数理解析研究所講究録
第811巻 1992年 134-139


# Ｇａｒｄｎｅｒの４分割問題について

東京電機大学・理工・情報／一松　信　(Sin Hitotumatu)
Dept. of Information Sciences,Tokyo Denki Univ.,Hatoyama Campus;Saitama Pref.,Japan 350-03

要旨：表題の問題は平面の直角三角形の面積を、互いに直交する２直線によって４等分することである。ここではその方程式を、いわゆる近似代数計算の考えの下で解くことを試みる。

## １．問題

任意の平面領域Ｄは、互いに直交する２直線により、面積を４等分することができる。　その解は一般的には一意的だが、必ずしもいつでもそうとは限らない。一実際Ｄが正方形なら解は無限にある。

しかし抽象的な解の存在証明は容易でも、具体的な図形Ｄに対してそれを現実に構成するのは、別の困難な問題である。　Martin Gardnerは、Scientific American(1976) に連載した「数学ゲーム」の一つで、図形の分割問題を扱い、その中で三辺の長さの比が 3:4:5の直角三角形Ｄの面積を、直交する２直線で４等分する問題を提出している([1]に再録）。

この問題は既に解決されており、解が一意的なことも証明されている([1]の増補参照)。　直角三角形を任意の形に一般化しても、以下に述べるように代数方程式で表現され、標準的な手法で数値的に解ける。　しかしそれは必ずしも簡単でない。　これには佐々木教授らによる（例えば[2])近似代数計算の考えが有効と思う。

## ２．方程式

Ｄを三辺の長さが $a,b,c$ $(a\leq b<c)$である直角三角形とする。　前記のような直交４等分線は、もしも$a=b$ ならば図１の形であり、 $a\to 0$ の極限では図２のような形になる。　この両極端の間を連続変形すれば、一般の直角三角形では図３のような形になることがわかる。

図３において、未知数を次のように置く。

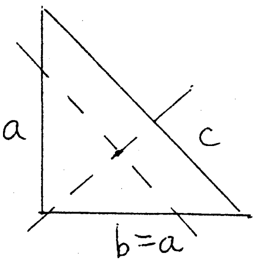


図１

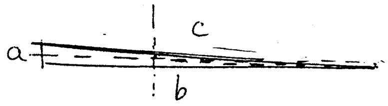


図２

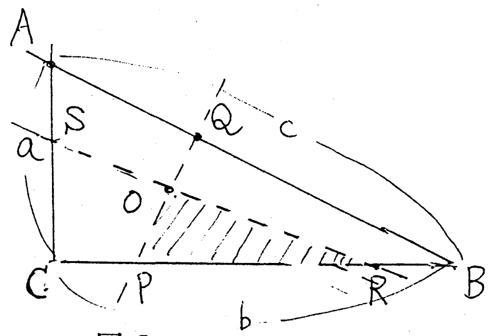


図３

$$BQ = cu,\quad CS = av,\quad BP = bx,\quad CR = by;\quad 0 < u,v,x,y < 1$$

実際には $1/2 < u,v < \sqrt{1/2} < x,y < 1$ である。

直線 PQ,RSがＤの面積を２等分することから直ちに

(1) $$ux = 1$$

(2) $$vy = 1$$

をうる。 次に PQ と RS とが直交するという条件は

$$(av/by)\cdot[au/b(x-u)] = 1$$

であるが、(1)(2)を使うと

(3) $$y^2(4x^2-2)=a/b$$

となる。 あるいは $\phi(x,y)=y\cdot\sqrt{4x^2-2}$ と置くと、次のようになる。

(3') $$\phi(x,y)=a/b.$$

最後に三角形OPQ の面積を計算して、全体の¼と置く。 それにはCB,CA をX,Y-軸とする直角座標を導入すると、直線PQ,RS の方程式がそれぞれ

$$[X-b(1-x)]/b(x-u) = Y/au \quad \text{及び} \quad X/by + Y/av = 1$$

なので,Xを消去して高さY を求めると

$$Y = a(x+y-1)/[(x/u)+(y/v)-1]$$

である。 したがって

$$1/4 = \Delta OPQ/\Delta ABC = (x+y-1)Y/a = (x+y-1)^2/[(x/u)+(y/v)-1]$$

である。 ここで再び(1)(2)を使って整理すると、最終的に方程式

(4) $$x^2+4xy+y^2-4x-4y+5/2 = 0$$

をうる。 (1)(2)(3)(4)が解くべき連立代数方程式である。 ここでパラメタ a, bが比の形で(3) にのみ現れることと (4)がx,y について対称なことに注意する。

