数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 102-114

Eisenstein series and Siegel's formula in the case of Jacobi forms

立教大学理学部　　荒川恒男

このノートでは Jacobi Eisenstein 級数の Fourier-Jacobi 展開に重点をおいて Jacobi 形式の場合の Siegel 公式について説明する。ここで述べる Siegel 公式は Jacobi Eisenstein 級数を 2 次形式に付随する theta 級数の線形結合として表わす公式である。数理研講究録 **805** の 'Jacobi 形式について' においても Siegel 公式について説明したが、この項では Jacobi Eisenstein 級数の Fourier-Jacobi 展開と singular sereis に力点を置いて記述する。また、前回の講義録での若干の間違い（特に Siegel 公式 [Ar1, Theorem 4] の $m=n$ の場合）を訂正したいので、併せて読んで頂けると大変有難いです。

1　元来の Siegel 公式

まず、original の Siegel 公式 ([Si]) を復習する。$Sym_m^*(\mathbb{Z})$ を degree m の半整数対称行列の成す集合とし、$Sym_m^*(\mathbb{Z})^+$ を正定値半整数対称行列の成す $Sym_m^*(\mathbb{Z})$ の部分集合とする。類と種を定義する。

<u>定義</u> (類, 種)　　$S,\ S' \in Sym_m^*(\mathbb{Z})$ が同じ 類 (resp. 種) に属するとは、$\exists\,\gamma \in SL_m(\mathbb{Z})$ に対して $S' = {}^t\gamma S\gamma$ (resp. $\forall p$ に対して、$\exists\,\gamma_p \in SL_m(\mathbb{Z}_p)$ を選べば $S' = {}^t\gamma_p S\gamma_p$ とでき、かつ、$S,\ S'$ は同符合) となることとする。

このとき、簡約理論により

与えられた S $(\det S \neq 0)$ の定める種は有限個の類から成る.

表現の個数、局所密度を次のように定義する。$m,\ n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $m \geq n$ とする。

$S \in Sym_m^*(\mathbb{Z})^+$, $T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})^+$ に対して

$$A(S,T) = \sharp\{x \in M_{m,n}(\mathbb{Z}) \mid S[x] = T\}$$
$$A_{p^\nu}(S,T) = \sharp\{x \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \mid S[x] \equiv T \bmod p^\nu Sym_n^*(\mathbb{Z})\}$$

とおく。$S[x] = {}^t xSx$ とした。さらに局所密度 $\alpha_p(S,T)$ を

$$\alpha_p(S,T) = \lim_{\nu\to\infty} p^{-\nu(mn-n(n+1)/2)} A_{p^\nu}(S,T)$$

とする。∞-素点に関する local density $\alpha_\infty(S,T)$ は次式で与えられる。

$$\alpha_\infty(S,T) = \lim_{\mathcal{W}\longrightarrow T} \int_W dx \Big/ \int_{\mathcal{W}} d\sigma_n(Y)$$

ここで $\mathcal{W}$ は T の近傍で $W = \{x \in M_{mn}(\mathbb{R}) \mid {}^t xSx \in \mathcal{W}\}$ とする。また

$$\begin{aligned} dx &= \prod_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n} dx_{ij} \quad \text{for} \quad x = (x_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ d\sigma_n(Y) &= \prod_{1\le i\le j\le n} dy_{ij} \quad \text{for} \quad Y = (\varepsilon_{ij}y_{ij}) = {}^tY \in M_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

但し

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \ldots \quad i = j \\ 1/2 & \ldots \quad i \neq j \end{cases}$$

である。$A(S,T)$ は類不変量ではあるが、種の不変量ではない。
2 次形式の理論できわめて重要な Siegel の主定理 (Siegel 公式) は次のように定式化される。

