数理解析研究所講究録
第 813 巻 1992 年 141-143

Twisting Formulas of Jones polynomials

九州大学理学部 横田佳之

KをS^3内のknotとし，VをKを内部に含むsolid torusとする。Vのmeridian diskとKのgeometric及びalgebraic intersection numberをp, λで表す。KをVのmeridian diskに沿ってtwistしたとき，そのJones多項式がどの様に変化するのかを調べる。

定義.（Jones polynomial）

(i) $V_{O}(t) = 1$

(ii) $t^{-1} V(t) - t V(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V(t)$

定理. Kをμ回twistして得られるknotをK_μとおく。このとき，

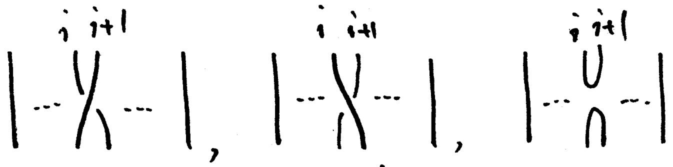
$$V_{K_\mu}(t) = \sum_{i=0}^{[p/2]} t^{\lambda_i \cdot \mu} \psi_i(t)$$

が成立。ただし

λが偶数 $\Rightarrow \begin{cases} (t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})\cdot \mathcal{V}_i(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}] \\ 4\mu_i = 3\lambda^2 - 4i(i+1) \end{cases}$

λが奇数 $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_i(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}] \\ 4\lambda_i = 3\lambda^2 - 3 - 4i(i+2). \end{cases}$

Sketch of Proof: G_nを次の$\sigma_i^{\pm1}$, e_iで生成される~~半~~群とする。



σ_i, σ_i^{-1}, e_i

さらに、$\mathbb{C}G_n$のideal I_nを

$\sigma_i - A^{-1} - Ae_i$,

$\sigma_i^{-1} - A - A^{-1}e_i$,

$e_i^2 + (A^2+A^{-2})e_i$

で生成されるものとすると

$\mathbb{C}G_n/\text{reg.iso}\ \&\ I \cong J_n$ (Temperley Lieb algebra)

となる。J_nはsemisimpleであることが知られているが、その既約表現を$\rho_{n,i}$, $0\le i\le [n/2]$で表す。

さて、任意の$\xi\in G_n$に対し、そのclosure $\hat{\xi}$はS^3内のknot又はlinkとなる。このとき、次のことが

知られている。

定理(村上).

$$V_\xi(t) = \sum_{i=0}^{[n/2]} w_i \, \mathrm{Tr}(\rho_{n,i}(\xi))$$

ここで, w_i は適当な weight で,

$$\begin{cases} (t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})\, w_i \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}] & \text{if } n \text{ is even} \\ \quad w_i \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}] & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

さて今 $K = \hat{\xi}$, $\xi \in G_n$ とする。

$$\Delta = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$$

とすると,

$$K_\mu = \widehat{\Delta^\mu \cdot \xi}$$

となることに注目する。Δ^μ は G_n の center に含まれるので, $\rho_{n,i}(\Delta^\mu)$ は schalar となる。

また, 表現 $\rho_{n,i}$ の構成法から

$$\rho_{n,i}(\xi) = 0 \quad \text{for } n > [p/2]$$

が導びかれ, 定理の結果を得る。