数理解析研究所講究録
第820巻 1993年 134-146

ファイル伝達網における最適ファイル伝達法

An Optimal File Transfer on a File Transmission Net

金子 美博† 篠田 庄司‡ 堀内 和夫†

Yoshihiro KANEKO Shoji SHINODA Kazuo HORIUCHI

†早稲田大学理工学部電子通信学科

‡中央大学理工学部電気電子工学科

SUMMARY

ファイル伝達網(file transmission net)Nは，点集合及び枝集合がそれぞれV及びBであり，B上の各枝eが正のコスト$c_a(e)$を持ち，V上の各点uが正のコスト$c_v(u)$及び非負整数である需要値d(u)を持つ有向グラフである．N上で提供される情報はファイルに書かれており，そのようなファイルをJで表す．

小文では，N上のファイル伝達法(file transfer)を用いて点v_1からV上の各点vへd(v)個のJのコピーを提供する問題を考える．その結果，定義する母点集合M及び正の需要値を持つ点の集合UがM⊆Uを満たすNに対して，Jのコピーを送るコストとJのコピーを作るコストの和が最小であるファイル伝達法(最適ファ

イル伝達法)を求める，$O(nm+n^2\log n)$の手間のアルゴリズムを提案する．但し，$n=|V|$及び$m=|B|$である．

1．まえがき

ファイル伝達網(file transmission net)Nは，点集合及び枝集合がそれぞれV及びBであり，B上の各枝eが正のコスト$c_a(e)$を持ち，V上の各点uが正のコスト$c_v(u)$及び非負整数である需要値$d(u)$を持つ有向グラフである．N上で提供される情報はファイルで書かれており，これをJで表す．Jは適当な点においてコピーすることができるものとする．

N上のfile transfer(ファイル伝達法)を用いて点v_1からV上の各点vへ$d(v)$部のJのコピーを提供する問題を考える．小文では，定義する母点集合M及び正の需要値を持つ点の集合Uが$M\subseteq U$を満たすNに対して，Jのコピーを送る総コストとJのコピーを作る総コストの和が最小であるfile transferを求めるアルゴリズムを提案する．

2．準備

グラフ及びネットワークに関する基本的な用語は，文献[1]を参照されたい．小文では，単に枝といえば有向枝を指すものとし，辺といえば無向枝を指すものとする．また，$\mathbb{Z}_+$は非負整

数の集合を指す．

ファイル伝達網Nとは，点集合をV，枝集合をBとし，(1)Nの基礎グラフは連結で自己閉路をもたない，(2)Nの枝集合Bに対して，$(x, y) \in B$ならば，$(y, x) \in B$である，(3)V上の各点uが$c_v(u)$及び$d(u)$という2個の重みを持ち，B上の各枝eが$c_a(e)$という重みを持つ．但し，$c_v(u) > 0$，$d(u) \in \mathbb{Z}_+$，及び$c_a(e) > 0$が成り立つ，及び(4)B上の各枝(x, y)に対して，$c_a((x, y)) = c_a((y, x))$が成り立つ，ような有向グラフである．(2)と(4)より，Nは無向であるともいえる．簡単のため，枝(x, y)のコストを$c_a((x, y))$の代わりに$c_a(x, y)$とする．以下では，単に$N=(V, B, c_v, d, c_a)$といえば，このようなファイル伝達網を指すものとする．

Nに対して，Nの外からV上のある点v_1に，複製可能なファイルJが1部与えられるものとする．点uのコスト$c_v(u)$は，uにおいてJのコピーを1部作るのに必要なコストであり，正の値をとる．Jをコピーする機能を持たない点uのコストを$c_v(u) = +\infty$とし，$W = \{u \in V \mid c_v(u) < +\infty\}$をN上の複製可能点集合と呼ぶ．点uの需要値は，uが必要とするJの部数を意味し，0または正の整数をとる．枝(v, w)のコスト$c_a(v, w)$は，点vから点wへJのコピーを1部送るのに要するコストであり，正の値をとる．点のコストも枝のコストも共に，部数に対する線形のコストとする．

