

Coxeter 群 Y_{555} と Leech roots

千葉大・教養 北詰正顕 (Masaaki Kitazume)

1. 序

始めに, 本稿の内容は, 愛媛大学理学部の宮本雅彦氏との共同研究であることをおことわりしておく。

ちょうど3年前の数理解析研の集会(「組み合わせ論とその周辺の研究」)において, 「モンスターと Coxeter 群 Y_{444} 」という題名で講演をさせていただいた。そのとき紹介した, Conway 達による予想(後述の Y -presentation)は, その年の ICM90 で A.A.Ivanov が講演したように肯定的に解決された([9])。昨年(1992年)に Ivanov の論文([10])を始めとして, 関連する文献([4,14])を含んだ報告集が出版されたので, そのいくつかを読んでいたのであるが, その内容を宮本雅彦氏に話したところ, Lorentzian lattice と結び付けようという宮本氏の idea を得て, 本稿の内容がまとまったという次第である。

さて, Monster が最初に構成されたのは, 196,833 次元の可換代数の自己同型群としてであるが([6]), その際重要な役割を果たすのは, $C = 2^{1+24} \cdot (Co.1)$ という形の極大部分群であった。ここで, $Co.1$ は Conway の単純群で 24 次元の Leech lattice の全自己同型群の(位数2の)中心による商群である。この極大部分群 C と Leech lattice を出発点に 196,833 次元の表現空間が定義されるのであるが, そこに Monster が作用するという事実は, 簡単に説明付けられるものではなく, 全体像がつかみづらいと言わざるを得ない。一方 Y -presentation と呼ばれる Coxeter 群 Y_{555} を用いた記述は, Monster を簡単な生成元と関係式で与えるものであり, 上記のよう

に部分群から積み上げるのと異なり、一挙に全体を捕らえようとするものである。さらに、そこから上記の極大部分群 $C = 2^{1+24} \cdot (Co.1)$ を作ることもできる。しかし、 C を構成する過程はいささか複雑であり、 $Co.1$ と Leech lattice との関係は表に出てこず、196,833 次元の表現と結び付くものではない。

我々の目標は、Y-presentation から得られる 26 node theorem, および、Leech lattice と深い関わりをもつ Lorentzian lattice を用いて、2つの構成法の橋渡しをしたいということであり、Monster の研究に新しい光を与え得るものと期待している。

2. Golay code と Leech lattice.

まず、基本的な道具立てとして、Golay code と Leech lattice について、概略を述べておくことにする。ただし、個々の精密な定義は省略するので、[5,Chapter11,12]などを御覧頂きたい。

Ω を 24 個の元からなる集合とし、その部分集合の全体を $\mathcal{P}(\Omega)$ で表す。 $\mathcal{P}(\Omega)$ は対称差 $X+Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ により 2 元体上の 24 次元ベクトル空間とみなす。定義は省略するが、Golay code C は $\mathcal{P}(\Omega)$ の 12 次元の部分空間として与えられるものとする。 C の minimal weight は 8 で、weight 8 の元を octads と呼ぶ。octads の総数は 759 である。また、 $C^* = \mathcal{P}(\Omega)/C$ を Golay cocode と呼び、その元を $x^*(x \subset \Omega)$ などと表すことにしよう。 $\mathcal{P}(\Omega)$ には、自然な内積 $(x, y) = |x \cap y| \bmod 2$ が定義されるが、これは C 上では常に 0 であり、従って (x^*, y) という内積が well-defined であることを注意しておく。

次に、 Ω で index 付けられた正規直交基底 $v_i (i \in \Omega)$ をもつ \mathbb{R} 上の 24 次元のベクトル空間を考え、その部分集合として Leech lattice Λ を考える。Leech lattice は、24 次元 even unimodular lattice で、長さ (squared length) が 2 のベクトルを含まないものとして特徴付けられる。以下に、 Λ の長さ 4 の元 (総数 196,560 個: ± 1 倍を同一視すれば、その半分の 98,280 個) の表を掲げる。

$$(1) v_i = \frac{1}{\sqrt{8}}(-3, 1^{23}) \quad (1\text{ヶ所だけ}-3\text{で, 他は}1; i \in \Omega)$$

さらに, C の元の部分だけ -1 倍したものが Λ に入る。

$$(\text{計}: 24 \times 2^{12} = 98,304)$$

$$(2) v_X = \frac{1}{\sqrt{8}}(2^X, 0^{\Omega-X}) \quad (X\text{の部分}が2\text{で, 他は}0; X \in C, |X| = 8)$$

さらに, 2 の部分を偶数個だけ -2 にしたものが Λ に入る。

$$(\text{計}: 759 \times 2^7 = 97,152)$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{8}}((\pm 4)^2, 0^{22}) \quad (2\text{ヶ所}が\pm 2\text{で, 他は}0)$$

$$(\text{計}: \left(\frac{24 \times 23}{2}\right) \times 2^2 = 1,104)$$

3. Extra-special 2-group $2^{1+24}(= Q)$ とその表現

ここでは, Monster の極大部分群 $C = 2^{1+24}.$ (Co.1) について述べる。説明したいことは, C の正規部分群である extra-special 2-群 $Q = O_2(C) \cong 2^{1+24}$ を Leech lattice, Golay code と関係付けながら構成することである。以下の内容は, Conway[1] に(明示されてはいないが, 本質的に) 述べられている。重要なことは, $Q/Z(Q) \cong \Lambda/2\Lambda$ という (Co.1-module としての) 同型が自然になりたつことと, Q のただ1つの non-linear (2^{12} 次元) 既約表現空間の基底が Golay code で index 付けられる, ということである。