Theorem 1 (Siegel [Si]) *$m \ge n$, $S \in Sym_m^*(\mathbb{Z})^+$, $T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})^+$ とする。S の定める種に属する類の完全代表系を $S_1, \ldots, S_h$ とする。このとき、*

$$\left(\sum_{j=1}^h \frac{A(S_j;T)}{E(S_j)}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^h \frac{1}{E(S_j)}\right) = \varepsilon \prod_{p\le\infty} \alpha_p(S;T)$$

ここで、

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \ldots \text{ if } m > n+1 \text{ or } m = n = 1 \\ 1/2 & \ldots \text{ if } m = n+1 \text{ or } m = n > 1. \end{cases}$$

この公式の右辺の無限積は収束する。

この公式の原証明は [Si] にあるが、Ono [On] の § 8 、(11) 式を用いるのが最短の証明かと思われる (直交群の玉河数の計算は認めて)。F.Sato の [Sa] においても等質空間の Siegel 公式の好例として Siegel 主定理の証明が比較的容易な形で与えられている。[Sa] は非常に興味深い Siegel 主定理の解釈である。

$$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z}) \qquad \Gamma_{n,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, c = 0 \right\}$$

とおく。k 偶数 $(> n+1)$ に対し Siegel Eisenstein 級数は次式で定義される:

$$E_{k,n}(\tau) = \sum_{M \in \Gamma_{n,\infty} \backslash \Gamma_n} \det J(M,\tau)^{-k}$$

ここで τ は Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}_n$ の点として、$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $J(M,\tau) = c\tau + d$ とする。このとき、$E_{k,n}(\tau)$ は 重さ k、次数 n の Siegel 保型形式の成すベクトル空間 $\mathfrak{M}_k(\Gamma_n)$ の元になる。よく知られているように、この Eisenstein 級数は

$$E_{k,n}(\tau) = \sum_{T \in Sym_n^*(\mathbb{Z}),\, T \geq 0} e_{k,n}(T) e(\mathrm{tr}(T\tau))$$

但し、 $e(z) = exp(2\pi i z)$

と Fourier 展開され、Fourier 係数は $T \in Sym_n^*(\mathbb{Z})^+$ ならば

$$e_{k,n}(T) = (\text{ある定数}) \times (\det T)^{k-(n+1)/2} \zeta_n(T,k)$$

で与えられる。但し、

$$\zeta_n(T,s) = \sum_{x \in Sym_n(\mathbb{Q})/Sym_n(\mathbb{Z})} \nu(x)^{-s} e(\mathrm{tr}(xT))$$

$x \in Sym_n(\mathbb{Q})$ に対して $x = c^{-1}d$ となるように $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ を選び

$$\nu(x) = |\det c|$$

とおく。このとき、$\zeta_n(T,s)$ は $\mathrm{Re}(s) > n+1$ で絶対収束し、Euler 積を持つ。

(1.1)
$$\zeta_n(T,s) = \prod_{p<\infty} \zeta_{n,p}(T,s)$$

各素数 p に対して

$$\zeta_{n,p}(T,s) = \sum_{x \in Sym_n(\mathbb{Z}[1/p])/Sym_n(\mathbb{Z})} \nu(x)^{-s} e(\mathrm{tr}(xT))$$

である。Singular series $\zeta_{n,p}(s,T)$ の explicit な表示は、Shimura [Sh]、Kitaoka [Ki] により詳しく調べられている。$\zeta_{n,p}(T,s)$ の $s = k\ (k \in \mathbb{Z}_{>0})$ での特殊値は局所密度に一致する:

(1.2) $\zeta_{n,p}(k,T) = \alpha_p(S,T)$ for $\forall S \in Sym^*_{2k}(\mathbb{Z})$, $\det(2S) = \pm 1$

例えば $S = \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}$ とすればよい。

(1.1), (1.2) により、2 次形式論の Siegel 主定理は解析的 Siegel 公式に書き換えられる。そのために theta 級数を定義する。

$S \in Sym^*_m(\mathbb{Z})^+$, $\det(2S) = 1$ に対し

$$\theta_{S,n}(\tau) = \sum_{G \in M_{m,n}(\mathbb{Z})} e(\mathrm{tr}(S[G]\tau))$$

