限次元表現である。この中で最も簡単な表現が、次に示す離散系列の表現である。

$$V_l = \bigoplus_{m=l+1}^{\infty} \mathbb{C}\, \xi_m^l = \{ \varphi \in A \mid \varphi = \underset{\text{有限和}}{\sum_{m \geq l+1}} \varphi_m \xi_m^l \}$$

$$(l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \cdots, \quad m = l+1, l+2, \cdots)$$

$$\xi_m^l = (-1)^{m-l-1} q^{-\frac{1}{2}(m-l-1)(m+3l+2)} \left(\frac{[m+l\,;q]!}{[m-l-1\,;q]!\,[2l+1\,;q]!} \right)^{\frac{1}{2}} \times x^{-m-l-1} u^{m-l-1}$$

$$\begin{cases} k\xi_m^l = q^{-m}\xi_m^l \\ e\xi_m^l = -q^{-m+\frac{3}{2}}([m+l;q][m-l-1;q])^{\frac{1}{2}}\xi_{m-1}^l \\ f\xi_m^l = q^{-m+\frac{1}{2}}([m+l+1;q][m-l;q])^{\frac{1}{2}}\xi_{m+1}^l \end{cases}$$

$$\langle \xi_m^l, \xi_{m'}^l \rangle = \delta_{mm'}.$$

ただし、$[n;q] = \dfrac{1-q^{2n}}{1-q^2} = q^{n-1}[n]$ とおく。ここで、ξ_m^l の中に、α の負巾が出てきていることに注意。

2. $U_q(su(1,1))$ の Clebsch－Gordan 係数

このセクションでは、$U_q(su(1,1))$ の離散系列 V_l のテンソル積表現の分解と、それに応じた Clebsch－Gordan 係数の計算方法を示していく。この方法は、$su(2)$ の場合でいうと van der Waerden が示した不変式を用いる方法ということになる。以下、これを説明する。

2.1 $su(2)$ の Clebsch－Gordan 係数（van der Waerden の方法）

<u>定義 2.1.1</u> 2変数多項式環 $\mathbb{C}[\bar{s},\bar{t}]$ 上、sl_2 の作用を

$$E = -\bar{t}\partial\bar{s}, \quad F = -\bar{s}\partial\bar{t}, \quad H = -\bar{s}\partial\bar{s} + \bar{t}\partial\bar{t}$$

と定める。このとき、$su(2)$ の既約ユニタリ表現 V_j の conjugate 表現 $\overline{V_j}$ をその既約成分、すなわち、

$$\overline{V_j} = \bigoplus_{m=-j}^{j} \mathbb{C}\,\overline{T}_m^j$$

$$\bar{T}^j_m = \frac{\bar{s}^{j+m}\,\bar{t}^{j-m}}{\{(j+m)!\,(j-m)!\}^{\frac{1}{2}}}$$

と定義する。

<u>定義 2.1.2</u>　$\varphi \in \mathbb{C}[s, t, \bar{s}, \bar{t}]$

（又は、$\varphi \in \mathbb{C}[s_1, t_1, s_2, t_2, \bar{s}, \bar{t}]$）が不変式

$\underset{\text{def}}{\iff}$　$H\varphi = E\varphi = F\varphi = 0$

<u>例 2.1.3</u>　$s_1 t_2 - t_1 s_2$，$s\bar{s} + t\bar{t}$ は不変式。

$\because$　$E(s_1t_2 - t_1s_2) = (s_1\partial t_1 + s_2\partial t_2)(s_1t_2 - t_1s_2)$

$$= -s_1s_2 + s_2s_1$$

$$= 0$$

$$F(s\bar{s}+t\bar{t}) = (t\partial_s - \bar{s}\partial_{\bar{t}})(s\bar{s}+t\bar{t})$$

$$= t\bar{s} - \bar{s}t$$

$$= 0$$

あとは省略。

このように $s\bar{s}+t\bar{t}$ が不変式であることがわかったので、$(s\bar{s}+t\bar{t})^{2j}$（$j=0, \frac{1}{2}, 1, \cdots$）も不変式である（Leibniz rule が存在するから。）。ところが、この式を2項展開すると

