数理解析研究所講究録
第812巻 1992年 29-40

磁気ベナール問題
–磁場による熱対流の制御–

中村　正彰　Masaaki NAKAMURA
電気通信大学情報工学科

戦後日本の製鉄技術の発達は目覚ましいが、溶鉱炉から取り出した熱い鉄を冷間圧延に依って薄板にする際、その下に流す油が沸騰するのを防ぐために磁場による熱対流の制御が利用されている。またここ十数年半導体の進歩はすごいものであるが　とくに品質の良い物をぶどまり良く製造するためには高温の液体シリコンが必要であるがより均一な液体シリコンを得るためにに磁場をかけて制御している。どちらの場合も磁場が熱対流を安定化させる効果を持つことを示している。これ等は総て一種のベナール問題と考えられるが、シリコン等は、単純な粘性流体ではなく電気抵抗を持った流体であるために、これ等の熱対流の制御を解析するためには磁場の影響を考慮せざるを得ない。　この問題を磁場の影響下にあるベナール問題と言う意味で磁気ベナール問題と言う。　これは外部から何かして制御するという訳では無く、問題自体が磁場による熱対流の安定化効果を内包しておりこの解析を利用して最適に制御することが重要である。

1. 磁気ベナール系

n 次元空間において 領域 $0 < x_n < 1$ を均一な電気抵抗を持つ非圧縮性粘性流体が占めている。そして下から熱する、すなわち平面 $x_n = 0, 1$ をそれぞれ温度 $T = T_0, T_1 (T_0 > T_1)$ に保ち、更に z方向に一様な磁場 $\boldsymbol{H} = H_0\boldsymbol{e}(H_0 > 0)$ をかけた状態を考える。するとつぎの平衡状態 s_0 が存在する。

$$(1\text{-}1) \qquad s_0 = \begin{cases} \boldsymbol{U}_0 = 0,\ \boldsymbol{H}_0 = H\boldsymbol{e},\ \Theta_0 = T_0 - \beta x_n, \\ \rho = \rho_0[1 - \alpha(\Theta_0 - T_0)] = \rho_0(1 + \alpha\beta x_n), \\ P_0 = p_0 - g\rho_0(x_n + \dfrac{1}{2}\alpha\beta x_n^2). \end{cases}$$

もしここで s_0 に摂動 $X = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}, \theta, p\}$ を速度、磁束、温度、圧力に加えたとすると、X はブシネスク近似の下で次の方程式系によって制御される。

(1.2–1)
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \mathrm{P}_m(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} + \nabla p + \mathrm{P}_m\big(\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{h}|^2\big) = \Delta\boldsymbol{u} + \lambda\theta\boldsymbol{e} + \mathrm{Q}\{\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_n} + \nabla h_n\},$$

$$(1.2\text{–}2) \qquad \mathrm{P}_m\big(\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} - (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\big) = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{h} + \mathrm{Q}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_n} \quad \text{in} \quad D,$$

$$(1.2\text{–}3) \qquad \mathrm{P}_r\big(\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\theta\big) = \Delta\theta + \lambda u_n \quad \text{in} \quad D,$$

$$(1.2\text{–}4) \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad D,$$

$$(1.2\text{–}5) \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{h} = 0 \quad \text{in} \quad D,$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

初期条件、境界条件は次の通りである。

$$(1.3)\qquad \boldsymbol{u}(0,x) = \boldsymbol{u}_0(x),\quad \boldsymbol{h}(0,x) = \boldsymbol{h}_0(x),\quad \theta(x,0) = \theta_0(x)\quad x \in R^{n-1} \times (0,1),$$

$$(1.4)\qquad \begin{gathered} \boldsymbol{u}(x,t) = 0 \quad \text{at} \quad x_n = 0,1, \\ h_n(x,t) = \frac{\partial h_i}{\partial x_n} = 0, \text{ for } 1 \leqq i \leqq n-1 \quad \text{at} \quad x_n = 0,1, \\ \theta = 0, \quad \text{at} \quad x_n = 0,1, \end{gathered}$$

ここで R(square root of Rayleigh number) $= \sqrt{\dfrac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu}}$, Q(square root of Chandrasekhar number)$= \sqrt{\dfrac{\mu H^2 d^2}{4\pi\rho\nu\eta}}$, P_r(Prandtl number)$= \dfrac{\nu}{\kappa}$, and P_m(magnetic Prandtl number) $= \dfrac{\nu}{\eta}$.