とおく。$\theta_{S,n}(\tau) \in \mathfrak{M}_{m/2}(\Gamma_n)$ である。

Theorem 2 (解析的 Siegel 公式 [Si]) $m > 2n+2$、$S \in Sym^*_m(\mathbb{Z})^+$, $\det(2S) = 1$ とする。S の定める種に属する類の完全代表系を $S_1, \ldots, S_h$ とする。このとき、

$$\left(\sum_{j=1}^{h} \frac{\theta_{S_j,n}(\tau)}{E(S_j)} \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{E(S_j)} \right) = E_{m/2,n}(\tau)$$

2 Jacobi 形式の場合

上述の Theorems 1, 2 の Jacobi 形式の本性に合致する Jacobi 形式 version を作りたい。以下、$l \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし、$S \in Sym_l^*(\mathbb{Z})^+$ を固定して議論を進める。degree $m+l$ の半整数対称行列から成る次の family に類と種の概念を導入する。

$$Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z}) = \left\{ Q = \begin{pmatrix} M & {}^t q/2 \\ q/2 & S \end{pmatrix} \middle| M \in Sym_m^*(\mathbb{Z}),\ q \in M_{l,m}(\mathbb{Z}) \right\}$$

とおき、$Q \in Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z})$ に対し $\widetilde{Q} = M - \frac{1}{4}S^{-1}[q]$ とおく。$Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z})^{\pm}$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z})^+ &= \{Q \in Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z}) \mid \widetilde{Q} > 0\} \\ Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z})^- &= \{Q \in Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z}) \mid \widetilde{Q} < 0\} \end{aligned}$$

<u>定義</u> (S-類, S-種) $Q,\ Q' \in Sym_{m+l}^*(S;\mathbb{Z})$ が同じ S-類 (resp. S-種) に属するとは、$\exists\, \gamma = \begin{pmatrix} u & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix}$, $(u \in SL_m(\mathbb{Z}),\ y \in M_{l,m}(\mathbb{Z}))$ に対して $Q' = {}^t\gamma Q \gamma$ $\Bigg($resp. $\forall p$ に対して、$\exists\, \gamma_p = \begin{pmatrix} u_p & 0 \\ y_p & 1_l \end{pmatrix}$, $(u_p \in SL_m(\mathbb{Z}_p),\ y \in M_{l,m}(\mathbb{Z}_p))$ を選べば $Q' = {}^t\gamma_p Q \gamma_p$ とでき、かつ、$Q,\ Q'$ は同符合$\Bigg)$ となることとする。

注意) S-種の定義において u_p の条件として $u_p \in SL_m(\mathbb{Z}_p)$ の代わりに $u_p \in GL_m(\mathbb{Z}_p)$ としても同値な定義になる。

やはり、簡約理論により

(*) 与えられた Q の定める S-種は有限個の S-類から成る.

表現の個数、局所密度を次のように定義する。

$m,\ n \in \mathbb{Z}_{>0},\ m > n$ とする。$Q \in Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})^{\pm},\ T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbb{Z})^{\pm}$ に対して

$$A(Q;T) = \sharp\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z}) \,\middle|\, Q\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix}\right] = T \right\}$$

$$A_{p^\nu}(Q;T) = \sharp\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \,\middle|\, Q\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix}\right] \equiv T \bmod p^\nu Sym^*_{n+l}(\mathbb{Z}) \right\}$$

とおき、さらに local density $\alpha_p(Q;T)$ を

$$\alpha_p(Q;T) = \lim_{\nu\to\infty} p^{-\nu(mn-n(n+1)/2)} A_{p^\nu}(Q;T)$$

とする。$A(Q;T) < +\infty$ に注意する。∞-素点に関する局所密度は

$$\alpha_\infty(Q;T) = \det(2S)^{-n}\alpha_\infty(\widetilde{Q},\widetilde{T})$$

$\alpha_\infty(\widetilde{Q},\widetilde{T})$ は §1 で定義された局所密度

で与える。

$$E(Q) = \sharp\left\{ \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in SL_m(\mathbb{Z}),\ x \in M_{l,m}(\mathbb{Z}),\quad Q\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ x & 1_l \end{pmatrix}\right] = Q \right\}$$