## ３．解法の試行錯誤

(i)　u,vは (1),(2)で決るから、x,y について(3),(4) を解けばよい。　これらから yを消去し xに関する８次方程式を作って解くことは、標準的な方法でできる。　しかしその計算は意外に複雑であり、それからただ一つの解を求める方法は賢明とはいい難い。

(ii) (4)は双曲線を表し、次のようにも変形できる。

$$(x-y)^2 = (x+y-1)(3x+3y-5)$$

さてもし(4) の定数項が1/6 だけ増えて5/2 でなく 8/3ならば、(4) は２個の１次式の積に因数分解できる。　そのときの因数は

$$(\alpha x+\alpha^{-1} y-\sqrt{8/3})\ (\alpha^{-1} x+\alpha y-\sqrt{8/3})=0,$$

$$\text{ここに}\quad \alpha=(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2},\quad \alpha^{-1}=(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$$

である。　この２個の直線は (⅔, ⅔) で交わり、(4) の漸近線である。　当面必要な(4) の部分は

$V=(5/6,5/6)$ を通る $(\sqrt{1/2},1)$, $(1,\sqrt{1/2})$間の弧

だけである（図４）。

(iii) この弧の上で x+yはほぼ1.7 であり、xyはほぼ0.7 である。　ゆえに与えられたa,b に対し、(3')から初期値として

(5)
$$y_0 = \sqrt{0.98-(a^2/2b^2)}$$

を取ることができる。

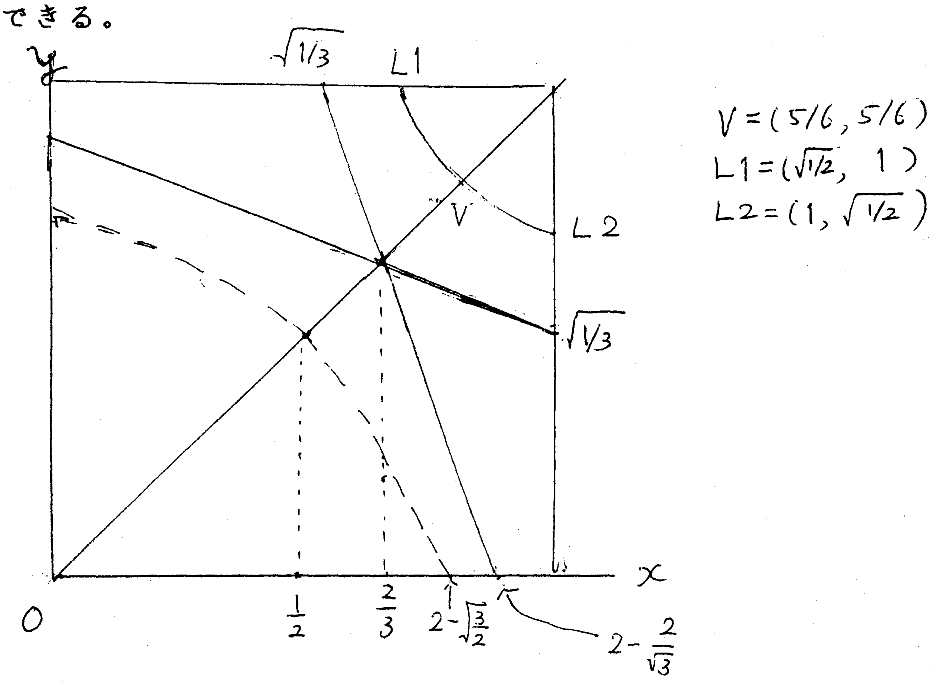


図４

これから(4) により $x$を決め、(3) により $y$を決め, . . . という逐次近似が可能である。 この反復は収束するが、収束は遅くて実用にならない。 (5)は初期値の参考に留め、別の反復を考えた方がよい。