g 重力加速度、α 体積膨張係数、κ 熱伝導係数、ν 動粘性係数、μ the magnetic permeability, ρ 密度、η 電気抵抗係数、d 領域の深さ, $\boldsymbol{e}$ x_n 方向の単位ベクトルである。

REMARK 1.1　2 次元の場合には、作用素rot と $\widetilde{\text{rot}}$ を次のように定める。

$$(1.6)\qquad \begin{gathered} \text{rot}\, \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \text{for every vector function } \boldsymbol{u}, \\ \widetilde{\text{rot}}\, \phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}) \quad \text{for every scalar function} \quad \phi, \end{gathered}$$

するとつぎの関係式を得る。

$$(1.7)\qquad \widetilde{\text{rot}}(\text{rot}\, \boldsymbol{u}) = \text{grad}(\text{div}\, \boldsymbol{u}) - \Delta \boldsymbol{u}.$$

また(1.2−2) では $\widetilde{\text{rot}}(\text{rot}\, \boldsymbol{u})$ をrot(rot $\boldsymbol{u}$) の代わりに使う。境界条件においては $(\text{rot}\, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{n} = 0$ の代わりにrot $\boldsymbol{h} = 0$ を使うと (1.4) は $h_2 = \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0$ となる。

REMARK 1.2　境界条件 (1.4) は 平面が完全導体で出来ている場合を想定している。自由境界の場合は次のようになる。

$$(1.8)\qquad \begin{gathered} u_n(x,t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_n}(x,t) = 0 \text{ for } i \leqq i \leqq n-1 \quad \text{on} \quad x_n = 0,1, \quad t \geqq 0, \\ \boldsymbol{h}(x,t) = 0, \quad \text{on} \quad x_n = 0,1, \quad t \geqq 0, \\ \theta(x,t) = 0, \quad \text{on} \quad x_n = 0,1. \quad t \geqq 0 \end{gathered}$$

ここでは固定境界の場合だけを考察する。

2. 関数空間と作用素

集合 Ω を $(0,\dfrac{2\pi}{\alpha_1}]\times(0,1]$ または $(0,\dfrac{2\pi}{\alpha_1}]\times(0,\dfrac{2\pi}{\alpha_2}]\times(0,1)$ とする。$\mathbb{H}^1(\Omega)=H^1(\Omega)^n$, $\mathbb{H}^2(\Omega)=H^2(\Omega)^n$, $\mathbb{L}^2(\Omega)=L^2(\Omega)^n$, $H^i(\Omega)$ とする。
ここで x_1, x_{n-1} 方向の周期性を課する。

$$p,\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\theta,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j},\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x_j},\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\quad \text{are periodic in the } x_i \text{ direction with a period } \frac{2\pi}{\alpha_i},\qquad 1\leqq i\leqq n-1,\ j=1,\dots,n. \tag{2.6}$$

以後、単に $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h},\theta,p)$ が周期的といったら条件 (2.6) を満たしているものとする。
空間を次のように定める。

(2.7)
$$H^1_{0,p}=\{\,u\in H^1(\Omega) : u=0 \ \text{ on } \partial\Omega\setminus\Gamma_1,\ u \text{ is periodic}\,\},$$
(2.8)
$$\mathbb{H}^1_{0,\sigma}=\{\,\boldsymbol{u}\in H^1(\Omega)^n : \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \ \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{u}=0 \text{ on } \partial\Omega\setminus\Gamma_1,\ \boldsymbol{u} \text{ is periodic}\},$$
(2.9)
$$\mathbb{H}^1_{\sigma}=\{\,\boldsymbol{u}\in H^1(\Omega)^n : \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0 \text{ on } \partial\Omega\setminus\Gamma_1,\ \boldsymbol{u} \text{ is periodic}\,\},$$
(2.10)
$$L^2_p=\{\,u\in L^2(\Omega) :\ u \text{ is periodic}\},$$
(2.11)
$$\mathbb{L}^2_{\sigma}=\{\,\boldsymbol{u}\in \mathbb{L}^2(\Omega) : \operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{u} \text{ is periodic}\}.$$