とおく。

family $Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})^{\pm}$ に関する 2 次形式の Siegel 公式は次のようになる。

Theorem 3 ([Ar2]) $m > n$, Q, T は上記の通りとする。Q の定める S-種に属する S-類の完全代表系を $Q_1,\ldots,Q_H$ とする。このとき、

$$\left(\sum_{j=1}^{H} \frac{A(Q_j;T)}{E(Q_j)}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{H} \frac{1}{E(Q_j)}\right) = \varepsilon \prod_{p\le\infty} \alpha_p(Q;T)$$

ここで、

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \ldots \text{ if } m > n+1 \\ 1/2 & \ldots \text{ if } m = n+1 \end{cases}$$

この公式の右辺の無限積は収束する。

注意) (i) $m = n$ のときはこのままでは成立せず、$A(Q;T)$, $\alpha_p(Q;T)$ 等の定義を多少変更しないといけない。[Ar1] ではこのときの扱いが不適切なので、詳細は [Ar2, Theorem 3.4] を参照してください。

(ii) $\tilde{Q}$, $\tilde{T}$ が不定符号の場合にも、佐藤文広氏の定式化 [Sa] に倣って同様の Siegel 公式が示せる。

3 解析的 Siegel 公式

最初に正則 Jacobi 形式と歪正則 Jacobi 形式を定義する。
まず Sp_n を次数 n の symplectic 群とする:

$$Sp_n = \left\{ g \in GL_{2n} \;\middle|\; {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

l と $S \in Sym_l^*(\mathbb{Z})^+$ を固定する。
Jacobi 群 $G_n^J = G_{n,l}^J$ を Sp_{n+l} に含まれる次の形の元

$$(3.1) \quad \begin{pmatrix} a & & b & \\ & 1_l & & \\ c & & d & \\ & & & 1_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & & 0 & {}^t\mu \\ & 1_l & \mu & \rho \\ & & 1_n & \\ & & & 1_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & & & \\ \lambda & 1_l & & \\ & & 1_n & -{}^t\lambda \\ & & & 1_l \end{pmatrix}$$

$$\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_n, \quad \lambda,\ \mu \in M_{l,n}, \quad \rho \in Sym_l \right)$$

の成す Sp_{n+l} の部分群とする。G_n^J は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群である。(3.1) の形の元を簡単のため $(M,(\lambda,\mu),\rho)$ と書く。また、$(1_{2n},(\lambda,\mu),\rho)$ の形の

元の成す Jacobi 群 G_n^J の部分群 (Heisenberg 群) を $H_{n,l}$と記す。群 Sp_n は Jacobi 群 G_n^J の部分群と自然にみなされ、 Sp_n は $H_{n,l}$ を正規化するので G_n^J は Sp_n と $H_{n,l}$ の半直積になる:

$$G_n^J = Sp_n \triangleright\ H_{n,l}$$

$G_n^J(\mathbb{R})$ は Siegel-上半平面 $\mathfrak{H}_n$ と $l \times n$-行列環 $M_{l,n}(\mathbb{C})$ の直積 $\mathcal{D}_{n,l} = \mathfrak{H}_n \times M_{l,n}(\mathbb{C})$ に自然に作用する:

$$g(\tau, z) := (M\langle\tau\rangle, (z + \lambda\tau + \mu)(c\tau + d)^{-1}), \quad \text{where}$$
$$g = (M, (\lambda, \mu), \rho) \in G_n^J(\mathbb{R}),\ \ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}.$$

S と $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に依存して定まる保型因子を定義する。

$$J_{S,k}(g, (\tau, z)) := \det(c\tau + d)^k \times$$
$$e\Big(-\mathrm{tr}(S\rho) + \mathrm{tr}(-S[\lambda]\tau - 2{}^t\lambda S z + S[z + \lambda\tau + \mu](c\tau + d)^{-1}c)\Big)$$