N上の点vに対して，点集合$A(v)$を$A(v) = \{w \mid (v, w) \in B$または

$(w, v) \in B\}$とする．N上のuからvへのパスを単にu-vパスと呼び，$P_{u,v}$で表す．N上のパスPに対して，c(P)はP上の全ての枝のコストの総和を表し，Pのコストと呼ぶ．u-vパスでコストが最も小さいパスを，uからvへの最小コストパスと呼び，$\tilde{P}_{u,v}$で表す．任意のグラフGに対して，B(G)及びE(G)は，それぞれ，Gの枝集合及び辺集合を表す．P上の各枝eの重みが均一な値wであるならば，Pはwで均一に重みづけられている，または，Pの重みがwであるという．均一に重みづけされたパスの集合$\mathbb{P}$に対して，$\mathbb{P}$上の各パスを重ね合わせた結果得られるネットワーク$N(\mathbb{P})$を$\mathbb{P}$による重ね合わせネットと呼ぶ．但し，$N(\mathbb{P})$上での各枝eの重みは，$\mathbb{P}$上の個々のパスにおける対応する枝eの重みの総和とする．B上の関数fに対して，パスP上の全ての枝eが$f(e) > 0$ならば，Pはf-positiveであるという．B上の各枝(x, y)上の関数f((x, y))を簡単のためf(x, y)で表す．

Nの外から点v_1に与えられたファイルJのコピーは，次のfile transferを通して，V上の各点uへd(u)部ずつ提供される．

[定義1]　$N=(V, B, c_v, d, c_a)$に対して，Vを$\mathbb{Z}_+$に写像する関数ψ，及びBを$\mathbb{Z}_+$に写像する関数fが以下の2個の条件を満たすならば，$D=(\psi, f)$をN上のfile transferと呼ぶ．

(C1) $\sum_{x \in A(v)} f(x, v) + \psi(v) = \sum_{y \in A(v)} f(v, y) + d(v) \quad (v \in V \setminus \{v_1\})$,

$$1+\sum_{x\in A(v_1)} f(x,v_1)+\psi(v_1)=\sum_{y\in A(v_1)} f(v_1,y)+d(v_1).$$

(C2) $d(u)>0$である点uに対して，v_1からuへf-positiveなパスが存在する． □

file transfer Dに対して，各点でJをコピーするのに要する総コストと各枝でJのコピーを送るのに要する総コストの和を，Dのコストとする．

［定義2］ $N=(V,B,c_v,d,c_a)$上のfile transfer$D=(\psi,f)$のコストC(D)を，

$$C(D)=\sum_{u\in V} c_v(u)\cdot\psi(u)+\sum_{(x,y)\in B} c_a(x,y)\cdot f(x,y)$$

とする．N上のあるfile transfer Dが，N上の任意のfile transfer D'に対して，$C(D)\leqq C(D')$ならば，DをNにおける<u>最適な</u>file transferであるという．□

最適なfile transferを求める上で，次で定義する母点集合が役に立つ．

［定義3］ $N=(V,B,c_v,d,c_a)$において，Wを複製可能点集合とする．V上のある点xが$W\ \{x\}$上の任意の点yに対して，$c_v(x)<c_v(y)+c(\tilde{P}_{y,x})$であるならば，xをN上の母点と呼ぶ．またN上の全ての母点の集合をMで表す．□

3．$M \subseteq U$であるファイル伝達網[6]

ここでは，必要な定義を幾つか行なって，$M \subseteq U$であるファイル伝達網N上の最適なfile transferを求めるアルゴリズムを提案する．Vから2^Mへの対応を表す関数をHとし，このHを用いて，Mからのdelivery transferを定義する．

［定義4］　$N=(V, B, c_v, d, c_a)$において，Wを複製可能点集合とする．V上の各点vに対して，$H(v)=\{w \in W |$ W上の任意の点w'に対して，$c_v(w)+c(\tilde{P}_{w,v}) \leqq c_v(w')+c(\tilde{P}_{w',v})\}$とする．　□

