数理解析研究所講究録
第 820 巻 1993 年 1-15

グラフによる2次体の類群の2巾階数評価

河野美文*) 北村三郎**) 中原 徹***)
*)(Kohno, Yosifumi) **)(Kitamura, Saburo) ***)(Nakahara, Toru)
*)佐賀大学工学系研究科 **)東和大学工学部 ***)佐賀大学理工学部

§1 Introduction

2次体の Ideal 類群の構造については、特にその 2-part について、Gauss による種の理論、及び Rédei-Reichardt の理論がよく知られている。この報告書では Rédei-Reichardt の定理のグラフ版（これは、Lagarias[L] による）を紹介し、特に Ideal 類群の 4-rank についての グラフ 上の Zeta 関数を用いた判定を与える。又、大島の修論 [O] の結果を踏まえて、いくつかの簡単なグラフについて、その 4-rank の計算例を与える。更に今後の希望的見通しを Morton の論文 [M2] の紹介と共に述べる。

§2 Results

$G(D)$ を2次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ に付随するグラフとし，$\kappa(X)$ をグラフ X のコンプレクシティ[§6 参照] とすると，以下のことが成り立つ．

Fact 1 完全グラフ $K(n)$ (*valency* $n-1$ の正則グラフの一つ) に対し

$$G(D)=K(q+2) \quad (q\geq 1)$$

となる判別式 D をとると，

$$\kappa(K(q+2))=(q+2)^q$$

が成り立ち $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ に於いて

$$\begin{cases} q \equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow e_2 \geq 1 \\ q \equiv 1 \pmod 2 \Longrightarrow e_2 = 0 \, . \end{cases}$$

ただし，種の理論により $e_1 = q + 1$ である．

Remark 1 この事実は Oshima[O] の結果によってもきっちり示されている．

Fact 2 完全２部グラフ $K(k_1, k_2)$ (*valency* (k_1, k_2) の半正則グラフの一つ) に対し

$$G(D) = K(q_1 + 1, q_2 + 1) \quad (q_1, q_2 \geq 1)$$

となる判別式 D をとると，

$$\kappa(K(q_1 + 1, q_2 + 1)) = (q_1 + 1)^{q_2} (q_2 + 1)^{q_1}$$

が成り立ち

$$\begin{cases} q_1 \equiv 0 \pmod 2 \text{ 及び } q_2 \equiv 0 \pmod 2 \Longrightarrow e_2 = 0 \\ q_1 \equiv 1 \pmod 2 \text{ 又は } q_2 \equiv 1 \pmod 2 \Longrightarrow e_2 \geq 1. \end{cases}$$

ただし，種の理論により $e_1 = q_1 + q_2 + 1$ である．

Fact 3 連結正則グラフ X に対し $G(D) = X$ となる判別式 D をとると

$$\kappa(X) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j + q)$$

が成り立つ．ここに λ_j はグラフ X の固有値，$n = \sharp V$, *valency* は $q+1$，特に X が２部グラフであるときは，$\lambda_{n-1} = -(q+1)$ となり

$$\kappa(X) = \frac{2(q+1)}{n} \prod_{j=1}^{n-2} (1 + q - \lambda_j)$$

が成り立つ．よって $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ に於いて

$$\begin{cases} \kappa(X) \equiv 0 \pmod 2 \Longleftrightarrow e_2 \geq 1 \\ \kappa(X) \equiv 1 \pmod 2 \Longleftrightarrow e_2 = 0 (X : \text{連結正則}). \end{cases}$$

$$\frac{qn}{2} \equiv 1 \pmod 2 \Longrightarrow e_2 \geq 1\ .\ (X:\text{連結正則 2 部}).$$

ただし種の理論により　$e_1 = n - 1.$

Fact 4　連結半正則 2 部グラフ X, *valency* : (q_1+1, q_2+1) に対し $G(D) = X$となる判別式 D をとると

$$\kappa(X) = \frac{(1+q_2)^{n_2-n_1+1}}{n_1} \prod_{j=1}^{n_1-1} \{(1+q_1)(1+q_2) - \lambda_j^2\}$$