$G_n^J(\mathbb{R})$ の最も重要な離散部分群 Γ_n^J を定義する:

$$\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{Z}), \quad \Gamma_n^J = G_n^J(\mathbb{Z}) = \Gamma_n \triangleright\ H_{n,l}(\mathbb{Z})$$

と置く。

<u>定義</u> (正則 (holomorphic) Jacobi 形式)

$\mathcal{D}_{n,l}$ 上の正則関数 $\phi(\tau, z)$ が weight k, index S の Γ_n^J に関する Jacobi 形式であるとは、次の条件 (i), (ii) を満たすときをいう。

(i) $\phi(\gamma(\tau, z)) = J_{S,k}(\gamma, (\tau, z))\phi(\tau, z) \quad \text{for } \forall\gamma \in \Gamma_n^J$

(ii) 特に $n = 1$ の場合には以下の (3.2) の形の Fourier-Jacobi 展開を持つ ($n > 1$ のときは、この条件は不要)。

weight k, index S の Γ_n^J に関する正則 Jacobi 形式の成す空間を $J_{k,S}(\Gamma_n)$ と記す。

Fourier Jacobi 展開　$\phi \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ は次の Fourier-Jacobi 展開を有する:

$$(3.2) \qquad \phi(\tau, z) = \sum_{\substack{N \in Sym_n^*(\mathbb{Z}),\ r \in M_{l,n}(\mathbb{Z}) \\ N - \frac{1}{4}{}^t r S^{-1} r \geq 0}} c(N, r) e(\mathrm{tr}(N\tau + {}^t r z))$$

定義 (歪正則 (skew-holomorphic) Jacobi 形式)

$\mathcal{D}_{n,l}$ 上の実解析関数 $\phi(\tau, z)$ が weight k, index S の Γ_n^J に関する歪正則 Jacobi 形式であるとは、次の条件 (i)′, (ii)′ を満たすときをいう。

(i)′ $\phi(\gamma(\tau, z)) = J_{S,0}(\gamma, (\tau, z)) \det \overline{J(M, \tau)}^{k-l} |\det J(M, \tau)|^l \phi(\tau, z)$
for $\forall \gamma \in \Gamma_n^J$.

(ii)′ $\phi(\tau, z)$ は次の形の Fourier Jacobi 展開を有する:

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{N \in Sym_n^*(\mathbb{Z}),\ r \in M_{l,n}(\mathbb{Z}) \\ N - \frac{1}{4}{}^t r S^{-1} r \leq 0}} c(N, r) e\left(\mathrm{tr}\left(N\overline{\tau} + \frac{i}{2} S^{-1}[r]\eta + {}^t r z\right)\right)$$

但し、$\eta = \mathrm{Im}\tau$.

weight k, index S の Γ_n^J に関する 歪正則 Jacobi 形式の成す空間を $J_{k,S}^{skew}(\Gamma_n)$ と記す。

次に Jacobi Eisenstein 級数を導入し、その Fourier Jacobi 展開の係数を § **1** と同様にある singular series の特殊値として表示する。
Γ_n^J の部分群 $\Gamma_{n,\infty}^J$ を

$$\Gamma_{n,\infty}^J = \left\{(M, (\lambda, \mu), \rho) \in \Gamma_n^J \mid M \in \Gamma_{n,\infty},\ \ \lambda = 0\right\}$$

とする。

定義 (Jacobi Eisenstein 級数)

(i) k 偶数 $> n + l + 1$ 、$(\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}$ に対し

$$E_{k,S,n}(\tau, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{n,\infty}^J \backslash \Gamma_n^J} J_{S,k}(\gamma, (\tau, z))^{-1}$$

