数理解析研究所講究録
第814巻 1992年 88-93

幾何学的ローレンツアトラクタを生成する退化特異性について

Limburgs Univ. F.デユモルティィエ (F. Dumortier)
京大理 国府寛司 (Hiroshi Kokubu)
龍谷大理工 岡宏枝 (Hiroe Oka)

ベクトル場の非双曲型平衡点を退化特異性と呼ぶ。退化特異性からはその退化の度合いに応じて様々な力学系的挙動が分岐する。たとえばHopf分岐により周期軌道が、Bogdanov-Takens分岐によりhomoclinic 軌道が出現する。また不変トーラスやカオス的軌道が分岐することも知られるようになった。ここでは更に複雑なものとしていわゆる幾何学的ローレンツアトラクタが退化特異性から出現することを示す。

<u>定理</u>

3-jet $y\frac{\partial}{\partial x}-x^3\frac{\partial}{\partial y}+x^2\frac{\partial}{\partial z}$

で与えられる R^3 上のベクトル場の退化特異性の開折で幾何学的ローレンツアトラクタを持つものが存在する。

この特異性は[Ushiki-Oka-Kokubu]でローレンツ方程式との関係が示唆された。

幾何学的ローレンツアトラクタを含む開折としては次のものがとれる。

$$
\text{(U)} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 + Ay + Bxz + Cyz \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases} + O(4)
$$

ここで α,γ,A,B,C はパラメータ である。

（証明の概要）

(1) Rychlikの定理

上の定理の証明に次のRychlikの定理を用いる。この定理はある種のhomoclinic分岐において幾何学的ローレンツアトラクタが出現することを示している。

定理(Rychlik)

次を満たすR^3 上の(ローレンツ方程式と同じ対称性を持つ）ベクトル場を考える。

1) 1 組の対称なcritically-twisted homoclinic loop を持つ。

2)homoclinic loopに対応した固定点での３つの固有値 $\lambda_{ss},\lambda_s,\lambda_u$が

$$0 < \frac{1}{2}\lambda_u < -\lambda_s < \lambda_u < -\lambda_{ss} \text{ 。}$$

このベクトル場のgeneric な２-パラメータの開折は幾何学的ローレンツアトラクタを持つ。

(2) 開折のblowing up

開折(U)を次のようにスケール変換する。

$$\begin{cases} x = r\bar{x}, \quad y = r^2\bar{y}, \quad z = r\bar{z} \\ \alpha = r^2\bar{\alpha}, \quad \gamma = r\bar{\gamma} \\ A = r\bar{A}, \quad B = r\bar{B}, \quad C = r^0\bar{C} \\ t = r^{-1}\bar{t} \end{cases}$$

新しい変数で(U)は（但し、¯は省略して）

$$\left.\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 + Ay + Bxz + Cyz \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases}\right] + O(r)$$

となる。$r = 0$としたものがlimit system(L)である。

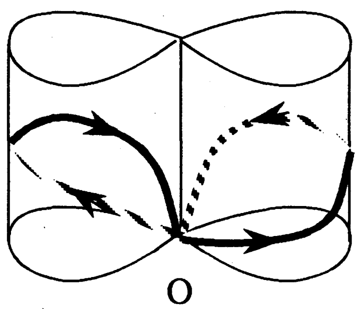
$$(\mathrm{L}) \quad \left.\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 + Ay + Bxz + Cyz \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases}\right]$$

3) critically-twisted homoclinic loopの存在について

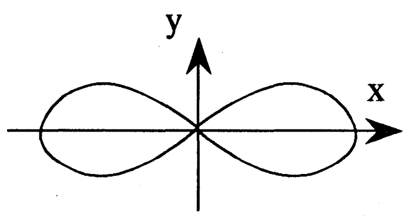
パラメータについて次のように仮定する。

$0 < \dfrac{\sqrt{\alpha}}{2} < -\gamma < \sqrt{\alpha} \quad (\alpha > 0)$,

$A, \quad B, \quad C$:small



$A = B = C = 0$のとき、(L)は



$$(\mathrm{R}) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \alpha x - x^3 \\ \dot{z} = \gamma z + x^2 \end{cases}$$

となり、１組のcritically-twisted homoclinic loopを持つことが容易にわかる。

(R)に対するRychlikの定理の固有値についての条件は

$$0<\frac{\sqrt{\alpha}}{2}=\frac{1}{2}\lambda_u<-\lambda_s=-\gamma<\lambda_u=-\lambda_{ss}=\sqrt{\alpha}$$

であるから満たされていない。そこで (A,B,C) を(0,0,0)からcritically-twisted homoclinic loopをたもちつつ動かして、固有値の条件を満たすようにする。

4)Melnikov型積分の方法

critically-twisted homoclinic loopの存続に関して次が成り立つ。

命題　(R)の任意の摂動系

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=\alpha x-x^3\\ \dot{z}=\gamma z+x^2\end{cases}+f(x,y,z,\mu) \qquad \mu\in R^k\ (k\geq 3)$$

に対し、次の２つのベクトル

$$M_H=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{b}(t)\frac{\partial f}{\partial\mu}(h(t),0)dt \quad , \quad M_c=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{b}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial\mu\partial x}(h(t),0)e(t)dt$$

が１次独立であれば、上の摂動系は、$\mu=0$ において M_H,M_c に直交する μ-空間のcurveにそって、critically-twisted homoclinic loopを持つ。

但し、$h(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $e(t)=(0,0,e^{\gamma t})$, $\hat{b}(t)=(\dot{y}(t),\dot{x}(t),0)$ である。

5) Complition of the proof

limit system(L) については、

$$M_H=(m_A,m_B,m_C)=-\int_{-\infty}^{\infty}(y(t)^2,x(t)y(t)z(t),y(t)^2z(t))dt$$

$$M_C=(0,n_B,n_C)=-\int_{-\infty}^{\infty}(0,x(t)y(t)e^{\gamma t},y(t)^2e^{\gamma t})dt$$

となる。$m_A\neq 0$, $n_C\neq 0$であることから、M_H,M_Cは１次独立である。更に$(A,B,C)=(0,0,0)$ における曲線Cの接線方向(d_A,d_B,d_C)は

$$d_A=m_Bn_C-m_Cn_B\ ,\quad d_B=-m_An_C\ ,\quad d_C=m_An_B$$

で与えらる、

<u>補題</u>　　　　$d_A\neq 0$

が成り立つことから、曲線Cに沿って、$A<0$とでき、(L)のにおける線形部分は

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\ \alpha&A&0\\ 0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

であるから、このとき固有値の条件

も満たされることがわかる。

参考文献

Rychlik　Lorenz attractors through Silnikov-type bifuacation. Part I, Erg.Th.and Dynam. Sys. 10(1989),793-821

Ushiki, Oka and kokubu　Existence d'attracteurs etranges dans le deploiement d'une singularite d'un champ de vecteurs invariant par translation, Comptes Rendus l'Academie des Sciences, Paris, t. 298, Serie I, no 3, 1984, pp. 39-42