$\Gamma_1=\{\,x\in\partial\Omega : z\neq 0,1\,\}$ である。
更に空間 $\mathbb{H}^1_\sigma$ につぎの条件を付けておく。

$$\int_\Omega u_i\,dx=0 \quad \text{for } i=1,\dots,n-1. \tag{2.12}$$

Remark 2.1 空間 $\mathbb{H}^1_{0,\sigma}$ の定義と空間 $\mathbb{H}^1_\sigma$ の付帯条件 (2.12) によって, ポワンカレの不等式が両空間で成り立つ。

$$\exists C_1=\text{Constant}(\Omega)\quad \text{such that}\quad \|\boldsymbol{u}\|_{L^2}\leqq C_1\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2}\quad \text{for all}\ \ \boldsymbol{u}\in\mathbb{H}^1_{0,\sigma} \text{ or } \mathbb{H}^1_\sigma. \tag{2.13}$$

またつぎの関係式が成り立つ。
$\mathbb{H}^1_{0,\sigma}$ と $\mathbb{H}^1_\sigma$ において,

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2_{L^2}=\|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\|^2_{L^2}+\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|^2_{L^2}, \tag{2.14}$$
$$C_2^{-1}|\nabla\boldsymbol{u}|_{L^2}\leqq|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}|_{L^2}\leqq C_2|\nabla\boldsymbol{u}|_{L^2}\quad \text{for all } \boldsymbol{u}\in\mathbb{H}^1_\sigma,\ \text{or } \mathbb{H}^1_{0,\sigma}. \tag{2.15}$$

従って $\|\nabla\cdot\|_{L^2}$ ノルムは H^1 ノルムと $\mathbb{H}^1_{0,\sigma}$, $\mathbb{H}^1_\sigma$ で同値である。
特に $\mathbb{H}^1_\sigma$で, ノルム $\|\operatorname{rot}\cdot\|_{L^2}$ と内積 $(\operatorname{rot}\cdot,\operatorname{rot}\cdot)$ を使う。
Remark 2.2 領域の定義により

$$\partial\Omega\setminus\Gamma_1=\{\,\boldsymbol{x}\in\Omega : x_n=0,1\,\}\ \text{ and } \boldsymbol{n}=(0,0,\pm1) \text{ or } \boldsymbol{n}=(0,\pm1).$$

であるので

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0 \ \text{ and } \ (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{n}=0 \text{ on } \partial\Omega\setminus\Gamma_1$$

は次の条件と同値である。

$$u_n=\frac{\partial u_n}{\partial x_i}=0 \quad \text{for } i=1,\ldots,n-1 \text{ on } \partial\Omega\setminus\Gamma_1.$$

以上の空間を使いつぎの空間を定義しておく。

$$\begin{aligned}\mathbb{V}&=\mathbb{H}^1_{0,\sigma}\times\mathbb{H}^1_\sigma\times H^1_{0,p},\\ \mathbb{H}&=\mathbb{L}^2_\sigma\times\mathbb{L}^2_\sigma\times L^2_p.\end{aligned}\tag{2.16}$$

空間 $\mathbb{V},\mathbb{H}$ は共にヒルベルト空間になるが、更に空間 $\mathbb{V}$ に次の特別な内積とノルムを導入しておく。

$\Phi,\Psi\in\mathbb{V},\ \Phi=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\theta),\ \Psi=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k},\zeta)$ に対して,

$$\begin{aligned}((\Phi,\Psi))_1&=(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla\boldsymbol{v})+\mathrm{P}_m(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h},\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{k})+\mathrm{P}_r(\nabla\theta,\ \nabla\zeta),\\ \|\Phi\|_1&=((\Phi,\Phi))_1^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}((\Phi,\Psi))&=(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla\boldsymbol{v})+(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h},\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{k})+(\nabla\theta,\ \nabla\zeta),\ \text{for}\ \ \Phi,\Psi\in\mathbb{V},\\ \|\Phi\|&=((\Phi,\Phi))^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

同様に空間 $\mathbb{H}$ にたいしても導入しておく。

$$\begin{aligned}(\Phi,\Psi)_1&=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})+\mathrm{P}_m(\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{k})+\mathrm{P}_r(\theta,\ \zeta),\\ |\Phi|_1&=(\Phi,\Phi)_1^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}(\Phi,\Psi)&=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{k})+(\theta,\ \zeta),\\ |\Phi|&=(\Phi,\Phi)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

