数理解析研究所講究録
第 810 巻 1992 年 305-317

ゼータ関数の行列式表示とテンソル積

東大・数理科学　黒川信重(Nobushige KUROKAWA)

オイラー積をもつゼータ関数 $\zeta_M(s)$ (Mは数論的対象) は，ある線型作用素 D_M による モチーフ的な行列式表示

$$\zeta_M(s) = \det(D_M - s) = \prod_n \frac{\det(D_n^+ - s)}{\det(D_n^- - s)}$$

をもつと期待される。ここで，モチーフ的とは：①$\mathbb{R}$ 実現では $\zeta_M(s)$ は通常の $\zeta_M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ のゼータ関数であり，行列式表示は零点と極が D_M の固有値となることを意味し，② $\mathbb{Q}_p$ 実現では $\zeta_M(s)$ は p 進ゼータ関数 $\zeta_M : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ であり ($\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}_p}$)，行列式表示は“岩沢主予想”を意味する。

いま，2つのゼータ関数 $\zeta_{M_1}(s) = \det(D_{M_1} - s)$ と $\zeta_{M_2}(s) = \det(D_{M_2} - s)$ の“絶対テンソル積”

$$\zeta_{M_1} \otimes \zeta_{M_2}(s) = \text{“}\det\text{”}(D_{M_1} + D_{M_2} - s)$$

を $\zeta_{M_1 \times M_2}(s) = \det(D_{M_1 \times M_2} - s)$ に当る（一致する）ものとして考えたい。

とくに，次の条件☆が成立するようにしたい：

$$☆\ \boxed{\zeta_{M_1}(s_1)=0,\infty,\ \zeta_{M_2}(s_2)=0,\infty \Longrightarrow \zeta_{M_1}\otimes\zeta_{M_2}(s_1+s_2)=0,\infty.}$$

一つの候補は[3]-[5]で導入した多重ゼータ関数である。合同ゼータ関数（$\mathbb{F}_p$上のゼータ関数）の場合には$\mathbb{F}_p$上の相対テンソル積があるが，多重ゼータ関数としての絶対テンソル積は別の興味深いものになる。たとえば$\zeta_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p}(s)=(1-p^{-s})^{-1}$に対して，$\mathbb{F}_p$上の$r$回テンソル積はそのままであるが，多重ゼータ関数としてのテンソル積は[4][5]のようにr重双曲サイン関数（r重ガンマ関数，r重対数関数による表示をもつ）になり，位数rの有理型関数になる。最近，Manin[6]は"絶対モチーフ"（$\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_1$上のモチーフ；$\mathbb{F}_1$は$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$の"係数体"）を導入して絶対テンソル積を解釈した。

ゼータ関数の行列式表示とテンソル積に関して知られている部分を表にすると次頁のようになる。大域的行列式表示は標数0のハッセ・ヴェイユ型の場合（リーマン・ゼータ関数など）は予想であるが，他の場合はすでに古典的である。ただし，合同ゼータ関数の絶対行列式表示——フロベニウス作用素φ_pの代りに$\log_p\varphi_p\cong\sqrt{-\Delta_{S^1}}$を用いて——の意味付にはManin[6]の絶対モチーフが必要であろう。局所因子の行列式表示は双方の型に対してかなりよくわかっ

てきており，類似している。大域・局所にかかわらずどの行列式表示（絶対）も1階の微分作用素によって自然に与えられることは注目される。

		ハッセ・ヴェイユ型		セルバーグ型
		標数0	標数$p>0$（合同ゼータ）	
行列式表示	大域的	（予想）	$\det(1-\varphi_p\cdot p^{-s})$ φ_p：フロベニウス（Grothendieck） $\det(\log_p\varphi_p - s)$ 絶対行列式表示	$\det\left(\sqrt{-\Delta_M+\rho_0^2}-(s-\rho_0)\right)$ （Selberg）
局所的行列式表示	有限因子	$\det(\sqrt{-\Delta_{S^1}}-s)$ （Deninger[2]）		$\det(\sqrt{-\Delta_{S^1}}-s)\otimes\det(\sqrt{\Delta_{S^1}}+s)^{\otimes\ell}$ （多重化）
	無限因子	$\det(\sqrt{\Delta_{S^1}}+s)$ （Deninger[1]）		$\det\left(\sqrt{\Delta_{M'}+\rho_0^2}+s-\rho_0\right)$ M'はMのコンパクト双対[5]
テンソル積		絶対テンソル積（[3][4]）	$\mathbb{F}_p$上の相対テンソル積 絶対テンソル積[4]	$\zeta_{M_1\times M_2}(s)$