$$I := (s\bar{s}+t\bar{t})^{2j} = \sum_{m=-j}^{j} (2j)!\,(s\bar{s})^{j+m}(t\bar{t})^{j-m} / (j+m)!\,(j-m)!$$

$$= (2j)! \sum_{m=-j}^{j} T^j_m\, \bar{T}^j_m$$

となり、$(s\bar{s}+t\bar{t})^{2j} \in V_j \otimes \overline{V_j}$ となっている。

一方、$s_1t_2-t_1s_2$ も不変式だったので、

$$(s_1t_2-t_1s_2)^{j_1+j_2-j}(s_1\bar{s}+t_1\bar{t})^{j_1-j_2+j}(s_2\bar{s}+t_2\bar{t})^{-j_1+j_2+j}$$

も不変式となる。ただし、

$$|j_1-j_2| \leqq j \leqq j_1+j_2, \quad j_1, j_2 = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \cdots$$

ととる。これも展開すると、結局、

$$
\begin{aligned}
I' &:= (s_1t_2-t_1s_2)^{j_1+j_2-j}(s_1\bar{s}+t_1\bar{t})^{j_1-j_2+j}(s_2\bar{s}+t_2\bar{t})^{-j_1+j_2+j} \\
&= \sum_{\substack{m, m_1, m_2 \\ m=m_1+m_2}} \left\{ \sum_{\alpha} (-1)^{j_1+j_2-j-\alpha} \binom{j_1+j_2-j}{\alpha} \binom{j_1-j_2+j}{j_1+m_1-\alpha} \binom{-j_1+j_2+j}{j-j_1+m_2+\alpha} \right\} \\
&\quad \times \{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times T^{j_1}_{m_1} T^{j_2}_{m_2} \overline{T^{j}_{m}} \\
&= (-1)^{j_1+j_2-j}(j_1+j_2-j)!(j_1-j_2+j)!(-j_1+j_2+j)! \\
&\quad \times \sum_{m=m_1+m_2} \left\{ \frac{(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j+m)!}{(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!(j-m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \binom{j_1+m_1}{\alpha} \binom{j_2+m_2}{j-j_1+m_2+\alpha} \binom{j-m}{j_2-m_2-\alpha} \right\} T^{j_1}_{m_1} T^{j_2}_{m_2} \overline{T^{j}_{m}}
\end{aligned}
$$

これを表現の方でみてみる。よく知られているように、

<u>定理 2.1.4</u> (Clebsch-Gordan) $V_{j_1} \otimes V_{j_2} \simeq \bigoplus_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_{j'}$

これを用いると、

$$\left(V_{j_1}\otimes V_{j_2}\right)\otimes \overline{V_j} \simeq \left(\bigoplus_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_{j'}\right)\otimes \overline{V_j}$$

$$\underset{I'}{\Psi}$$

$$= \underset{\underset{I}{\Psi}}{V_j\otimes \overline{V_j}} \oplus \left(\bigoplus_{j'\neq j} V_{j'}\otimes \overline{V_j}\right)$$

そこで、Iの属している$V_j\otimes\overline{V_j}$のV_jを$V_{j_1}\otimes V_{j_2}$の分解により現れてくるV_jとみなしてやると、

$$I = (2j)!\sum_m T^j_m(j_1,j_2)\,\overline{T}^j_m \quad , \quad T^j_m(j_1,j_2)\in V_j\subset V_{j_1}\otimes V_{j_2}$$

さらに、定理2.1.4により、

$$T^j_m(j_1,j_2) = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1m_1\, j_2m_2 \mid jm\rangle\, T^{j_1}_{m_1}\, T^{j_2}_{m_2}$$

と表される。ここに出てくる係数$\langle j_1m_1\, j_2m_2 \mid jm\rangle$をClebsch-Gordan係数という。したがって、結局、

$$I = (2j)!\sum_{m,m_1,m_2} \langle j_1m_1\, j_2m_2 \mid jm\rangle\, T^{j_1}_{m_1}\, T^{j_2}_{m_2}\, \overline{T}^j_m$$