とする。

(ii) $k > n+l+1$ 、 $l-k$ 偶数に対し

$$E^{skew}_{k,S,n}(\tau,z) := \sum_{\gamma\in\Gamma^J_{n,\infty}\backslash\Gamma^J_n} J_{S,0}(\gamma,(\tau,z))^{-1}\overline{\det J(M,\tau)}^{l-k}|\det J(M,\tau)|^{-l}$$

とする。但し、各 γ に対し $\gamma=(M,(*,*),*)$ とおく。

これらの無限級数は well-defined でかつ $k > n+l+1$ のとき絶対収束する。
しかも $E_{k,S,n}(\tau,z)\in J_{k,S}(\Gamma_n)$ 、 $E^{skew}_{k,S,n}(\tau,z)\in J^{skew}_{k,S}(\Gamma_n)$ である。
Γ_n の部分群 $U_{n,\infty}$ を

$$U_{n,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_n & x \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in Sym_n(\mathbb{Z}) \right\}.$$

で定義し、$L = M_{l,n}(\mathbb{Z})$ とおく。
任意の $T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix} \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbb{Z})$ に対し singular series を

$$\zeta_n(T;s) = \sum_{M\in\Gamma_{n,\infty}\backslash\Gamma^*_n/U_{n,\infty}} \sum_{\lambda\in L/Lc} |\det c|^{-s} e\left(\mathrm{tr}\left(T\begin{bmatrix} 1_n \\ \lambda \end{bmatrix} c^{-1}d\right)\right)$$

で定義する。ここで、$\Gamma^*_n = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid \det c \neq 0 \right\}$ である。
singular series $\zeta_n(T;s)$ は $\mathrm{Re}(s) > n+l+1$ で絶対収束し、Euler 積を持つ:

$$\zeta_n(T;s) = \prod_{p<\infty} \zeta_{n,p}(T;s) \tag{3.3}$$

但し、

$$\zeta_{n,p}(T;s) = \sum_{M\in\Gamma_{n,\infty}\backslash\Gamma^{*(p)}_n/U_{n,\infty}} \sum_{\lambda\in L/Lc} |\det c|^{-s} e\left(\mathrm{tr}\left(T\begin{bmatrix} 1_n \\ \lambda \end{bmatrix} c^{-1}d\right)\right)$$

で与えられる。$\Gamma^{*(p)}_n$ は $|\det c|$ が p 巾である $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^*_n$ から成る Γ^*_n の部分集合とする。

重要なことは、singular series $\zeta_{n,p}(T;s)$ の特殊値がこの節で定義した局所密度に一致する点である。
$k \in \mathbb{Z}$, $k > n+l+1$ と任意の $Q \in Sym^*_{2k}(S;\mathbb{Z})$, $\det(2Q) = (-1)^k$ に対し

$$(3.4) \qquad \zeta_{n,p}(T;k) = \alpha_p(Q;T)$$

Jacobi Eisenstein 級数の Fourier Jacobi 展開を

$$E_{k,S,n}(\tau,z) = \sum_{T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbb{Z}),\, \widetilde{T} \geq 0} e_{k,S,n}(T) e\Big(\mathrm{tr}(N\tau + {}^t r z)\Big)$$

$$E^{skew}_{k,S,n}(\tau,z) = \sum_{T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbb{Z}),\, \widetilde{T} \leq 0} e^{skew}_{k,S,n}(T) e\Big(\mathrm{tr}(N\overline{\tau} + \frac{i}{2} S^{-1}[r]\eta + {}^t r z)\Big)$$

とする。但し、各 T は $T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix}$ と書き、$\widetilde{T} = N - \frac{1}{4}S^{-1}[r]$ とおく。$\eta = \mathrm{Im}(\tau)$ である。
定数 $\lambda_{n,k,l}$ を

$$\lambda_{n,k,l} = \frac{2^{n(k-l)-n(n-1)/2}\pi^{n(k-l/2)}}{(\det S)^{n/2}\Gamma_n(k-l/2)}.$$