［ただし，Δ_Mは固有値が非負となる（ように符号をつけた）ラプラス作用素。］

ここでは $\boxed{1}$ 合同ゼータ関数，$\boxed{2}$ テンソル積：多重化，③行列式表示，の順に説明を補足したい。

1 合同ゼータ関数

M を $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ 上の有限型スキーム，ζ_M を合同ゼータ関数（ハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数）とすると Grothendieck により（相対）行列式表示がある：

① $$\zeta_M(s) = \prod_{i=0}^{2\dim M} \det\left(1 - \varphi_i \cdot p^{-s}\right)^{(-1)^{i+1}}$$

$$\varphi_i = \mathrm{Frob} \,|\, H^i_{et}(M \otimes \overline{\mathbb{F}_p})$$

② $M_1, M_2 / \mathbb{F}_p$ に対して $\zeta_{M_1 \times_{\mathbb{F}_p} M_2}(s)$ は ☆ をみたす：

$$\left.\begin{matrix} \zeta_{M_1}(s_1) = 0, \infty \\ \zeta_{M_2}(s_2) = 0, \infty \end{matrix}\right) \Longrightarrow \zeta_{M_1 \times_{\mathbb{F}_p} M_2}(s_1 + s_2) = 0, \infty 。$$

この ② は ① と Künneth 公式

$$H^i(M_1 \times_{\mathbb{F}_p} M_2) = \bigoplus_{i_1 + i_2 = i} \left(H^{i_1}(M_1) \otimes H^{i_2}(M_2)\right)$$

から得られる。相対行列式表示は次のように絶対行列式表示にできる：

$$\det(1 - \varphi \cdot p^{-s}) = \det(\log_p \varphi - s) 。$$

ここで，φ の固有値が $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ならば

$\log_p \varphi$ の固有値は $\log_p \lambda_i = \dfrac{\log \lambda_i}{\log p} + \dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\log p} m \quad (m \in \mathbb{Z})$

である。

この計算には次を用いる：

$$\prod_{m=-\infty}^{\infty}(m+z) = \begin{cases} 1-q_z & \cdots\ \mathrm{Im}(z)>0 \\ 1-q_z^{-1} & \cdots\ \mathrm{Im}(z)<0 \end{cases}$$
。

ただし，$q_z = e^{2\pi i z}$ であり，"ゼータ正規化された無限積" $\displaystyle\prod_{\lambda}(\lambda+s) = \exp\left(-\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{z=0} \sum_{\lambda}(\lambda+s)^{-z}\right)$

を用いている。行列（作用素）A に対して，その"行列式"は

$$\det(A+s) = \prod_{\lambda:\text{固有値}}(\lambda+s)$$

を意味するものとする。

$\boxed{2}$ テンソル積：多重化

$$Z_i(s) = \prod_{\rho\in\mathbb{C}}(s-\rho)^{m_i(\rho)}, \quad m_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

に対して，"テンソル積"（多重ゼータ関数）を

$$Z_1 \otimes Z_2(s) = \prod_{\rho_1,\rho_2\in\mathbb{C}}\left(s-(\rho_1+\rho_2)\right)^{m_1(\rho_1)m_2(\rho_2)\,\mathrm{sgn}(\rho_1,\rho_2)}$$

$$\mathrm{sgn}(\rho_1,\rho_2) = \begin{cases} +1 & \cdots\ \mathrm{Im}(\rho_i)\geqq 0\ (\text{すべての } i) \\ -1 & \cdots\ \mathrm{Im}(\rho_i)<0\ (\text{すべての } i) \\ 0 & \cdots\ \text{その他} \end{cases}$$