となる。

　ここで、van der Waerdenは不変式論から導かれる次の定理を用いた。

<u>定理2.1.5</u>（不変式論）　$I = cI'$　$(\exists c\in\mathbb{C})$

　よって、Clebsch-Gordan係数が求まるのである。

2.2 $U_q(su(1,1))$ の Clebsch-Gordan 係数

セクション 2.1 と同様にして、離散系列の表現のテンソル積 $V_{l_1}\otimes V_{l_2}$ に応じた Clebsch-Gordan 係数を求めていく。まずは、テンソル積表現の分解から見ていく。

定理 2.2.1 ([1]) $U_q(su(1,1))$-module として

$$V_{l_1}\otimes V_{l_2} \simeq \bigoplus_{l'\geq l_1+l_2+1} V_{l'}$$

したがって、この分解に応じて

$$\xi^{l'}_{m}(l_1,l_2) = \sum_{m_1,m_2}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l' \\ m_1 & m_2 & m\end{bmatrix}\xi^{l_1}_{m_1}\xi^{l_2}_{m_2}$$

と表される。この係数を Clebsch-Gordan 係数という。次に、V_l の conjugate な表現を定義する。

定義 2.2.2

$$\overline{A} := \left\{\varphi = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}}\varphi_{m,n}\,\overline{x}^m\,\overline{u}^n \;\middle|\; \varphi_{m,n}\in\mathbb{C},\ \exists m_0\in\mathbb{Z}\ \text{s.t.}\ \varphi_{m,n}=0\ (\forall m>m_0)\right\}$$

と定め、A と同様にして、$\overline{A}$ に代数構造を定める（x と $\overline{x}$, u と $\overline{u}$ を入れかえる）。一方、U_q-module 構造は次の通りとする。

$$\begin{cases} e\,\overline{x}^m\overline{u}^n = -q^{\frac{1}{2}(m-n-1)}[m]\,\overline{x}^{m-1}\,\overline{u}^{n+1} \\ f\,\overline{x}^m\overline{u}^n = -q^{\frac{1}{2}(-m+n-1)}[n]\,\overline{x}^{m+1}\,\overline{u}^{n-1} \\ k\,\overline{x}^m\overline{u}^n = q^{-\frac{1}{2}(m-n)}\,\overline{x}^m\,\overline{u}^n \end{cases}$$

このとき、離散系列の表現V_ℓのconjugateな表現$\overline{V_\ell}$を

$$\overline{V_\ell} = \bigoplus_{m \geqq \ell+1} \mathbb{C}\, \overline{\xi}^{\ell}_{m}$$

$$\overline{\xi}^{\ell}_{m} = (-1)^{m-\ell-1} q^{-\frac{1}{2}(m-\ell-1)(m+3\ell+2)} \left(\frac{[m+\ell;q]!}{[m-\ell-1;q]![2\ell+1;q]!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\, \overline{x}^{-m-\ell-1}\, \overline{u}^{m-\ell-1}$$

と定義する。

<u>定義 2.2.3</u>

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \overline{A} := \Big\{ \varphi = \sum_{\substack{m_1, m_2, m \in \mathbb{Z} \\ n_1, n_2, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{m_1 n_1 m_2 n_2 m n}\, x_1^{m_1} u_1^{n_1} x_2^{m_2} u_2^{n_2} \overline{x}^{m} \overline{u}^{n} \ \Big|$$

$$\varphi_{m_1 n_1 m_2 n_2 m n} \in \mathbb{C},\ \exists m_0 \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \varphi_{m_1 n_1 m_2 n_2 m n} = 0$$

$$\forall m_1, m_2, m > m_0 \Big\}$$

$$A \otimes \overline{A} := \Big\{ \varphi = \sum_{\substack{m, m' \in \mathbb{Z} \\ n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \varphi_{m n m' n'}\, x^{m} u^{n} \overline{x}^{m'} \overline{u}^{n'} \ \Big|\ \varphi_{m n m' n'} \in \mathbb{C},$$

$$\exists m_0 \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \varphi_{m n m' n'} = 0 \quad \forall m, m' > m_0 \Big\}$$