［定義5］　ファイル伝達網$N=(V, B, c_v, d, c_a)$における，$U\ M$上の各点uに対して，$H(u) \cap M$上の点を1個ずつ選んで，$h(u)$とする．M上の点mに対して，点集合$S(m)$を，$S(m)=\{u \in U\ M | h(u)=m\}$とする．$h(u)$から$u$への最小コストパス$P_u$を1個決め，$P_u$の重みを$d(u)$とする．$U\ M$上の各点$u$に対して，このようにして求めた$|U\ M|$個の$P_u$の重ね合わせネット$N_h$上の枝$e$の重みを$w(e)$とする．$V$上の関数$\psi_h$及び$B$上の関数$f_h$が

$$\psi_h(v) = d(v) + \sum_{u \in S(v)} d(u) \qquad (v \in M),$$

$$\psi_h(v) = 0 \qquad (v \in V \setminus M),$$

$$f_h(e) = w(e) \qquad (e \in B(N_h)),$$

$$f_h(e) = 0 \qquad (e \in B \setminus B(N_h)),$$

を満たすならば，$D_h=(\psi_h, f_h)$を，NにおけるMからのdelivery transferと呼ぶ．□

[定義6]　$N=(V, B, c_v, d, c_a)$上の母点集合をMとする．$M'=M\cup\{v_1\}$を点集合とし，v_1が根である根付木をTとする．B(T)上の各枝$e=(x, y)$に対して，Nにおけるxからyへの最小コストパスP_eを1個決め，重みを1とする．このようにして求めた$|M'|-1$個のパスの重ね合わせネットN_T上の各枝eの重みを$w(e)$とする．V上の関数ψ_T及びB上の関数f_Tが

$$\psi_T(v)=\delta_T^+(v)-1 \qquad (v\in M'),$$

$$\psi_T(v)=0 \qquad (v\in V\setminus M'),$$

$$f_T(e)=w(e) \qquad (e\in B(N_T)),$$

$$f_T(e)=0 \qquad (e\in B\setminus B(N_T)),$$

を満たすならば，$D_T=(\psi_T, f_T)$を，Mへのsupply transferと呼ぶ．但し，$\delta_T^+(v)$はTにおける点vの出次数を表す．□

[定義7]　$N=(V, E, c_v, d, c_a)$における母点集合をMとする．点集合が$M'=M\cup\{v_1\}$である無向な完全グラフ構造であり，各辺(x, y)の重み$w((x, y))$が，$c_v(x)+c(\tilde{P}_{x,y})+c_v(y)$であるグラフを随伴ネット(Associated Net)と呼び，ANで表す．　□

[命題1][6]　$N=(V, E, c_v, d, c_a)$における母点集合をM，Mからのdelivery transfer $D_h=(\psi_h, f_h)$を定義5のように決める．随

伴ネットAN上の最小木をT_mとし，基礎グラフがT_mと同じ構造である，v_1を根とする根付木をTとする．このTに対して，Mへのsupply transfer $D_T=(\psi_T, f_T)$を定義6のように決める．D_hとD_Tを重ね合わせたネットは，N上の最適なfile transferである．

□

この命題より，Nにおける最適なfile transferを求めるアルゴリズムは次のようになる．

Algorithm

step1　与えられたファイル伝達網$N=(V, B, c_v, d, c_a)$に対して，$W\cup U$上の2点間の最小コストパスを求め，これを基にN上の母点集合Mを求める．$U\leftarrow U\setminus M$とする．

step2　U上の各点uに対して，$H(u)\cap M$上の点を1個選び，step1で求めた最小コストパスを用いて，Mからのdelivery transfer $D_h=(\psi_h, f_h)$を作る．V上の各点vに対して$\psi(v)\leftarrow\psi_h(v)$とし，B上の各枝eに対して，$f(e)\leftarrow f_h(e)$とする．

step3　随伴ネットANを作り，AN上の最小木T_mを求め，根がv_1であり，基礎グラフがT_mと一致する根付木をTとする．Tを基に，Mへのsupply transfer $D_T=(\psi_T, f_T)$を作る．V上の各点vに対して，$\psi(v)\leftarrow\psi(v)+\psi_T(v)$とし，B上の各

枝eに対して,$f(e) \leftarrow f(e) + f_T(e)$とする.

step4　V上の各点vの$\psi(v)$及びB上の各枝eの$f(e)$を出力し,終了.以上の結果得られた$D=(\psi, f)$がN上の最適なfile transferである.

Algorithm終了

上記のアルゴリズムでは,グラフにおける2点間のShortest Pathを求めるアルゴリズム[2]とMinimum Spanning Treeを求めるアルゴリズム[3]とが基本となっている.点集合V,枝集合Bであるグラフに対して,Fibonacci Heapを用いると,両者共に計算の手間が$O(m+n\log n)$であることが知られている.[4]但し,$n=|V|$, $m=|B|$である.その結果,提案したアルゴリズム全体では,$O(nm+n^2\log n)$の手間がかかる.