と定める。すると，一般に

$$Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_r(s) = \prod_{\rho_1, \ldots, \rho_r \in \mathbb{C}} (s - (\rho_1 + \cdots + \rho_r))^{m_1(\rho_1) \cdots m_r(\rho_r) \operatorname{sgn}(\rho_1, \ldots, \rho_r)}$$

$$\operatorname{sgn}(\rho_1, \ldots, \rho_r) = \begin{cases} +1 & \cdots \ \operatorname{Im}(\rho_i) \geqq 0 \ (\text{すべての} i) \\ (-1)^{r-1} & \cdots \ \operatorname{Im}(\rho_i) < 0 \ (\text{すべての} i) \\ 0 & \cdots \ \text{その他} \end{cases}$$

となる。一般に，有理型関数としての位数は

$$\operatorname{order}(Z_1 \otimes \cdots \otimes Z_r) = \operatorname{order}(Z_1) + \cdots + \operatorname{order}(Z_r)$$

を "generic" には満たす。

<u>例</u>：<u>多重双曲サイン関数</u>

$$\zeta^{\text{Hasse-Weil}}_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p}(s) = (1 - p^{-s})^{-1}$$

に対して

相対テンソル積：$\zeta_{\overbrace{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \times \cdots \times \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p}^{r}{}_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p}}(s) = (1 - p^{-s})^{-1}$

$$= \exp(\mathcal{L}i_1(p^{-s})),$$

ただし $\mathcal{L}i_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^r}$ ：r 重対数関数，であるが

絶対テンソル積は r 重双曲サイン関数で記述される：

$$\zeta_{\overbrace{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \times \cdots \times \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p}^{r}{}_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_1}}(s) = \zeta^{\otimes r}_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p}(s) = \exp\left(\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{r-1}} \mathcal{L}i_r(p^{-s}) + \text{“}\varepsilon\text{”} \right)$$

（“ε” は lower order term で explicit に書ける）。

[3] 行列式表示

セルバーグ・ゼータ関数の無限因子（ガンマ因子）の計算は数論的ゼータ関数の無限因子との類似が明白であるため，[5]に沿って結果を述べたい。他の行列式表示に関しては前に挙げた表を参照していただきたい。

階数1の局所対称空間 $M=\Gamma\backslash G/K$ を簡単のためコンパクトとする。Γ の有限次元表現 σ に対して，セルバーグ・ゼータ関数 $Z_M(s,\sigma)$ は

$$Z_M(s,\sigma)=\prod_{p}\prod_{\lambda\geq 0}\det\left(1-\sigma(p)N(p)^{-s-\lambda}\right)$$

の形で定義される。ただし，p は M の素な閉測地線全体 $\mathrm{Prim}(M)$ （あるいは，それらのホモトピー類をとることにより，Γ の素な共役類全体 $\mathrm{Prim}(\Gamma)$）をわたり，$N(p)=\exp(\mathrm{length}(p))$，$\lambda$ は，ある半格子を動く。すると，Selberg－Gangolli により $Z_M(s,\sigma)$ は位数 $\dim M$ の有理型関数となり，次の関数等式をもつ：

$$Z_M(2\rho_0-s,\sigma)=Z_M(s,\sigma)\exp\left(\mathrm{vol}(M)\dim(\sigma)\int_0^{s-\rho_0}\mu_M(it)\,dt\right)。$$

ここで，ρ_0 は正の数，$\mu_M(t)=\mu_{G/K}(t)$ はプランシェル測度（密度）。

ガンマ因子 $\Gamma_M(s,\sigma)$ を導入することにより，上記の関数

等式を対称型にすることができる。以下の定理は定理C⇒定理B⇒定理Aの順に証明される。また、多重ガンマ関数

$$\Gamma_r(z) = \det(D+z)^{-1} = \Bigl[\prod_{n_1,\dots,n_r\geq 0}(n_1+\cdots+n_r+z)\Bigr]^{-1},$$

$$D = t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+\cdots+t_r\frac{\partial}{\partial t_r} : \mathbb{C}[t_1,\dots,t_r] \to \mathbb{C}[t_1,\dots,t_r],$$

