数理解析研究所講究録
第812巻 1992年 94-98

自由表面の運動を陽に取り入れた熱対流モデルとその数値解法について

筑波大学電子･情報工学系　今井　仁司（Hitoshi IMAI）
筑波大学工学研究科　周　偉東（ZHOU Weidong）
筑波大学電子･情報工学系　名取　亮　（Makoto NATORI）

1．序

やかんの中の水のような，容器中の液体を考えよう．重力下でこのような液体を下から暖めると，暖められた液体は密度が変化し，それが浮力となって，ちょっとした擾乱で対流が引き起こされる．そして対流は条件さえそろえば整然とした空間構造をもつ[2,10,13]．このように，熱対流現象は非常に身近かな自然現象であると同時に数理物理的に興味ある現象であるといえる[4-6,8]．一方，この熱対流現象の解析は工学的にはとても重要である．実際問題として，対流を磁場などで制御する[1,12]ことで，溶融している物質を凝固させて作る超高品質製品の品質制御を行っているようである．このような対流制御の数値シミュレーションは非常に有用であるが，それを行うためには，まず，対流の適切なモデル化から始めなくてはならない．

磁界によって対流を制御する場合には，当然のことながら磁界の影響を考慮してモデルを作る必要がある．このモデル化は既になされており，それは磁気ベナール問題と呼ばれている[12]．その数値計算から，磁界の影響はやはり本質的であることがわかった．実際，磁気ベナール問題を簡単化して得られる簡約磁気ベナール問題の数値計算によって，磁界が対流の安定性やアトラクターの分岐の様子に大きく影響することが示された[11]．磁界の影響を考えない通常の対流においても，容器の壁の影響や自由表面を持つことの影響を考慮する必要がある．実際，壁の影響で対流の空間パターンが変わってくることや，自由表面の表面張力係数の温度依存性に起因する対流が存在することが知られている[13]．

ここでは自由表面を持つ通常熱対流を考える．そして，その線形（局所）安定性ではなく，（ローレンツモデルのホモクリニック軌道のような）非線形安定性を考えることにする．すると，いままでのモデルのように自由表面は固定でき

なくなる．つまり，自由表面の運動を陽に取り入れる必要がある．それが，対流の安定性に寄与するのか不安定性に寄与するのか，あるいは（磁気ベナール問題の場合の磁界のように）その両方なのかを特に注目して解析する．これは容易に判断できる代物ではないので，数値計算によって調べることにする．以上の，自由表面の運動を陽に取り入れた熱対流モデルと，その数値計算に有用である数値解法を以下で議論する．

2．自由表面の運動を陽に取り入れた熱対流モデル

簡単のために２次元で考える（３次元に容易に拡張可能であることに注意しておく）．下から暖められている非圧縮の流体を考え，その表面は自由表面であるとする．壁の影響を考慮すると解析が難しくなるので，ここではそれは無視する．したがって，左右方向は周期的であると仮定する．底では粘着条件を考える．自由表面ではよく用いられる力のつりあい条件を考える[7,9]．自由表面の運動は，表面粒子はいつも表面にいるという仮定によって決まる．流れの方程式はブシネスク近似したものを用いる．以上のモデルを図１に示す．具体的な方程式は，よく知られているものばかりなので，ここでは述べない．

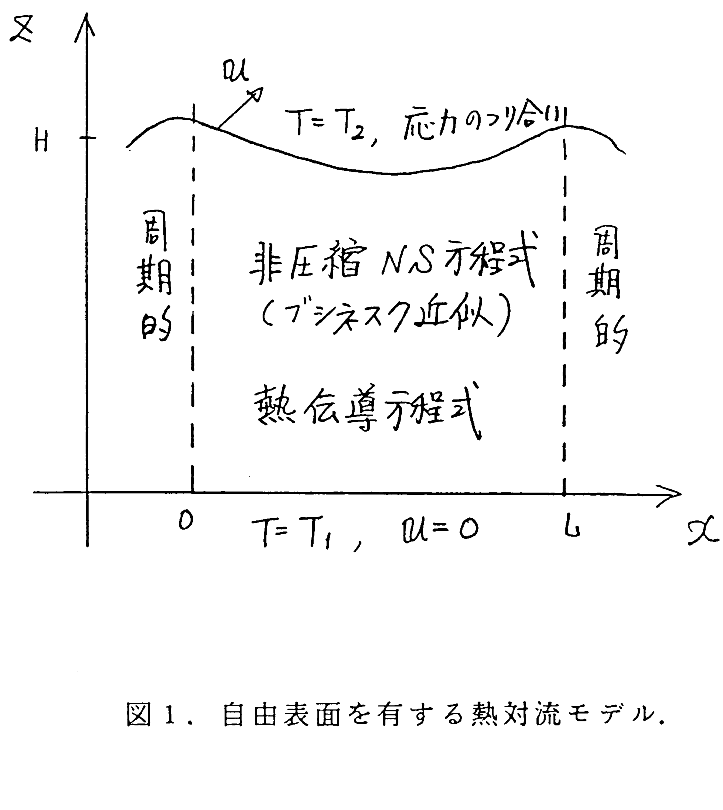

図１．自由表面を有する熱対流モデル．

3．数値解法

3．1．空間に関する離散化

熱対流問題の数値解法には，スペクトル法がよく用いられる．ところが，自由境界問題では領域が固定されてないため（図1参照），直接スペクトル法を用いることはできない．また，自由境界での境界条件が複雑であるために，取扱いの容易な三角関数を基底にとることもできない．かといって，三角関数以外の基底では非線形項の処理が難しくなる．そこで，写像関数法[9] と選点法[3] を組み合わせたスペクトル法を用いることにする．