が成り立つ．ここで，λ_j はグラフ X の固有値，$n_i = \sharp V_i \quad (i=1,2)$,
よって　$\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ に於いて

$$\begin{cases} \kappa(X) \equiv 0 \pmod 2 \Longleftrightarrow e_2 \geq 1 \\ \kappa(X) \equiv 1 \pmod 2 \Longleftrightarrow e_2 = 0\ . \end{cases}$$

ただし種の理論により　$e_1 = n_1 + n_2 - 1.$

§ 3　Morton の結果

有限 Abel 群 H の 2-Sylow subgroup H_2 について、Morton の論文 “*On Rédei's theory of the Pell equation*” [M1] に基づいて述べる。

Proposition 1

$$M = (\chi_j(\mathcal{A}_i)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq e_1).$$

ここで、

$$\begin{cases} m \geq e_1, \\ \chi_j : H \text{の 2 次指標 のなす群 } X \text{の基底 } (j = 1, \cdots, e_1)\ , \\ e_1 : H_2 \text{の直積因子の個数}, \\ \mathcal{A}_i : H_2 \text{の元 } (i = 1, \cdots, m)\ . \end{cases}$$

とする。このとき

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & + \\ \hline + & + \end{array} \right)$$

とできる。ここで D_1 は $r_1 \times r_1$ 正方行列（無いときもある）で、対角成分は -1，その他の成分が $+1$ とする．

Definition 1 M_1 は *"reduced"* と呼ばれる．

Definition 2 行列 M の *derived sequence* M_n を次のように決める；
(1) M_1 は M を *reduced* したもの
(2) それぞれの M_{n+1} は M_n から *derived* された行列．

Definition 3 行列 D_n を $m \times e_1$ 行列 M_nの正方部分行列として次のように定義する；

$$M_n = \left(\begin{array}{c|c} D_n & + \\ \hline + & + \end{array}\right)$$

D_nの次数を r_nとする。

これから考える行列

$$M = (\chi_j(\mathcal{A}_i)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq e_1)$$

として　特に

$$\{\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_m\}$$

が、$\boldsymbol{A}_1$ $(\subset H)$ が位数 2 の元全体, の生成元の集合となるときを扱う．

Theorem 1 (Morton [M1]) 行列 Mの *derived matrices* $\{ M_n \}$ に対して、数 e_{n+1} が、次のようにして与えられる．

$$e_{n+1} = e_1 - r_n \quad (n \geq 1).$$

ただし、e_nは H_2 の直積因子の中で、その位数が 2^nで 割れるものの個数、r_nは、 Definition 3 で 定義された 行列 D_nの 次数を表す．特に、H_2の 直積因子の 最大位数を 2^vとすると (そのとき $e_{v+1} = e_{v+2} = \cdots = 0$).
D_vは、sequence $\{ D_n \}$ の中で、e_1列をもつ最初の行列となる．
さらに，D_v の行を生成する要素は、H_2の 基底となる．

§ 4 **Rédei-Reichardt** の理論

グラフとのつながりを述べる前に、Rédei らによってなされた 2 次体の Ideal 類群の 2-part についての仕事をまとめる. Rédei は、一連の論文で、2 次体の Ideal 類群の 2-part の 最初の 3 つの rank について、理論的に記述した. Reichrdt による 2 次体 $Q(\sqrt{D})$ の 狭義 Ideal 類群 C の 2^n-rank (e_n とかく) の 特徴づけから出発して、Rédei は、Dの因子分解と 2 進乗法的記号 $\{ a_1, a_2, a_3 \}$ を用いて、e_2, e_3 を特徴づけた. 更に、Rédei は、この記号を用いて、任意に与えられた e_1, e_2, e_3に対して、無限個の実 2 次体が存在することを、示した。 Morton は、1982 年の論文 [M2] で、Rédei の理論を 虚 2 次体の場合について 拡張している.