および、多重サイン関数

$$S_r(z) = \Gamma_r(z)^{-1}\Gamma_r(r-z)^{(-1)^r}$$

を用いる。$\Gamma_1(z) = \dfrac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}}$, $S_1(z) = 2\sin(\pi z)$ となる。

なお、ガンマ因子が"trivial"となる $G = SO(1, 2n-1)$ の場合を除く。

<u>定理A</u>

$$\Gamma_M(s,\sigma) = \det\left(\sqrt{\Delta_{M'}+\rho_0^2}+s-\rho_0\right)^{\mathrm{vol}(M)\dim(\sigma)(-1)^{\frac{\dim M}{2}}}$$

$$= \begin{cases} \left(\Gamma_{2n}(s)\Gamma_{2n}(s+1)\right)^{\mathrm{vol}(M)\dim(\sigma)(-1)^{n-1}} & \cdots G = SO(1,2n) \\ \left(\prod_{k=0}^{n}\Gamma_{2n}(s+k)\right)^{\mathrm{vol}(M)\dim(\sigma)(-1)^{n-1}} & \cdots G = SU(1,n) \\ \prod_{k=0}^{2n-1}\Gamma_{4n}(s+k)^{-\frac{1}{2n}\binom{2n}{k}\binom{2n}{k+1}\mathrm{vol}(M)\dim(\sigma)} & \cdots G = Sp(1,n) \\ \left(\Gamma_{16}(s)\Gamma_{16}(s+1)^{10}\Gamma_{16}(s+2)^{28}\Gamma_{16}(s+3)^{28}\Gamma_{16}(s+4)^{10}\Gamma_{16}(s+5)\right)^{-\mathrm{vol}(M)\dim(\sigma)} & \cdots G = F_4 \end{cases}$$

とおくと（$M' = G'/K$ は M のコンパクト双対）

完備化されたゼータ関数 $\hat{Z}_M(s,\sigma) = \Gamma_M(s,\sigma)Z_M(s,\sigma)$ は対称な関数等式をもつ：$\hat{Z}_M(s,\sigma) = \hat{Z}_M(2\rho_0-s,\sigma)$.

定理 B

$$\exp\left(\int_0^{s-\rho_0}\mu_M(it)\,dt\right)=\begin{cases}\left(S_{2n}(s)\,S_{2n}(s+1)\right)^{(-1)^n} & \cdots\ G=SO(1,2n)\\ \left(\prod_{k=0}^{n} S_{2n}(s+k)^{\binom{n}{k}^2}\right)^{(-1)^n} & \cdots\ G=SU(1,n)\\ \prod_{k=0}^{2n-1} S_{4n}(s+k)^{\frac{1}{2n}\binom{2n}{k}\binom{2n}{k+1}} & \cdots\ G=Sp(1,n)\\ S_{16}(s)\,S_{16}(s+1)^{10}S_{16}(s+2)^{28}S_{16}(s+3)^{28}S_{16}(s+4)^{10}S_{16}(s+5) & \cdots\ G=F_4\end{cases}$$

$$=\left(\frac{\det\left(\sqrt{\Delta_{M'}+\rho_0^2}+s-\rho_0\right)}{\det\left(\sqrt{\Delta_{M'}+\rho_0^2}-(s-\rho_0)\right)}\right)^{(-1)^{\dim M/2}}.$$

定理 C

$$\frac{S_r'}{S_r}(z)=(-1)^{r-1}\binom{z-1}{r-1}\pi\cot(\pi z)$$

$$={}_rH_{-z}\cdot\pi\cot(\pi z).$$

定理Cより $S_r(z)$ は2階の代数的微分方程式をみたすことがわかる。一方，$\Gamma_r(z)$ は代数的微分方程式をみたさないことが Barnes により証明されている（$r=1$ のときは Hölder による有名な結果）。したがって，定理Cは