ノルムの間につぎの関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}C_6^{-1}\|\Phi\|^2&\leqq\|\Phi\|_1^2\leqq C_6\|\Phi\|^2,\\ C_6^{-1}|\Phi|^2&\leqq|\Phi|_1^2\leqq C_6|\Phi|^2,\end{aligned}\tag{2.21}$$

REMARK 2.3 空間 $\mathbb{V},\mathbb{H},\mathbb{V}'$ の間につぎの関係が成り立つ。,

$$\mathbb{V}\subset\mathbb{H}\subset\mathbb{V}',\tag{2.22}$$

(2.23) the injection of $\mathbb{V}$ into $\mathbb{H}$ is compact.

磁気ナール問題においては我々は、ストークス作用素、rot rot 作用素、ラプラース作用素を扱わねばならない。まずストークス作用素を導入しておく。作用素 $\mathcal{A}_1 : \mathbb{H}^1_{0,\sigma} \to (\mathbb{H}^1_{0,\sigma})'$ をつぎのように定めておく。

$$\langle \mathcal{A}_1 \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) \quad \text{for } \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1_{0,\sigma} \tag{2.24}$$

ここで $(\cdot, \cdot)$ は L^2 内積である。
すると $\mathcal{A}_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2_\sigma$ はつぎのΩ におけるストークス問題と同値である。:

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ in } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \\ \boldsymbol{u} \text{ is periodic.} \end{aligned} \tag{2.25}$$

この解に対してつぎの正則性が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} \leqq C_2 \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}. \tag{2.26}$$

つぎに電場、磁場の問題によく現れるrot rot $\mathcal{A}_2 : \mathbb{H}^1_\sigma \to \mathbb{H}^{1'}_\sigma$ 作用素を導入する。

$$\langle \mathcal{A}_2 \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \rangle = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u},\ \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \quad \text{for } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1_\sigma \tag{2.27}$$

これはつぎの方程式系と同値である。

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\ \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ in } \Omega, \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0,\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \\ \boldsymbol{u} \text{ is periodic.} \end{aligned} \tag{2.28}$$

この解に対してつぎの正則性が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^2} \leqq C_3 \|\boldsymbol{f}\|_{L^2}. \tag{2.31}$$

最後にラプラース作用素 $\mathcal{A}_3 : H^1_{0,p}(\Omega) \to (H^1_{0,p})'$ を導入する。

$$\langle \mathcal{A}_3 u,\ v \rangle = (\nabla u,\ \nabla v) \quad \text{for } u,\ v \in H^1_{0,p} \tag{2.32}$$

これは次の方程式と同値である。

$$\begin{aligned} -\Delta u = f \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \\ u \text{ is periodic.} \end{aligned} \tag{2.33}$$

この解に対してつぎの正則性が成り立つ。

$$\|u\|_{H^2} \leqq C_4 \|f\|_{L^2}. \tag{2.34}$$

うえのことからそれぞれの作用素の定義域はつぎのようになることがわかる。

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}_1) &= \mathbb{H}^1_{0,\sigma} \cap \mathbb{H}^2, \\ D(\mathcal{A}_2) &= \mathbb{H}^1_{\sigma} \cap \mathbb{H}^2, \\ D(\mathcal{A}_3) &= H^1_{0,p} \cap H^2. \end{aligned} \tag{2.35}$$

さらに次のように作用素を定めておく。

$$\begin{gathered} \mathcal{A}, A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \\ \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathrm{P}_m^{-1} \mathcal{A}_2 \times \mathrm{P}_r^{-1} \mathcal{A}_3, \\ A = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3, \end{gathered} \tag{2.36}$$

定義域は $D(\mathcal{A}) = D(A) = \{\mathbb{H}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^2(\Omega) \times H^2(\Omega)\} \cap \mathbb{V}$ である。
$\mathcal{A}$ は $\mathbb{H}$ から $\mathbb{H}$ への正定値自己共役作用素であり正の固有値の列 $\{\nu_i\}$ と 固有関数列 $\{w_i\}$

$$0 < \nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots . \tag{2.37}$$

を持つ。

作用素 b_1, b_2 を次のように定める,

$$\begin{aligned} b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \big((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\big), \\ b_2(\boldsymbol{u}, \theta, \zeta) &= \big((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\theta, \zeta\big). \end{aligned} \tag{2.38}$$