例としてFig.1のようなファイル伝達網Nを考える.簡単のためNは無向グラフの構造で表す.図において,△は点または枝のコストを表し,□は需要値を表す.このNにおいては,複製可能な点集合W及び需要値が正である点の集合Uに対して,$W=U=V$が成り立つ.母点集合Mは,$M=\{v_1, v_2, v_5\}$であり,$U=V$より,$U\ M=\{v_3, v_4, v_6\}$である.$H(v_3)\cap M=\{v_5\}$, $H(v_4)\cap M=\{v_2\}$及び$H(v_6)\cap M=\{v_5\}$より,$h(v_3)=v_5$, $h(v_4)=v_2$及び$h(v_6)=v_5$が成り立つ.$\tilde{P}_{v_5, v_3}$, $\tilde{P}_{v_2, v_4}$及び$\tilde{P}_{v_5, v_6}$を適当にとると,Mからのdelivery transferは，Fig.2のようになる．但し，図中の枝e付近の数値は$f_h(e)$を指す．

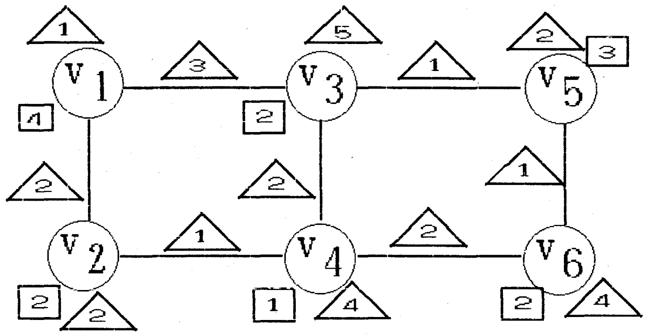
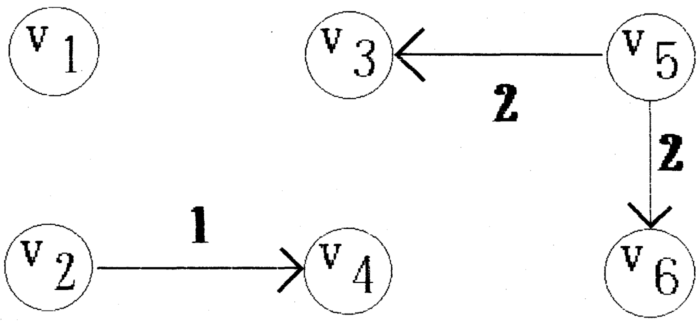


Fig.1 An example of a file transmission net N



$\psi_h(v_1)=4$, $\psi_h(v_2)=3$, and $\psi_h(v_5)=7$

Fig.2 A delivery transfer D_h from M

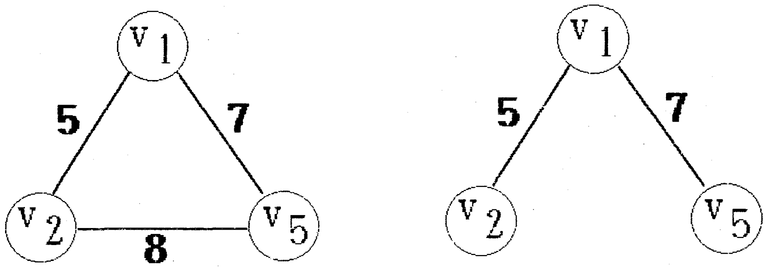
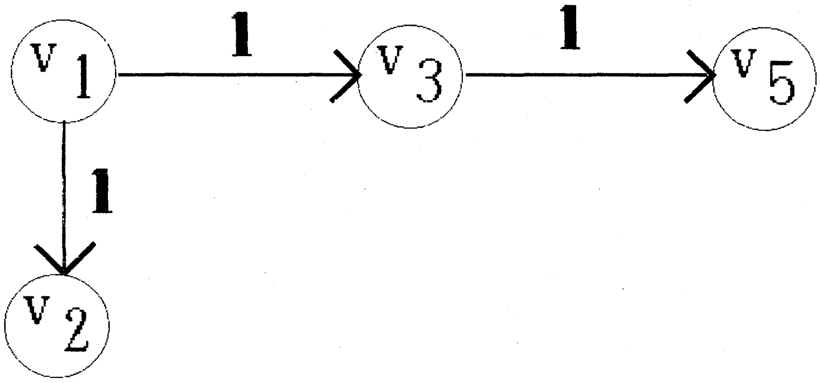