$S_r(z)$ が $\Gamma_r(z)$ とは異なって "代数的" であることを示している。同時に，$S_r(z)$ の $z \in \mathbb{Q}$ における値の "代数性" が予想され，ゼータ関数や L 関数の特殊値の "代数性" に結びつく。たとえば，$\zeta(3)$，$\zeta(5)$，… などの値が

$$\zeta(3) = 4\pi^2 \log S_3(1) ,$$

$$\zeta(5) = 16\pi^4 \log \frac{S_3(1)^{11/12}}{S_5(1)} ,$$

… のように表示される。さらに，一般周期 $\omega_1, \ldots, \omega_r$ の多重サイン関数

$$S_r(z;\omega_1,\ldots,\omega_r) = \Gamma_r(z;\omega_1,\ldots,\omega_r)^{-1}\,\Gamma_r(\omega_1+\cdots+\omega_r-z;\omega_1,\ldots,\omega_r)^{(-1)^r},$$

ただし

$$\Gamma_r(z;\omega_1,\ldots,\omega_r) = \det\left(D_{(\omega_1,\ldots,\omega_r)} + z\right)^{-1}$$
$$= \left[\prod_{n_1,\ldots,n_r \geqq 0} (n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+z)\right]^{-1},$$

$$D_{(\omega_1,\ldots,\omega_r)} = \omega_1 t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + \omega_r t_r \frac{\partial}{\partial t_r}$$
$$: \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_r] \longrightarrow \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_r] ,$$

に拡張すると，クロネッカーの青春の夢の定式化につながると期待される。いま，(可換) 環 A に対して，そのサイン

関数を

$$S_A(x) = \prod_{a \in A} (a - x)$$

と"定義"する。有限次代数体 F の整数環を $\mathcal{O}_F$ とするとき、F に対するクロネッカー青春の夢("F の最大アーベル拡大体 F^{ab} を関数値を用いて explicit に構成せよ")は

$$☆☆ \quad \boxed{F^{ab} = F(S_{\mathcal{O}_F}(F))}$$

と定式化されると思われる。$S_{\mathcal{O}_F}$ は $\mathcal{O}_F$ について周期的("well-defined" ならば)であるから、$S_{\mathcal{O}_F}(F)$ は $S_{\mathcal{O}_F}(x)$ のトーラス $F/\mathcal{O}_F$ における値(つまり、"等分点"における値)であることに注意する。また、このような、等分点における値が考えられる関数のうち $S_{\mathcal{O}_F}(x)$ は最も簡単な関数であることも明らかである。実際に、F が ① 有理数体、② 虚2次体、また、類似として ③ 標数 $p>0$ の1変数関数体のときには、$S_{\mathcal{O}_F}(x)$ は計算され ☆☆ も(実質的に)成立することがわかる。① のとき $S_{\mathcal{O}_F}(x)$ は $2\sin(\pi x)$ (あるいは、より精密には $1 - e^{2\pi i x}$)であり ☆☆ はクロネッカー・ウェーバーの結果である。② のときは、$\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\tau]$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ とおくと

$$\zeta'_{\mathbb{Z}[\tau]}(x) = \prod_{m,n=-\infty}^{\infty}(m+n\tau+x)$$
$$=(1-q_x)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_\tau^n q_x)(1-q_\tau^n q_x^{-1})$$

が　$0<\mathrm{Im}(x)<\mathrm{Im}(\tau)$　に対して成立する。ただし，

$q_x = e^{2\pi i x}$，$q_\tau = e^{2\pi i \tau}$。これは"絶対値なしのクロネッカー極限公式"――クロネッカー極限公式は

$$\prod_{m,n=-\infty}^{\infty}|m+n\tau+x| = \left|(1-q_x)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_\tau^n q_x)(1-q_\tau^n q_x^{-1})\right|$$
$$\times\left|\exp\left(\pi i\left\{\frac{\tau}{6}-x+\frac{x(x-\bar{x})}{\tau-\bar{\tau}}\right\}\right)\right|,$$