代数構造は前と同様に入れる。ただし、index が違うとcommute するものとする。U_q-module 構造は余積Δを用いて定義する。

$$\begin{cases} a\varphi = \mu \circ \mathrm{id} \otimes \mu (\mathrm{id} \otimes \Delta \circ \Delta(a) \cdot \varphi) & \varphi \in A_1 \otimes A_2 \otimes \overline{A} \\ a\varphi = \mu(\Delta(a)\, \varphi) & \varphi \in A \otimes \overline{A} \end{cases}$$

ここで、$A_1 \otimes A_2 \otimes \overline{A}$や$A \otimes \overline{A}$には$q$-Leibniz rule がないことに注意。

<u>定義 2.2.4</u>　$I \in A_1 \otimes A_2 \otimes \overline{A}$（又は $I \in A \otimes \overline{A}$）が不変式

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$　$kI = I$，$eI = fI = 0$

先程の例 2.1.3 のような形の不変式が存在する。

<u>例 2.2.5.</u>　$q^{\frac{1}{2}} x\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u\bar{u}$，$q^{\frac{1}{2}} x_1 u_2 - q^{-\frac{1}{2}} u_1 x_2$

次に $(q^{\frac{1}{2}} x\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u\bar{u})^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ が $V_l \otimes \overline{V_l}$ $(l = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots)$ に属するように p を定めてやりたいのだが、今度は，

$$p = -2l - 2 \quad (<0)$$

と，負巾になってしまう。しかも、

$$q^2 x\bar{x} \cdot u\bar{u} = u\bar{u} \cdot x\bar{x}$$

となっている。そこで，次の形式的な2項展開の公式を用いる。

<u>定理 2.2.6.</u>（2項展開）　$q^2 XY = YX$ のとき、

$$(X+Y)^m = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} X^{m-n} Y^n \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

ただし、$m \geq 0$ のとき，

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{[m;q]!}{[n;q]!\,[m-n;q]!} & m \geq n \geq 0. \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$m \geq 1$ のとき，

$$\begin{bmatrix} -m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n \end{bmatrix} (-q^{-2m})^n \, q^{-n(n-1)}$$

よって、

$$I := (q^{\frac{1}{2}} x\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u\bar{u})^{-2l-2}$$

$$= \sum_{m \geqq l+1} \begin{bmatrix} l+m \\ m-l-1 \end{bmatrix} (-q^{-2(2l+2)})^{m-l-1} q^{-(m-l-1)(m-l-2)}$$

$$\times (q^{\frac{1}{2}} x\bar{x})^{-m-l-1} (q^{-\frac{1}{2}} u\bar{u})^{m-l-1}$$

$$= \sum_{m \geqq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi^l_m \bar{\xi}^l_m$$

実際、$\sum_{m \geqq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi^l_m \bar{\xi}^l_m$ $(\in A \otimes \bar{A})$ は不変式である（正確には、$\sum_{m \geqq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi^l_m \bar{\xi}^l_m$ で $(q^{\frac{1}{2}} x\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u\bar{u})^{-2l-2}$ を定義するという方がよい。セクション 2.1 と対比させるために、このような形で説明した）。したがって、セクション 2.1 で見たように、I は

$$I = \sum_{m \geqq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \xi^l_m(l_1, l_2) \bar{\xi}^l_m \quad (\in A_1 \otimes A_2 \otimes \bar{A})$$

$$= \sum_{m \geqq l+1} (-1)^{m-l-1} q^{-m} \sum_{m_1, m_2} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix} \xi^{l_1}_{m_1} \xi^{l_2}_{m_2} \bar{\xi}^l_m$$

とみなせる。

一方、I' の方は、

$$I' := (q^{\frac{1}{2}} x_1\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u_1\bar{u})^{-l-l_1+l_2-1} (q^{\frac{1}{2}} x_1 u_2 - q^{-\frac{1}{2}} u_1 x_2)^{l-l_1-l_2-1}$$

$$\times (q^{\frac{1}{2}} x_2\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}} u_2\bar{u})^{-l+l_1-l_2-1} \qquad (l \geqq l_1+l_2+1)$$