Definition 4 D-分解 $\{ D_1, D_2 \}$

$$D = D_1 \cdot D_2 = D_2 \cdot D_1$$

ここで、D は 2 次体 $Q(\sqrt{D})$ の判別式 , D_iは判別式 (i=1,2) 又、1 も 判別式と見なし、

$$\{1, D\} : \text{自明な } D - \text{分解}$$

とする。

Definition 5 第 2 種 D-分解 $\{D_1, D_2\}$ は、次の条件をみたすものとする;

$$\begin{cases} \left(\dfrac{D_1}{p_i}\right) = 1, & \forall p_i | D_2 \\ \left(\dfrac{D_2}{p_i}\right) = 1, & \forall p_i | D_1. \end{cases}$$

ここで $\left(\dfrac{\cdot}{p_i}\right)$ は、*Kronecker* 記号を表す.

自明な D-分解は、第 2 種となる。

Theorem 2(Gauss, Rédei-Reichardt) *Gauss* の種の理論により、

$$\sharp\{D - \text{分解}\} = 2^{e_1}.$$

Rédei-Reichardt の定理より

$$\sharp\{\text{第 2 種} \quad D-\text{分解}\} = 2^{e_2}.$$

ここで、e_i は 2^i-rank を表す.

§5 Rédei-Reichardt 理論のグラフ化

2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の判別式 D に対して随伴グラフ $G(D)$ が構成される. それは, Rédei-Reichardt の定理の Rédei による初等的証明に基づくものである.

Definition 6 $D = p_1^* \cdots p_N^*$, p_i^* は 素判別式すなわち,

$$p_j^* = \begin{cases} (-1)^{\frac{p_j-1}{2}} p_j \quad , & (p_j : \text{奇素数}) \\ -4, -8 \text{ 又は } 8, & (p_j = 2) \end{cases}$$

に対し行列 $A_D = (a_{ij})$ を次の条件できめる:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right) = -1 \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

Proposition 2 2 次体 $k = \boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の判別式 D に対して,

$G(D)$ が対応 $\Longleftrightarrow$ A_D : グラフの頂点随伴行列 $i.e. A$ は対称行列.

Proposition 3 D がちょうど 1 つの素判別式からなるとき,
A_D は対称行列 (1×1).

Lemma 1 (Lagarias[L], Oshima[O]) 判別式 D が少なくとも 2 つの異なる素判別式を因子としてもつとき, その随伴行列 A_D が対称行列となるのは次の場合に限る.

(1) $D = \prod p, D = -q \prod p, \qquad p \equiv 1, q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$
(2) $D = -4 \prod p, D = (-4)(-q) \prod p, \qquad p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4),\ q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 8)$
(3) $D = \pm 8 \prod p, D = 8(-q) \prod p, \qquad p \equiv 1, q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$

Proposition 4　任意のN頂点の単純グラフは，ある判別式Dに対してその随伴グラフ$G(D)$として得られる．

Definition 7　D-分解$\{D_1, D_2\}$は，$G(D)$の頂点の集合Vの2つの互いに素な集合$\{V_1, V_2\}$への分割を決定する．ここで　頂点$i \in V_j$となるのは，

$$p_i^* \mid D_j \quad (j = 1, 2)$$

となるとき，又そのときのみ成り立つ．

Proposition 5　頂点の分割$\{V_1, V_2\}$は，V_1とV_2とを結ぶ辺のみからなる$G(D)$の部分グラフの全ての頂点の次数が偶数であるとき，第2種D-分割に対応している．

(証) 第2種D-分割の意味から

$$\left(\frac{D_1}{p}\right) = 1 \quad , \forall p | D_2, \quad \left(\frac{D_2}{p}\right) = 1 \quad , \forall p | D_1.$$

また

$$a_{ij} = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right) = -1.$$

Definition 8　$G(D)$の部分グラフで全ての辺が，V_1とV_2との各点を結ぶものであるとき，全ての頂点の次数が偶数(0を含む)ならば，
$\{ V_1 , V_2 \}$を *Eulerian vertex decomposition* という．

