数理解析研究所講究録
第 813 巻 1992 年 136-140

Mutation and Self #-equivalences of Links

大阪工大　渋谷哲夫 (Tetsuo Shibuya)

R^3 の oriented link ℓ の間のつぎのような変形を #(I), #(II)-move という。特にこの変形を ℓ の1つの component に行うとき，この変形をそれぞれ self #(I), self #(II)-move という。

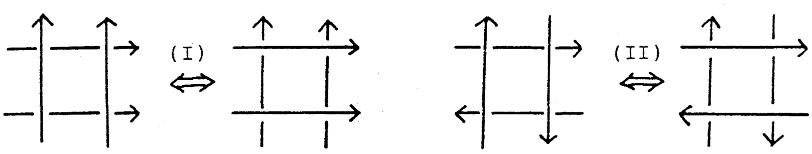
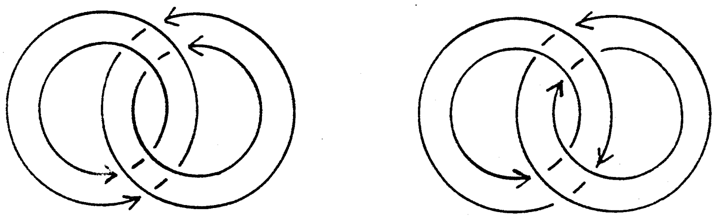


Fig. 1.

R^3 の2つの links ℓ, ℓ' が self #-equivalent (I) (or (II)) とは，ℓ が有限回の self #(I) (or (II))-moves で ℓ' に変形できるときをいう。

1回の #(I), #(II)-move はそれぞれ Fig. 2 (1), (2) の links を適当に fusion して得られ，これらの Arf invariant はそれぞれ 1, 0 だから、つぎの Proposition を得る。



(1)　　　　　(2)

Fig. 2

<u>Proposition</u> ([2]). R^3 の 2 つの n-component proper links $\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$, $\ell' = k_1' \cup \cdots \cup k_n'$ に対し、

(1) ℓ と ℓ' が self #-eq.(I) $\Rightarrow \bar{\varphi}(\ell) = \bar{\varphi}(\ell')$,

(2) ℓ と ℓ' が self #-eq.(II)

$\Rightarrow \varphi(\ell) = \varphi(\ell')$, $\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$, $i=1,\cdots,n$,

ここで $\varphi(\ )$ は Arf invariant で $\bar{\varphi}(\ell) \equiv \varphi(\ell) - \sum_{i=1}^{n} \varphi(k_i) \pmod 2$。

この Proposition の逆は一般には成立しない。たとえば、Fig. 3 の link ℓ は $\bar{\varphi}(\ell) = 0$ であるが Milnor により ℓ は link homotopic to a trivial link でないことが知られている, [1]。(もちろん、self #-eq. は link homotopy を含む。)

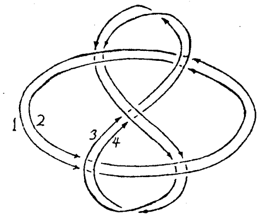


Fig. 3

しかし、2-component link に関しては、Proposition の逆が成立することが知られる。

<u>Theorem</u> 1 ([3]). $\ell = k_1 \cup k_2$, $\ell' = k_1' \cup k_2'$ を2つの 2-component links で $\mathrm{Link}(k_1, k_2) = \mathrm{Link}(k_1', k_2')(= r)$ とする。

(1) r が even のとき（すなわち ℓ, ℓ' が proper）。

(i) ℓ と ℓ' が self #-eq.(I) $\Leftrightarrow \bar{\varphi}(\ell) = \bar{\varphi}(\ell')$。

(ii) ℓ と ℓ' が self #-eq.(II)

$$\Leftrightarrow \varphi(\ell) = \varphi(\ell'),\ \varphi(k_i) = \varphi(k_i'),\ i = 1, 2。$$

(2) r が odd のとき（すなわち、ℓ と ℓ' が proper でない）。

(i) ℓ と ℓ' が self #-eq.(I)。

(ii) ℓ と ℓ' が self #-eq.(II) $\Leftrightarrow \varphi(k_i) = \varphi(k_i')$, $i = 1, 2$。

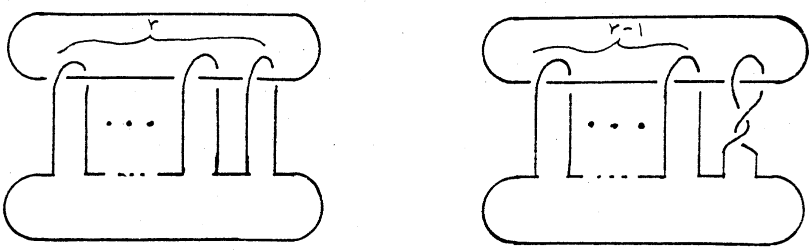
証明は [3] に譲りますが、この定理の証明は任意の 2-component link はつぎの link のいずれかに self

#-equivalent になることを示すという方針です。

<u>Remark.</u> ℓ, r を Theorem 1 のものとする。

(1) $r=0$ ⇒ ℓ は trivial link ($\bar{\varphi}(\ell)=0$) 又は Whitehead link ($\bar{\varphi}(\ell)=1$) に self #-eq.(I)。

(2) $r(\neq 0)$ が even
⇒ ℓ は $\mathcal{L}_0$ 又は $\mathcal{L}_1$ に self #-eq.(I)。



$\mathcal{L}_0$ $\mathcal{L}_1$

Fig 4

(3) r が odd ⇒ ℓ は $\mathcal{L}_0$ に self #-eq.(I)。

$r(\neq 0)$ が even の場合は $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ の一方が $\bar{\varphi}(\ )=0$ で他方が $\bar{\varphi}(\ )=1$ になる。r が odd のときは、$\mathcal{L}_0$ と $\mathcal{L}_1$ は self #-eq.(II) (したがって self #-eq.(I)) であることが証明できる。

Theorem 1 の応用として link の mutation に関してつぎの結果を得る。

<u>Theorem 2</u> ([3]). 2つの n-component links $\ell = k_1 \cup \cdots \cup k_n$, $\ell' = k_1' \cup \cdots \cup k_n'$ について，ℓ' が ℓ の mutant とする。

(1) ℓ と ℓ' は self #-eq.(I)。

(2) ℓ と ℓ' は self #-eq.(II)

$$\Leftrightarrow \varphi(k_i) = \varphi(k_i'),\ i = 1, \cdots, n.$$

(3) ℓ' が ℓ の self mutant ならば，ℓ と ℓ' は self #-eq.(II)。ここで self mutant とは，180°回転する 3-ball の中の2つの arcs が link の1つの component に含まれている場合をいう。

References

[1] J. W. Milnor: Link groups, Ann. of Math. 50 (1954), 177-195.

[2] T. Shibuya: Self #-unknotting operations of links, Memo. of Osaka Insti. Tech., 34 (1989), 9-17.

[3] T. Shibuya: Mutation and self #-equivalences of links, Kobe J. Math., to appear.