とおくとよい。ただし、

$$(q^{\frac{1}{2}}x_1u_2 - q^{-\frac{1}{2}}u_1x_2)^{l-l_1-l_2-1}$$
$$:= \sum_{\beta\geq 0}\begin{bmatrix} l-l_1-l_2-1 \\ \beta \end{bmatrix}(q^{\frac{1}{2}}x_1u_2)^{l-l_1-l_2-1-\beta}(-q^{-\frac{1}{2}}u_1x_2)^{\beta}$$

$(\in A_1\otimes A_2\otimes \bar{A})$

と定める（こうすると、不変式になるので）。

ここで注意して欲しいのは、$A_1\otimes A_2\otimes \bar{A}$ には q-Leibniz rule がないので、I_1，I_2 が不変式であってもその積 I_1I_2 は必ずしも不変式とはならない、ということである。したがって I' は不変式であるが、その積の順番を入れかえたもの、例えば、

$$(q^{\frac{1}{2}}x_1u_2 - q^{-\frac{1}{2}}u_1x_2)^{l-l_1-l_2-1}(q^{\frac{1}{2}}x_1\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}}u_1\bar{u})^{-l-l_1+l_2-1}$$
$$\times (q^{\frac{1}{2}}x_2\bar{x} + q^{-\frac{1}{2}}u_2\bar{u})^{-l+l_1-l_2-1}$$

は必ずしも不変式ではない。

さて、不変式が2つ見つかったのであるから、あと必要なものは、それらが定数倍を除いて一致するということである。これは不変式の係数が満たすべき漸化式を求めて、これが初期条件を除いて一意的に解けることから証明される。

<u>命題 2.2.7</u>（[1]）　$I = cI'$　$(\exists c\in\mathbb{C})$

よってこれから Clebsch-Gordan 係数を求めることができる。

定理 2.2.8 ([1])

$$
\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix}
= \delta_{m, m_1+m_2}\ q^{2(l_1+1)\{(m-l-1)-(m_1-l_1-1)\}}
$$
$$
\times \left\{ \frac{[m-l-1]!\,[m_1-l_1-1]!\,[m_2-l_2-1]!\,[l-l_1-l_2-1]!\,[l+l_1+l_2+1]!\,[2l+1]}{[m+l]!\,[m_1+l_1]!\,[m_2+l_2]!\,[l+l_1-l_2]!\,[l-l_1+l_2]!} \right\}^{\frac{1}{2}}
$$
$$
\times \sum_{\nu} (-1)^{\nu}\, q^{\nu^2+\nu(4l_1+3)}
$$
$$
\times \frac{[(m+l)-(m_2+l_2)-1-\nu]!\,[m_2+l_2+\nu]!}{[\nu]!\,[l-l_1-l_2-1-\nu]!\,[m_1-l_1-1-\nu]!\,[(m-l-1)-(m_1-l_1-1)+\nu]!}
$$

ここで、νは、階乗が非負整数となるところのみを動く。また、上では $[n;q]$ を簡単のため $[n]$と表している。この係数は basic hypergeometric series ${}_3\phi_2$，特に q-Hahn 多項式で表される。

参考文献

[1] Y. S.: Clebsch-Gordan coefficients for $U_q(su(1,1))$ and $U_q(sl_2)$, and linearization formula of matrix elements. preprint (1990)

[2] 神保 道夫：量子群とヤン・バクスター方程式．シュプリンガー・フェアラーク東京

[3] G. Gasper, M. Rahman: Basic hypergeometric series. Encyclopedia of Math. and its appli. Vol. 35 Cambridge Univ. Press 1990.

[4] N. A. Liskova, A. N. Kirillov: Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for $U_q(SU(1,1))$. RIMS preprint (1991)

[5] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi, Y. Saburi, K. Ueno: Unitary representations of the quantum group $SU_q(1,1)$ I, II. Lett. Math. Phys. 19 187-204 (1990)

[6] H. Ruegg: A simple derivation of the quantum Clebsch-Gordan coefficients for $SU(2)_q$. J. Math. Phys. 31 (5) 1085-1087 (1990)

[7] B. L. van der Waerden: Group theory and quantum mechanics. Springer-Verlag 1974

以上.