として定めると、Fourier Jacobi 係数は次のように表示される。

Proposition 4 (i) $T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbb{Z})^+$ のとき

$$e_{k,S,n}(T) = (-1)^{nk/2}\lambda_{n,k,l}\det(\widetilde{T})^{k-(n+l+1)/2}\zeta_n(T;k)$$

(ii) $T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbb{Z})^-$ のとき

$$e^{skew}_{k,S,n}(T) = (-1)^{n(k-l)/2}\lambda_{n,k,l}\det(-\widetilde{T})^{k-(n+l+1)/2}\zeta_n(T;k)$$

但し、$T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix}$ に対し $\widetilde{T} = N - \frac{1}{4}S^{-1}[r]$ とおいた。

最後に $Q \in Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})^{\pm}$ によって定まる theta 級数を導入し、解析的 Siegel 公式を記述してこの稿を終わりとする。

$m > n$ 、 $Q = \begin{pmatrix} M & {}^t q/2 \\ q/2 & S \end{pmatrix}$ 、 $\widetilde{Q} = M - \frac{1}{4}S^{-1}[q]$ とする。

(i) $Q \in Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})^+$ 、 $\det(2Q) = 1$ に対し

$$\theta_{Q,n}(\tau, z) = \sum_{G \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z})} e\big(\mathrm{tr}(Q[G]\tau + {}^t z(q\ 2S)G)\big)、$$

(ii) $Q \in Sym^*_{m+l}(S;\mathbb{Z})^-$ 、 $\det(2Q) = (-1)^m$ に対し

$$\theta^{skew}_{Q,n}(\tau, z) = \sum_{G \in M_{m+l,n}(\mathbb{Z})} e\big(\mathrm{tr}(Q[G]\tau - 2i\widetilde{Q}[G_1]\eta + {}^t z(q\ 2S)G)\big)$$

とおく。但し、 $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ with $G_1 \in \quad M_{m,n}(\mathbb{Z})$ である。

(i) の場合、$\theta_{Q,n}(\tau, z) \in J_{(m+l)/2,S}(\Gamma_n)$。(ii) の場合、$\theta^{skew}_{Q,n}(\tau, z) \in J^{skew}_{(m+l)/2,S}(\Gamma_n)$ となる。

(3.3), (3.4) 式、Proposition 4 を媒介にして Theorem 3 はつぎの形に書き換えられる。

Theorem 5 (解析的 Siegel 公式、[Ar2, Theorem 5.6]) $m > 2n + l + 2$ とし、Q は上記 (i) or (ii) の条件を満たすと仮定する。Q の定める S-種に属する S-類の完全代表系を $Q_1, \ldots, Q_H$ とする。このとき、

(i) の場合

$$\left(\sum_{j=1}^{H} \frac{\theta_{Q_j,n}(\tau, z)}{E(Q_j)}\right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{H} \frac{1}{E(Q_j)}\right) = E_{(m+l)/2,S,n}(\tau, z)$$

(ii) の場合

$$\left(\sum_{j=1}^{H} \frac{\theta^{skew}_{Q_j,n}(\tau, z)}{E(Q_j)}\right) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{H} \frac{1}{E(Q_j)}\right) = E^{skew}_{(m+l)/2,S,n}(\tau, z)$$

参考文献

[Ar1] 荒川恒男：Jacobi 形式について　数理研講究録 805、1992

[Ar2] Arakawa, T.: Siegel's formula for Jacobi forms. preprint.

[Ki] Kitaoka, Y.: Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms. Nagoya Math. J. **95**(1984), 73-84.

[On] Ono, T.: Mean value theorem in adele geometry. J. Math. Soc. Japan **20**(1968), 275-288.

[Sa] Sato, F.: Siegel's main theorem of homogeneous spaces. Commentarii Math. Universitatis Sancti Pauli. . **41**(1992), 141-167.

[Sh] Shimura, G.: On Eisenstein series. Duke Math. J. **50**(1983), 417-476.

[Si] Siegel, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen I, II, III. Ann. of Math. **36**(1935), 527-606; **37**(1936), 230-263; **38**(1937), 212-291.