なお　$$\prod_{m=-\infty}^{\infty}|m+x| = 2|\sin(\pi x)|$$
$$= e^{\pi|\mathrm{Im}(x)|}\times\begin{cases}|1-q_x| & \cdots\ \mathrm{Im}(x)\geqq 0\\ |1-q_x^{-1}| & \cdots\ \mathrm{Im}(x)\leqq 0\end{cases}$$

――とみなせる（[5a][5b]）。よって，$\zeta_{\mathcal{O}_F}(x)$は σ－関数（あるいは ϑ_1 関数）であり，☆☆は高木類体論（1920）の結果である（ただし，$F=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のときは高木（1903），$F=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ のときは竹内端三（1916）により得られていた）。

③の場合は $\zeta_A(x)$ を $x\prod_{a\in A-\{0\}}\left(1-\frac{x}{a}\right)$ と解釈することにより Carlitz（1935）および Drinfeld（1974；階数1の elliptic modules）の"exponential"関数（サイン関数とみた方がよいと思われる）であり，☆☆も成立する。

さらに、一般のFに対しては $S_A(x)$ を符号条件付(多重サイン関数と同様に)

$$S_A^{sgn}(x)=\prod_{a\in A}(a-x)^{sgn(a)}$$

(あるいは重み付)の形にしたものが必要になると考えられ、Fが実2次体の場合には新谷2重サイン関数(1977)が得られ、[illegible]は新谷による重要な予想であり、種々の裏付けがある。

標数0のハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数の大域的行列式表示は予想であるが、その作用素の働く空間は"虚なK群"と呼びうるものであると考えられる。例えば、有限次代数体Fに対して、そのデデキント・ゼータ関数 $\zeta_F(s) = \zeta^{\text{Hasse-Weil}}_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F}(s)$ に対して s における零点の位数(極のときは負)を表す関数 $\mathrm{ord}\,\zeta_F(s)$ は $s\in\mathbb{Z}$, $s<0$ に対して

$$\mathrm{ord}\,\zeta_F(s) = \mathrm{rank}\,K_{1-2s}(\mathcal{O}_F) = \dim_{\mathbb{C}} K_{1-2s}(\mathcal{O}_F)_{\mathbb{C}}$$

によって与えられ(Borel)、$s=\frac{1}{2}+it$ $(t\in\mathbb{R})$ を類推することにより $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F$ の1次元絶対コホモロジーは

$$H^1_{\text{絶対}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F) = \bigoplus_{t\in\mathbb{R}} K_{-2it}(\mathcal{O}_F)_{\mathbb{C}}$$

と純虚(purely imaginary = 純粋に仮想的な)K群によって表わされると考えられる。なお、$H^0_{\text{絶対}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F) \cong H^2_{\text{絶対}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F) \cong \mathbb{C}$ であり"ポアンカレ双対定理" $H^1_{\text{絶対}} \times H^1_{\text{絶対}} \to H^2_{\text{絶対}}$ が $\zeta_F(s)$ の関数等式 $s\leftrightarrow 1-s$ を説明する —— $1=\dim\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F$ という意味がはっきりする —— と期待される。

文献

[1] Ch. Deninger : Inv. Math. 104 (1991) 245-261
[2] —— : Inv. Math. 107 (1992) 135-150
[3] N. Kurokawa : Proc. Japan Acad. 60 A (1984) 335-338
[4] —— : "Multiple zeta functions : an example" (Zeta Functions in Geometry : 1990)
[5] —— : Proc. Japan Acad. 67 A (1991) 61-64
[5a] 黒川 : 『多重三角関数講義』東京大学 1991年4月-7月
[5b] —— : 「三角関数の一般化をめぐって」『近現代数学史』研究集会報告集, 津田塾大学 1992 (1991年11月)
[6] Yu. I. Manin : Lectures on Zeta Functions and Motives. 1992 (Columbia University).