Fig.3 Associated net AN and its minimum spanning tree T_m on AN

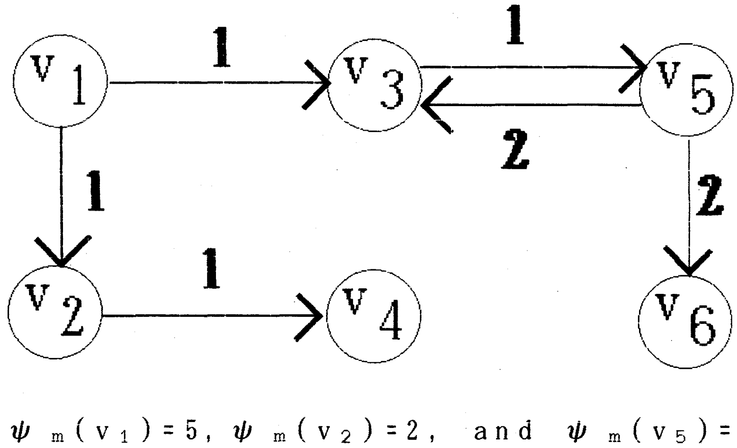


$\psi_T(v_1)=1$, $\psi_T(v_2)=-1$, and $\psi_T(v_5)=-1$.

Fig. 4　A supply transfer D_T to M

Fig. 1のファイル伝達網Nに対して，随伴ネットAN及びその最小木はFig. 3のようになる．図において辺e付近の数値はw(e)を指す．従って，Mへのsupply transfer D_T はFig. 4のようになる．尚，Fig. 4において図中の枝e付近の値は$f_T(e)$を表す．

以上より，Fig. 5のような最適なfile transfer $D_m=(\psi_m, f_m)$が得られる．図中の枝e付近の数値は$f_m(e)$を表す．



$\psi_m(v_1)=5$, $\psi_m(v_2)=2$, and $\psi_m(v_5)=6$

Fig. 5　An optimal file transfer $D_m=(\psi_m, f_m)$ on N

4.まとめと今後の課題

小文では,点と枝にコストを持つファイル伝達網Nにおいて,Nの外から,複製可能なファイルJを,各点に需要値分の部数のコピーを提供するfile transfer Dを考察の対象とした.Dを通して,各点においてJをコピーするのに要するコストと,Jのコピーが各枝を通って送るのに要するコストとの和をDのコストとし,コストが最小となるfile transferを最適なfile transferと定義した.考察の結果,母点集合M及び需要値が正である点の集合Uに対して,$M \subseteq U$であるファイル伝達網Nに対する,最適なfile transferを構成する,$O(nm+n^2\log n)$のアルゴリズムを提案した.今後,$M \setminus U \neq \phi$であるファイル伝達網Nに対する考察が必要であると思われる.

謝辞

本研究を推進するに当たり,有益な御助言を賜った,中央大学築山修治教授に深謝します.

参考文献

[1] Iri M.,Shirakawa I.,Kajitani Y., & Shinoda S., et al. "Graph Theory with Exercise," Corona Co.Ltd.,(1983).

[2] Dijkstra E. W, "A Note on two problems in connection with graphs," Numerische Math., 1, pp. 269-271. (1959)

[3] Prim R. C., "Shortest connection networks and some generalizations," Bell System TechnicalJ. 36, pp. 1389-1401 (1957).

[4] M.L.Fredman & R.E.Tarjan, "Fibonacci Heaps and Their Uses in Improved Network Optimization Algorithms," Proc. of the 25th Annual IEEE Symposiuum on Foundations of Computer Science, Singer Island, Florida, pp. 338-346.

[5] Kaneko Y., Tashiro R., Shinoda S., & Horiuchi K.: "A Linear-Time Algorithm for Designing an Optimal File Transfer through an Arborescence-Net," IEICE Transactions E75-A, No. 7, pp. 901-904(1992-07)

[6] Kaneko Y. Shinoda S., & Horiuchi K., "A Synthesis of an optimal file transfer on a file transmission net," (IEICE Trans. 投稿中).