Theorem 3(Rédei - Reichardt criterion)　Dを随伴グラフ$G(D)$をもつ判別式とするとき$G(D)$の *Euler vertex decomposition* の数は2^{e_2}である．ここでe_2は$\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$の$4-\mathrm{rank}$を表す．したがって

$e_2 \geq 1 \quad \Longleftrightarrow G(D)$ の *Euler vertex decomposition* の数が偶数である．

Theorem 4 (Pumplün [P])　判別式Dに対して

$$D = p_1^* \cdots p_N^*, \quad p_i^* (> 0) : \text{素判別式} \quad (i = 1, \cdots, N)$$

となるとき，$h^*(D)$ を 2 次体$\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数とするならば

$$h^*(D) \equiv \sum_{T} \sum_{(i,j)\in T} \left(1 - \left(\frac{p_i^*}{p_j}\right)\right) \pmod{2^N}.$$

ここで，T は N 頂点の完全グラフの全ての spanning trees をわたるものとする．

Theorem 5 (Pumplün criterion) 判別式 D に対して

$$D = p_1^* \cdots p_N^*, \quad p_i^*(> 0): \text{素判別式} \quad (i = 1, \cdots, N)$$

とせよ．このとき 2 次体$\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の狭義類数 $h^*(D)$ は

$$h^*(D) \equiv 2^{N-1}|ST| \pmod{2^N}$$

を満たす．ここで，$|ST|$ は $G(D)$ の *spanning trees* の数を表す．したがって

$$e_2 \geq 1 \iff G(D) \text{ の } \textit{spanning trees} \text{ の数が偶数である．}$$

更に，Lagarias は，上の 2 つの criterion の同値性を与える次の定理を純グラフ的に証明した．

Theorem 6 (Lagarias [L]) 任意の単純グラフ G に対して

$$|EVD| \equiv |ST| \pmod 2.$$

ここで，$|EVD|$ は G の *Eulerian vertex decomposition* の数を表し，$|ST|$ は G の *spanning trees* の数を表す．

Proposition 6 (Oshima [O]) K_n を完全グラフ，$V(K_n)$ を K_n の 頂点集合とするとき

$$\sharp V(K_n) = n. \quad (n \geq 2)$$

$\widetilde{K_n}$ を K_n より 1 本の *edge* を取り除いた グラフ $(n \geq 4)$ とすると

$$1) \quad |EVD|_{K_n} = \begin{cases} 2^0 \;, & n: \text{odd} \\ 2^{n-2}, & n: \text{even}(n \geq 2) \end{cases}$$

$$2) \quad |EVD|_{\widetilde{K_n}} = \begin{cases} 2^0 \;, & n: \text{odd} \\ 2^{n-3}, & n: \text{even}(n \geq 4). \end{cases}$$

§ 6　グラフ上の Zeta 関数

Theorem 7 (Ihara [I])　X を *valency* は $q+1$ の連結正則多重辺グラフとし，A をその随伴行列とする．そのとき

$$Z_X(u)^{-1} = (1-u^2)^{r-1}\det[I_n - Au + qu^2].$$

ここで $r=(q-1)n/2$ はグラフ上の p_0 を始点とする基本群　$\Gamma = \pi_1(X, p_0)$ の rank 及び $n = \sharp(VX)$ を表す．

Definition 9 (Hashimoto [H])　X を有限連結多重グラフ，　$\Gamma = \pi_1(X, p_0)$ を X の基本群及び　$EX = \{e_1, \cdots, e_m\}$ を X の非有向辺の集合とするとき，EX の *labelling* によって，

$$e_j \longrightarrow u_j \quad (1 \le j \le m)$$

と対応する独立変数 u_j をとり，$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$
とかく．このとき，Γ の共役類 $\mathbf{P} = \{\gamma\}_\Gamma$ に対して

$$\mathbf{u}^{\mathbf{P}} = \mathbf{u}^{C_\gamma} := \prod_{k=1}^{d} u_{i_k}.$$

ここで，$C_\gamma = (y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots, y_{i_d})$　　$(y_{i_k} \in e_{i_k} \quad (1 \le k \le d))$ は，$\mathbf{P}$ に対応する簡約閉道とする．又

$$\deg\mathbf{P} := d = \deg\mathbf{u}^{\mathbf{P}} = |C_\gamma| \quad (= \text{簡約道 } C_\gamma \text{の長さ})$$