3．2．計算格子

いま，差分法で解くことを考える．固定領域の問題では様々な格子が用いられている．最も簡単なレギュラー格子（速度と圧力の格子点が同じところにある格子）を採用しても，ＭＡＣ法を用いれば計算できる．しかしながら，ＭＡＣ法では圧力をポワソン方程式で求めるので，圧力の境界条件を人工的に付加している．これは数学的に望ましくないし，とくに安定性を解析する場合には，数値的にも望ましくない．したがって，計算格子の選択は数値解法全体との兼ね合いで決定しなければならない．境界条件の近似を避けるために，自由表面上での圧力値は計算できて，自由境界を動かすために速度の格子点は自由境界上にあるような格子がよい．

以上のことを考慮して，ここでは図２のような半スタガード格子を用いる．

3．3．選点に対する若干の注意

選点法で有名なのは Guss-Lobatto 法であるが，半スタガード格子を用いる都合上，速度と温度は Guss-Lobatto 法，圧力に対しては Gauss 法を用いる[3]．

4．まとめ

ここでは，熱対流制御の数値シミュレーションの基礎として，簡単な熱対流モデルの提案と，そのような自由境界問題に有用であると思われる数値解法の提

案を行った．この数値解法に則った実際の数値計算および提案したモデルの解析は今後の課題である．

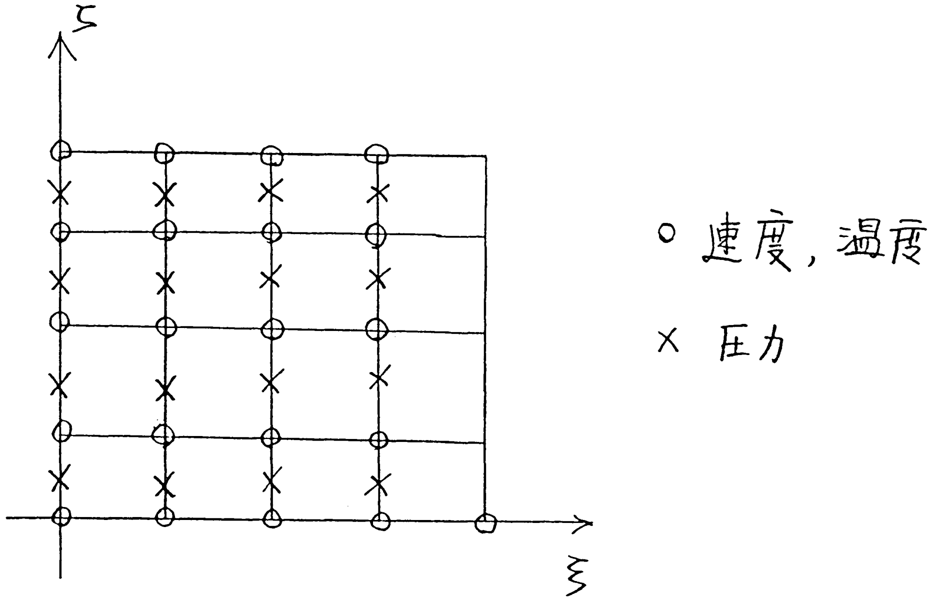

図２．計算格子．

参考文献

[1] 合原一幸編，“ カオス，” サイエンス社，1990.

[2] S. Chandrasekhar, “ Hydrodynamic and hydromagnetic stability,” Dover, New York, 1981.

[3] C. Canuto et al., “Spectral Methods in Fluid Dynamics, ” Springer, 1988.

[4] J.H. Curry et al., Order and disorder in two- and three-dimensional Bénard convection, J. Fluid Mech., 147(1984), 1-38.

[5] R.M. Clever and F.H. Busse, Three-dimensional knot convection in a layer heated from below, J. Fluid Mech., 198(1989), 345-363.

[6] G. Grötzbach, Direct numerical simulation of laminar and turbulent Bénard convection, J. Fluid Mech., 119(1982), 27-53.

[7] T. Hanada et al., Numerical computations for solidification problems with change of volume, Bulletin of the Greek Mathematical Society, 31(1990), 29-49.

[8] 木田重雄, “乱流の不思議なふるまい,” 丸善, 1988.

[9] Y. Katano et al., Numerical study of drop formation from a capillary jet using a general coordinate system, Theor. Appl. Mech., 34, Univ. of Tokyo Press, 1986, 3-14.

[10] E.L. Koschmieder and S.A. Prahl, Surface-tension-driven Bénard convection in small containers, J. Fluid Mech., 215(1990), 571-583.

[11] 守本知之, 簡約磁気ベナール問題の数値解析, 卒業論文, 筑波大学, 1992.

[12] M. Nakamura, On the magnetic Bénard problem, J. of the Faculty of Sciences, the University of Tokyo, Sec. IA, 38(2)(1991), 359-393.

[13] J.D. Tritton, “ Physical Fluid Dynamics,” Oxford University Press, New York, 1988.