すると $m_i \geqq 0$ かつ

$$m_1 + m_2 + m_3 > \frac{n}{2}, \quad \text{if some} \ \ m_i = \frac{n}{2},$$

or

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqq \frac{n}{2} \quad \text{if all } m_i \neq 0,$$

ならば、 b_1 and b_2 は連続で
(2.39)

$$|b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqq C_5(\Omega) |\boldsymbol{u}|_{H^{m_1}} |\boldsymbol{v}|_{H^{m_2+1}} |\boldsymbol{w}|_{H^{m_3}} \text{ for all } \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^{m_1}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^{m_2}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{H}^{m_3},$$
$$|b_2(\boldsymbol{u}, \theta_1, \theta_2)| \leqq C_5(\Omega) |\boldsymbol{u}|_{H^{m_1}} |\theta_1|_{H^{m_2+1}} |\theta_2|_{H^{m_3}} \text{ for all } \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^{m_1}, \theta_1 \in H^{m_2}, \theta_2 \in H^{m_3}.$$

(2.40)
$$b_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1 \text{ and for } \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1,$$
$$b_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -b_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \quad \text{for } \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1 \text{ and for } \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{H}^1.$$

(2.41)
$$b_2(\boldsymbol{u},\theta,\theta) = 0 \quad \text{for } \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1 \text{ and } \theta \in H^1,$$
$$b_2(\boldsymbol{u},\theta_1,\theta_2) = -b_2(\boldsymbol{u},\theta_2,\theta_1) \quad \text{for } \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1 \text{ and } \theta_1,\theta_2 \in H^1.$$

そこで $\mathcal{B}$ を $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\times\mathbb{V}$ で次のように定める。

(2.42)
$$\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3) = b_1(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3) - \mathrm{P}_m b_1(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{u}_3) + \mathrm{P}_m b_1(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{h}_2,\boldsymbol{h}_3)$$
$$- \mathrm{P}_m b_1(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{h}_3) + \mathrm{P}_r b_2(\boldsymbol{u}_1,\theta_2,\theta_3) \quad \text{for } \Phi_i \in \mathbb{V}, i=1,2,3,$$

更に $B:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}'$ を

(2.43)
$$\langle B(\Phi_1,\Phi_2),\Phi_3\rangle = \mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3) \quad \text{for all} \quad \Phi_i \in \mathbb{V},\ i=1,2,3.$$

でさだめると

(2.44)
$$\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_2) = 0 \quad \text{for all} \quad \Phi_i \in \mathbb{V},\ i=1,2,$$
$$\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3) = -\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_3,\Phi_2) \quad \text{for all} \quad \Phi_i \in \mathbb{V},\ i=1,2,3.$$

(2.45)n=2 $|\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)| \leqq C_8|\Phi_1|^{\frac{1}{2}}\|\Phi_1\|^{\frac{1}{2}}\|\Phi_2\|\,|\Phi_3|^{\frac{1}{2}}\,\|\Phi_3\|^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } \Phi_i \in \mathbb{V}, i=1,2,3,$

(2.46)n=3 $|\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)| \leqq C_9|\Phi_1|^{\frac{1}{4}}\,\|\Phi_1\|^{\frac{3}{4}}\|\Phi_2\|\,|\Phi_3|^{\frac{1}{4}}\,\|\Phi_3\|^{\frac{3}{4}} \quad \text{for } \Phi_i \in \mathbb{V}, i=1,2,3.$

(2.47)

n=2 $|\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)| \leqq C_8|\Phi_1|^{\frac{1}{2}}\,\|\Phi_1\|^{\frac{1}{2}}\|\Phi_2\|^{\frac{1}{2}}\,|\mathcal{A}\Phi_2|^{\frac{1}{2}}|\Phi_3| \quad \text{for } \Phi_1 \in \mathbb{V}, \Phi_2 \in D(\mathcal{A}), \Phi_3 \in \mathbb{H},$

(2.48)

n=3 $|\mathcal{B}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)| \leqq C_9|\Phi_1|^{\frac{1}{4}}\,\|\Phi_1\|^{\frac{3}{4}}\,\|\Phi_2\|^{\frac{1}{4}}\,|\mathcal{A}\Phi_2|^{\frac{3}{4}}\,|\Phi_3| \quad \text{for } \Phi_1 \in \mathbb{V}, \Phi_2 \in D(\mathcal{A}).\Phi_3 \in \mathbb{H},$