(iv) 一般に2次曲線は、媒介変数 $t$ によって有理式（分母・分子が $t$の2次式）で表される。 それにより(3')を

$$\phi(x(t), y(t)) = a/b$$

と変形し (iii)で求めた初期値から $t$について例えばNewton-Raphson法で解くことができる。 しかしこれも式が複雑になりすぎて感心しない。

(v) (4)を媒介変数で近似的に表すには、大域的な式よりも局所的な表現の方がよい。 その上の1点 P :$(x_0, y_0)$ における (4)の接線は

(6) $$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0; \quad A=2x_0+4y_0-4, \quad B=4x_0+2y_0-4$$

で表される。 $(x, y)$ が十分$(x_0, y_0)$ に近ければ

(7) $$x=x_0+B\delta, \quad y=y_0-A\delta+\epsilon$$

と置くと、 $|\epsilon|<<|\delta|<<1$ である。 (6)から $A^2-4AB+B^2=-2$ なので、双曲線(4)は

$$B\epsilon+(12x_0-8)\delta\epsilon+\epsilon^2=2\delta^2$$

と変形される。 ここで高次の項を無視すれば、近似的に

(8) $$\epsilon=2\delta^2/B$$

をうる。 この方式で準Newton法を使うのが最も良かった。

## 4. 準Newton法

(3')の $\phi$ の偏導関数は

$$\partial\phi/\partial x = 4xy/\sqrt{4x^2-2} = 4x\, y^2/\phi, \quad \partial\phi/\partial y = \sqrt{4x^2-2} = \phi/y$$

である。 ゆえに点$(x_0, y_0)$ の近くで(3')を解くためには

$$\partial\phi/\partial x = 4x_0 y_0^2/(a/b), \quad \partial\phi/\partial y = a/by_0$$

と置いてよい。 したがって $\phi$ のTaylor展開と (7)とから、準Newton近似

(9) $$C\delta = (4b\, B\, x_0 y_0^2/a - a\, A/by_0)\,\delta = (a/b) - \phi(x_0, y_0)$$

で $\delta$を, (8)で $\epsilon$ を決めることができる。 初期値がよければ、数回の反復で満足すべき解がでるし、この計算には普通の電卓で十分である。

実例として、最初の a:b=3:4 の場合を考える。 このときには図4における双曲線の頂点 V=(5/6,5/6)が $\phi(x_0,y_0)$=0.73493 であって¾に極く近い。 したがって $x_0=y_0=5/6$ と取ると (6)で A=B=1であり、近似式(9),(8) は次のようになる。

(9') $C\delta = 0.75 - \phi(x_0,y_0)$, $C=1771/810=1/0.45737$,

(8') $\epsilon = 2\delta^2$ .

逐次の計算値は、次の表の通りになった。 この計算は普通の電卓で実行した。

| x | y | $\phi(x,y)$ | $\delta$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.83333 | 0.83333 | 0.01507 | 0.00689 | 0.000093 |
| 0.84022 | 0.82653 | -0.00023 | -0.00010 | 0.000093 |
| 0.84012 | 0.82663 | -0.000007 | | |

この最後の値は、5桁の精度では最良である。 このとき他の変数の値は次のようになった。

$$u=0.59515,\quad v=0.60487.$$

## 5. 結論

以上の計算は、結局単なる逐次近似計算にすぎない。 近似代数計算([2]) 的な考えは、双曲線(4) を近似因数分解したり、xy =定数 で近似したりして、よい初期値を求めるのに使っただけである。

しかし連立代数方程式を扱うとき、伝統的な消去法(Gröbner基底なども) が、唯一でもなく最良とも限らない。 数値計算には直接よい初期値を求めて、逐次近似を試みる方が簡単な場合も多いらしい。 ここに述べたのはその一例のつもりである。 今後同様な手法が有効な実例を探してみたい。

なお本報告を今少し詳しく英文で書いた論文が文献[3] である。

謝辞：本報告は、研究会で発表した内容に、何人かの方々からの御注意を加筆したものである。 色々と御教示下さった方々に、失礼ながら一括して感謝の辞を述べたい。

# 参考文献

[1] Martin Gardner, Penrose tiles to trap-door ciphers—— ... and the return of Dr. Matrix, W.H.Freeman and Co. 1988, Chap. 12, 日本語訳, 丸善より近刊予定.

[2] T.Sasaki, M.Suzuki, M.Kolar and M.Sasaki, Approximate factorization of multivariate polynomials and absolute irreducibility testing, Preprint to IPCR (Riken), 1990, Aug.

[3] S.Hitotumatu, On a quadri-section problem by M.Gardner, Report of Tokyo Denki Univ., will appear, 1992.