と定義する．更に，$< C >$ をグラフ X の長さ d の簡約閉道の類 $[C]$ に対応する Γ の共役類の元とし

$$\rho : \Gamma \longrightarrow U(n) \text{ を}\Gamma\text{の } n \text{ 次元 } \textit{unitary} \text{ 表現}$$

とするとき $(\rho, \mathbf{u})$ に付随するグラフ Xの *Zeta* 関数を次の同値な(形式的)無限積

$$\begin{aligned} Z_X(\mathbf{u};\rho) \;&:=\; \prod_{\mathbf{P}=\{\gamma\}_\Gamma : primitive} det\{I_n - \rho(\gamma)\mathbf{u}^{\mathbf{P}}\}^{-1} \\ &= \prod_{[C]:primitive} det\{I_n - \rho(< C >)\mathbf{u}^{C}\}^{-1} \end{aligned}$$

によって定義する．ここで $\mathbf{P}=\{\gamma\}_\Gamma$(resp. $[C]$) は Γ の原始的共役類 (resp. *cycle*) の集合をわたる．特に $\mathbf{u}=(u,\cdots,u)$, $\rho=\mathbf{1}$ のとき

$$Z_X(u):=Z_X(\mathbf{u}:\mathbf{1})$$

とかく．

この定義は，$PSL(\boldsymbol{Q}_p)$ の離散部分群に付随して定義された伊原Zeta関数のグラフ版となっている．また このことはSerreによって指摘され ([S])，1985年砂田により名古屋大学に於ける講義の中で具体化された．

今回，引用した定義は，それらを踏まえ更に一般のグラフに対して，橋本により定義されたものである．Thorem 7 は，橋本のグラフ研究の出発点ともなった基本的な結果である．

Theorem 8 (Hashimoto [H]) X を *valency* (q_1+1,q_2+1) $(q_1\geq q_2)$ の連結半正則 2 部多重グラフ $\sharp(V_i)=n_i$ $(i=1,2)$ 及び $A^{[i]}$ を付随多重グラフ $X^{[i]}$ の随伴行列とするとき

$$\begin{aligned}Z_{X,b}(u)^{-1} &= (1-u)^{r-1}(1+q_2u)^{n_2-n_1}\det[I_{n_1}-(A^{[1]}-q_2+1)u+q_1q_2u^2]\\ &= (1-u)^{r-1}(1+q_1u)^{n_1-n_2}\det[I_{n_2}-(A^{[2]}-q_1+1)u+q_1q_2u^2].\end{aligned}$$

ここで，$Z_{X,b}(u):=Z_X(u^{1/2})$ と定め，

$$\begin{aligned}r &= n_1q_1-n_2+1\\ &= n_2q_2-n_1+1\\ &= \text{the rank of}\quad \Gamma=\pi_1(X,p_0)\end{aligned}$$

である．特に

$$Spec(X)=\{\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_{n_1},0,\cdots,0\}\quad(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{n_1}\geq 0.)$$

とすると

$$\det[I_{n_1}-(A^{[1]}-q_2+1)u+q_1q_2u^2]=\prod_{j-1}^{n_1}\{1-(\lambda_j^2-q_1-q_2)u+q_1q_2u^2\}.$$