3. Existence and Uniqueness

ここで磁気ベナール問題(MBP) を定式化しておく。

磁気ベナール問題(MBP). 与えられた任意の$\Phi_0 = (\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{h}_0,\theta_0\ ) \in \mathbb{H}$ に対して, つぎの条件を満たす $\Phi = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\theta)$ を求めよ。

(3.1)
$$\Phi = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},\theta) \in L^2(0,T;\mathbb{V}),$$

(3.2)
$$\frac{d}{dt}(\Phi,\Psi)_1 + ((\Phi,\Psi)) + \mathcal{B}(\Phi,\Phi,\Psi) - \lambda\langle M_1(\Phi),\Psi\rangle - \mathrm{Q}\langle M_2(\Phi),\Psi\rangle = 0 \quad \textit{for all} \quad \Psi \in \mathbb{V},$$

(3.3)
$$\Phi(0) = \Phi_0.$$

ここで $\Psi = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}, \zeta)$ であり,

$$\langle M_1\Phi, \Psi\rangle = (\theta\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}, \zeta), \tag{3.4}$$

$$\langle M_2\Phi, \Psi\rangle = (\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z}, \boldsymbol{v}) + (\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}, \boldsymbol{k}). \tag{3.5}$$

このような Φ を弱解と呼ぶ。

特に $\Phi_0 \in \mathbb{V}$ の時,

$$\Phi \in L^2(0, T; D(\mathcal{A})) \cap L^\infty(0, T; \mathbb{V}), \tag{3.6}$$

を満たすときΦ を強解と呼ぶ。
作用素 A, M_i, B を使うと系 (3.2) は次のように表現できる。

$$\frac{d}{dt}T(\Phi) + A\Phi + B(\Phi, \Phi) - \lambda M_1(\Phi) - QM_2(\Phi) = 0. \tag{3.7}$$

ここで $T(\Phi) = (\boldsymbol{u}, \mathrm{P}_m\boldsymbol{h}, \mathrm{P}_r\theta)$ である。.
Remark 3.1 ここで条件 (3.3) について注意しておく。.
もし $\Phi \in L^2(0, T; \mathbb{V})$ ならば,

$$A\Phi, M_1(\Phi), M_2(\Phi) \in L^2(0, T; \mathbb{V}'). \tag{3.8}$$

更に $\mathcal{B}$ の性質により, $\Psi \in \mathbb{V}$ に対して,

$$\mathcal{B}(\Phi, \Phi, \Psi) = -\mathcal{B}(\Phi, \Psi, \Phi).$$

従って

$$|\mathcal{B}(\Phi, \Phi, \Psi)| = |\mathcal{B}(\Phi, \Psi, \Phi)| \leqq \|\Phi\|^2\|\Psi\|$$

よって

$$B(\Phi, \Phi) \in L^1(0, T; \mathbb{V}'),$$

まとめると

$$\frac{d}{dt}T(\Phi) \in L^1(0, T; \mathbb{V}').$$

従って (3.3) は意味がある条件であることが解った。弱解にたいしてつぎの存在定理が得られる。

定理 3.1. 任意に与えられた$\Phi_0 = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{h}_0, \theta_0) \in \mathbb{H}$ と $\forall T > 0$ に対して, 弱解$\Phi = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}, \theta)$ が存在して次の方程式系を満たす。

$$\Phi \in L^2(0, T; \mathbb{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbb{H}), \quad \Phi \in C_w(0, T; \mathbb{H}). \tag{3.11}$$

更につぎのことも解る。

(1) R^2 では, Φ は唯一つ存在し

$$\frac{d}{dt}T(\Phi) \in L^2(0,T;\mathbb{V}'), \tag{3.12}$$

(2) R^3では, Φ は次を満たす。

$$\frac{d}{dt}T(\Phi) \in L^{4/3}(0,T;\mathbb{V}'), \tag{3.13}$$

更に Φ は $L^4(0,T;\mathbb{V})$ においては単独である。

REMARK 3.2

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|\Phi\|_1^2 \leqq C_8, \\ &\sup_{t\in[0,T]} |\Phi|_1 \leqq C_8, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\text{where } C_8 = |\Phi_0|_1^2 e^{2\lambda \max\{1,\mathrm{P}_r{}^{-1}\}T}.$$

強解に対しては 2 次元空間においては大域解が得られるが、3 次元空間においては局所解の存在のみが保証される。すなわち 3 次元空間においては磁気ベナール問題は適切ではない。

定理 **3.2.** *For given* $\Phi_0 = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{h}_0, \theta_0) \in \mathbb{V}$,

(1) *in* R^2, *for any* $T > 0$, *the solution* Φ *satisfies*

$$\Phi \in L^2(0,T;D(\mathcal{A})) \cap L^\infty(0,T;\mathbb{V}), \tag{3.15}$$

(2) *in* R^3, *there exists* $T^* = T^*(\Omega, \|\Phi_0\|) > 0$ *and on* $[0,T^*]$, *there exists a unique solution* Φ *to Problem MBP which satisfies*

$$\Phi \in L^2(0,T^*;D(\mathcal{A})) \cap L^\infty(0,T^*;\mathbb{V}). \tag{3.16}$$

REMARK 3.3

(1) R^2 では,

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \|\Phi(t)\|_1 \leqq C, \\ &\int_0^T |\mathcal{A}\Phi(t)|^2\, dt \leqq C_{18} \end{aligned} \tag{3.17}$$

(2) R^3 では

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T^*]} \|\Phi(t)\|_1 \leqq 2(1+\|\Phi_0\|), \\ &\int_0^{T^*} |\mathcal{A}\Phi(t)|^2\, dt \leqq C_{18}(1+\|\Phi_0\|^2)^3, \\ &T^* = C_{19}(1+\|\Phi_0\|^2)^{-2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

4. Critical Rayleigh Number

ここで　$\Phi = 0$ で線形化した作用素 $\tilde{A}(\lambda)$ を導入しておく。

$$\tilde{A}(\lambda) = A - \lambda M_1 - \mathrm{Q} M_2,\ 0 < \lambda.$$

作用素 $\tilde{A}(\lambda)$ は, ある λ_1 に対して　最小固有値として 0 を持つ。　固有値 λ、固有関数 Φ は次の方程式を満たす。

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p - \lambda\theta \boldsymbol{e} - \mathrm{Q}\{\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z} + \nabla h_z\} &= 0, \\ \mathrm{rot\,rot}\, \boldsymbol{h} - \mathrm{Q}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} &= 0, \\ -\Delta\theta - \lambda \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e} &= 0, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} &= 0, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{h} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Remark 4.1　もし $\mathrm{Q} = 0$, 即ち, 磁場がなければ作用素 rot rot の性質から, 第 2 式で $\boldsymbol{h} = 0$ となり, 系はベナール問題の線形化方程式系となる。
そこで $\mathrm{Q} \neq 0$ のとき, $\boldsymbol{h}$ を $\mathrm{Q}\boldsymbol{h}$ で置き換えると (4.1) は, 次のようになる。

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p - \lambda\theta \boldsymbol{e} - \mathrm{Q}^2\{\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial z} + \nabla h_z\} &= 0, \\ \mathrm{rot\,rot}\, \boldsymbol{h} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} &= 0, \\ -\Delta\theta - \lambda \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e} &= 0, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} &= 0, \\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{h} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

これらは同値な系である。
　$I_{\mathrm{Q}}[\Phi]$ を $\mathbb{V}$ 上で次のように定める。

$$I_{\mathrm{Q}}[\Phi] = \frac{(\boldsymbol{u},\, \theta \boldsymbol{e})}{|\nabla \boldsymbol{u}|^2 + \mathrm{Q}^2|\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{h}|^2 + |\nabla\theta|^2} \quad \text{for} \quad \Phi \in \mathbb{V}, \tag{4.3}$$

ここで $(\cdot,\cdot)$ と $|\cdot|$ は L^2 内積 と L^2 ノルムである.

線形化固有値問題の変分法的表現 **(VFLEP).**
　V 上の 汎関数 $I_{\mathrm{Q}}[\Phi]$ の　付帯条件$\mathrm{rot\,rot}\, \boldsymbol{h} - \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = 0$ の下での最大値を求めよ.