橋本はこれらを用いて Lagarias が $|ST|$ と表現したグラフの spanning trees

の個数を

$$\kappa(X) : X \text{のコンプレクシティ}$$

と定め，以下の定理で Zeta 関数の $u=1$ に於ける特殊値を用いて求めている．

Theorem 9 (Hashimoto [H]) (1) X を *valency* は $q+1$ $(q>1)$ の連結正則多重グラフ，$\sharp VX = n$ 及び $r = \dim_{\mathbf{C}} H_1(X, \mathbf{C})$ とするとき

$$\kappa(X) = \frac{-1}{n(q-1)2^{r-1}} \frac{1}{(1-u)^r Z_X(u)}\Big|_{u=1}.$$

(2) X を *valency* は (q_1+1, q_2+1) $(q_1q_2 > 1)$ の連結半正則 2 部多重グラフ，及び $\sharp(V_i) = n_i$ とするとき

$$\kappa(X) = \frac{1+q_2}{n_1} \frac{1}{1-q_1q_2} \frac{1}{(1-u)^r Z_{X,b}(u)}\Big|_{u=1}.$$

§ 7 Example

(1) $G(D) = K(k_1, k_2)$: 完全 2 部グラフ， $q_1 = 2, q_2 = 2$ の場合

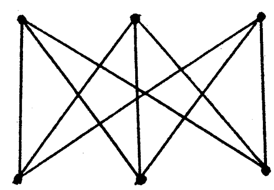
$$\kappa(K(q_1+1, q_2+1)) = (1+q_1)^{q_2}(1+q_2)^{q_1}$$

より

$$\kappa(K(q_1+1, q_2+1)) = 3^2 3^2 = 3^4 \equiv 1 \pmod 2.$$

したがって，

$$K(2+1, 2+1) = K(3,3) \qquad \text{G(D)} :$$



に対応する 2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の

$$4-\text{rank} = e_2 = 0$$

と解る． 種の理論より，

$$2-\text{rank} = e_1 = (q_1+1) + (q_2+1) - 1 = q_1 + q_2 + 1 = 5$$

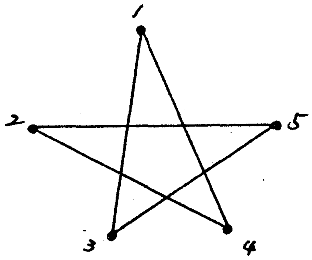
と与えられる．即ち，$2^5|h^*(D)$ ，故に

$$H_2 = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2.$$

(2) 連結正則グラフ $X = G(D)$, $q = 1$ の場合，

$$A_D : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G(D) :



のとき　固有多項式

$$f_A(x) = |xE - A_D| = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(x-2)(x^2+x-1)$$

となり，λ_j : 固有値 $(j = 1, \cdots, 5)$ とすると，

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0$$

と解る．X : 連結正則グラフのとき

$$\kappa(X) = \frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n-1}(1 - \lambda_j + q) \quad (\text{ただし}, \lambda_n = q+1)$$

であるから，上の場合，$n = 5,\ q = 1$ となり

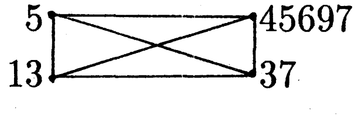
$$\kappa(X) = \frac{1}{5}2^2\frac{(5-\sqrt{5})}{2}\frac{(5+\sqrt{5})}{2} = \frac{1}{5}2^2 5 = 4 \equiv 0 \pmod 2.$$

故に

$$4 - \mathrm{rank} = e_2 \geq 1.$$

(3) $G(D) = K(q+2)$: 完全グラフ，　$q = 2$ の場合 ([O])

$G(D)$:



のとき　$D = 109901285 = 5 \times 13 \times 37 \times 45697$ として与えられ，$|EVD| = 2^2$ となることと，種の理論とにより，

$$e_1 = 3, \quad e_2 = 2$$

と解り，$h^*(D) = 32$ より，

$$H_2 = C_{2^2} \times C_{2^2} \times C_2$$

となることが解る．このとき，$q = 2$ より $\kappa(K(q+2)) = (2+q)^q$ より $\kappa(G(D)) = (2+2)^2 = 4^2 = 16$ となり

$$\kappa(G(D)) | h^*$$

となることも解る．

§ 8　Problem

4−rank の決定について，Lagarias によりグラフ理論的方法が導入され，$|EVD|$ によって

$$|EVD| = 2^{e_2} \quad (e_2 : 4 - \mathrm{rank})$$

と決定された．又存在，非存在については $|ST|$ 又は $\kappa(X)$：コンプレクシティの偶奇によって判定できた．

我々の今後の目標は，同様の判定法によって 8−rank の存在，非存在，又更には具体的な計算法を与えることである．

Rédei-Reichardt 理論は実の 2 次体について　任意の 2−rank,4−rank,8−rank について　それらをもつ無限個の実 2 次体とその ideal 類群の構成を与えている．又 Morton は虚の 2 次体にもそれを拡張している．

§ 2 に現れているのと本質的に同じ有限 Abel 群の理論を用いて 8−rank の決定を有限 Abel 群 G に対して G^2 の 4−rank を求めることに帰着させている．Morton は特定の判別式をもつ 2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-Dq})$ について，4−rank を *size* とする $e_2 \times e_2$ *matrix*　M を構成する *algorism* を与え

$$e_3 = e_2 - \mathrm{rank}\ M$$

によって $e_3(= 8 - \mathrm{rank})$ が決定されることを示している．そのグラフ化，又 $8-\mathrm{rank}$ をもつ場合，もたない場合のグラフの特徴づけはまだなされていない．

References

[B] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press (1974).

[C-O] J. E. Cremona and R. W. K. Odoni, *Some density results for negative Pell equations ; An application of Graph theory*,Journal of Lodon Math.Soc. (2) **39** (1989)16-28.

[F] R. Forman,*Determinants of Laplacians on Graphs*, preprint.(1991).

[H] 橋本　喜一朗 (K. Hashimoto), *Zeta Functions of Finite Graphs and Representasions of p−adic Groups*, Advanced Studies in Pure Mathematics **15**(1989), 211–280 .

[I] 伊原　康隆 (Y.Ihara), *On Discrete Subgroups of the Two by Two Projective Linear Group over p-adic Fields*, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219-235.

[K] F. H. Koch,*Über den 4-Rank der Klassengruppe quadratischer Zahlkörper* J. Number Theory **19**, 219-227(1984).

[L] J. C. Lagarias, *On Determining the 4-Rank of the Ideal Class Group of a Quadratic Field*, J. Number Theory **12**(1980), 191–196 .

[M1] P. Morton, *On Rédei's theory of the Pell equation*, J. Reine Angew. Math., **307/308**(1979), 373-398.

[M2] ——, *Density results for the 2-classgroups of imaginary quadratic fields*,J. Reine Angew. Math., **332**(1982),156-187.

[M3] ——,*The quadratic number fields with cyclic 2 -classgroups*, Pacific Journal of Mathematics Vol.**108**, No. 1,(1983).

[N] 中野　伸 (S.Nakano),*On the 2-rank of the ideal class groups of pure number fields*, Sonderdruck aus Arch. Math.,Vol. **42**, 53-57(1984).

[O] 大島　豊 (Y. Oshima), グラフの彩色多項式に関する Unimodal 予想及び 2 次体の類群の Euler グラフを用いた 4—階数評価，佐賀大学大学院理工学研究科修士論文 (1987)，1–63 .

[P] D. Pumplün, *Über die Klassenzahl und die Grundeinheit des reellquadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **230**(1968), 167-210.

[R-R] L. Rédei und H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengroupe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*J. Reine Angew. Math. **170**(1933),69-74.

[R] H. Reichardt, *Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. **170**(1933), 75-82.

[S] J. P. Serre, *Trees* Springer Verlag, Berlin, (1980).

[Su] 砂田　利一 (T. Sunada), 基本群とラプラシアン，紀伊国屋書店，(1987)

[U] 上原　健 (T. Uehara),*On the* 4-*Rank of the Narrow Ideal Class Group of a Quadratic Field* preprint(1989).