補助定理 **4.1.**

(1) $\exists\Phi_0 \in \mathbb{V}$ *such that* $I_{\mathrm{Q}}[\Phi_0] = \max\{\, I_{\mathrm{Q}}[\Phi] : \Phi \in \mathbb{V},\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h} - \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = 0\,\}$.

$I_{\mathrm{Q}}[\Phi_0]$ を $\dfrac{1}{2\lambda_1(\mathrm{Q})}$ で表す.

(2) 方程式 (4.2) は *(VFLP)* の *Euler* 方程式である。

Proof. (1)

$$\Phi_m \in \mathbb{V} \text{ converge weakly to } \ \Phi \text{ in } \ \mathbb{V},$$

ならば 次の条件を満たす部分列が存在する。

$$\Phi_m \text{ converges to } \ \Phi \text{ in } \ \mathbb{H}.$$

従って

$$\liminf_{m\to\infty} \|\Phi_m\| \geqq \|\Phi\|,$$
$$\lim_{m\to\infty} (\boldsymbol{u}_m, \theta_m \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{u}, \theta \boldsymbol{e})$$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = 0 \ \text{ in the distribution sense.}$$

故に

$$\limsup_{m\to\infty} I_{\mathrm{Q}}[\Phi_m] \leqq I_{\mathrm{Q}}[\Phi].$$

I_{Q} は 弱上半連続だから $\mathbb{V}$ で最大値$\dfrac{1}{2\lambda_1(\mathrm{Q})}$をとる。

(2) 第一変分が 0 であるから

$$2(\boldsymbol{u}_0, \theta_0 \boldsymbol{e})((\Phi_0, \Phi))_2 = \{(\boldsymbol{u}, \theta_0 \boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{u}_0, \theta \boldsymbol{e})\}\|\Phi_0\|_2^2,$$

ここで $((\Phi,\Psi))_2 = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) + \mathrm{Q}^2(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{k}) + (\nabla\theta, \nabla\zeta)$, $\|\Phi\|_2^2 = ((\Phi,\Phi))_2$.
故に

$$\frac{2(\boldsymbol{u}_0, \theta_0 \boldsymbol{e})}{\|\Phi_0\|_2^2}((\Phi_0, \Phi))_2 = (\boldsymbol{u}, \theta_0 \boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{u}_0, \theta \boldsymbol{e}),$$
$$((\Phi_0, \Phi))_2 = \lambda_1(\boldsymbol{u}, \theta_0 \boldsymbol{e}) + \lambda_1(\boldsymbol{u}_0, \theta \boldsymbol{e}),$$

よって

$$-(\Delta \boldsymbol{u}_0 + \lambda_1 \theta \boldsymbol{e}, \boldsymbol{u}) - \mathrm{Q}^2(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}_0, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}) - (\Delta\theta_0 + \lambda_1 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{e}, \theta) = 0.$$

また

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}_0, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}) &= (\boldsymbol{h}_0, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}) \\ &= -(\boldsymbol{h}_0, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}) \\ &= (\frac{\partial \boldsymbol{h}_0}{\partial z}, \boldsymbol{u}),\end{aligned}$$

よって

$$(\Delta \boldsymbol{u}_0 + \lambda_1 \theta \boldsymbol{e} + \mathrm{Q}^2 \frac{\partial \boldsymbol{h}_0}{\partial z}, \boldsymbol{u}) + (\Delta \theta_0 + \lambda_1 \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{e}, \theta) = 0.$$

空間 $\mathbb{V}$ の定義から, Φ_0 に対して (4.2) を満たす p が存在する。よって方程式が得られる。 □

REMARK 4.1 $(VFLEP)_0$ と $\lambda_1(0)$ で, I_{Q} の付帯条件なしのときの最大値問題と最大値とすると、問題はベナール問題の変分法的定式化と一致し、$\lambda_1(\mathrm{Q})$ は臨界レーリー数となる。
また明かに次のことが判る。

(4.4) $\qquad 0 < \mathrm{Q} < \mathrm{Q}', \quad$ ならば $\; 0 < \lambda_1(0) < \lambda_1(\mathrm{Q}) < \lambda_1(\mathrm{Q}'),$

更に定常解 $\Phi = 0$ の単独性と漸近安定性も判る.

REFERENCES

1. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover, New York, 1981.
2. M. Nakamura, *On the Magnetic Bénard Problem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **38, No.2** (1991), 359–393.