まず, Griess の factor set φ について触れなければならない。 φ は $C \times C \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ という写像で以下の (1)-(3) をみたすものである。

$$(1) \varphi(X, X) = \frac{1}{4}|X| \pmod{2}$$

$$(2) \varphi(X, Y) + \varphi(Y, X) = \frac{1}{2}|X \cap Y| \pmod{2}$$

$$(3) \varphi(X, Y) + \varphi(X + Y, Z) + \varphi(Y, Z) + \varphi(X, Y + Z)$$

$$= |X \cap Y \cap Z| \pmod{2}$$

φ は, 本質的に一意に定まることが知られている (Griess[7])。具体的な定義は, Kitazume[11] にある。

次に、集合 Q を Golay code, cocode を用いて

$$Q \cong Z_2 \times C^* \times C$$

と定義する。上記の φ と $\mathcal{P}(\Omega)$ の内積を用いて Q における 2 項演算を以下のように定義すると、 Q は群になり extra special 2-群 2^{1+24} と同型になるのである。

$$(a, x^*, g)(b, y^*, h) = (a+b+(g, y^*)+\varphi(g, h), (x+y+(g \cap h))^*, g+h)$$

例えば、単位元は $(0, 0^*, 0)$ であり、 $(a, x^*, g)^{-1} = (a + (x^*, g) + \varphi(g, g), x^*, g)$ である。結合則は、 φ の性質 (3) を用いれば直ちに得られる。

さらに、群 Q は位数 2 の中心 Z_2 を持ち、 $Q/Z(Q)$ は elementary Abel になる。 $Q/Z(Q)$ と $\Lambda/2\Lambda$ の対応は

$$C \ni X \longleftrightarrow v_X \text{ mod } 2\Lambda$$

$$C^* \ni i \longleftrightarrow v_i \text{ mod } 2\Lambda$$

という具合に与えられる。

また、 $Z_2 \times C^*$ は位数 2^{13} の elementary Abel 部分群を作るが、 Q のただ 1 つの non-linear (2^{12} 次元) 既約表現とはこの部分群の非自明な 1 次表現を Q へ誘導したものであり、その基底は coset $Q/(Z_2 \times C^*)$ を index に持つようにできるが、これは明らかに C と 1:1 に対応している。

これまでのことを使って、Monster の 196,833 次元の表現空間を記述することができるので、ここで簡単に述べておこう。196,833 は $299+98,280+98,304$ と分解され、それぞれの次元の C の既約な表現空間 3 つの和になる。

299 はさらに $300-1$ と表すのが適当で、300 とは 24 次元空間 $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ から作られる対称テンソル空間の次元で、1 次元の C 不変な空間で割ることで 299 次元空間ができる。ここには、 $C/Q (\cong C_{0.1})$ が既約に働く。

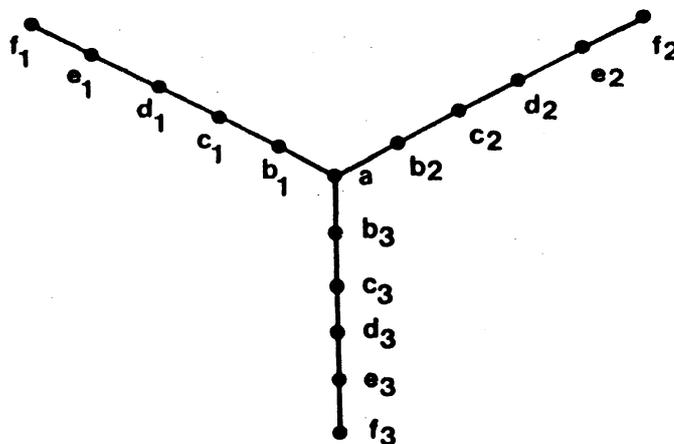
次の 98,280 は既に出てきた数字で, Leech lattice の長さ 2 の元 (± 1 倍を同一視したもの) の総数である。ベクトル空間の基底が, lattice の長さ 2 の元の集合を index に持つと言ってもよいし, 同型 $Q/Z(Q) \cong \Lambda/2\Lambda$ から, $Q/Z(Q)$ のある部分集合を index に持つと言ってもよい。この空間には, $C/Z(Q)$ が既約に働く。

最後の 98,304 は, 24×2^{12} と分解される。24 は Leech lattice の次元, 2^{12} は Q の non-linear 既約表現空間の次元で, この 2 つの空間のテンソル積を考えることによって $98,304 (= 24 \times 2^{12})$ 次元空間が得られる。ここには, C 自身が既約に働くという意味で, 最も重要なものであると考えられる。本節の目的は, この空間の Leech lattice の部分はもちろん, 2^{12} 次元空間の部分にも Golay code がかわるのだ, ということを示すことであった。

4. Y-presentation と 26 node theorem

ここでは, Y-presentation と呼ばれる, Coxeter 群 Y_{555} と用いた Monster の presentation について述べる。詳細は, [2],[3],[12] にある。

まず, 2 つの graphs を定義しておく。ひとつは, 下図のグラフで, アルファベットの Y の形の形で, それぞれの枝に 5 つずつ点があるので Y_{555} と呼ぶことにする。



次に、3元体 F_3 上の射影平面 $PTL(3,3)$ を考える。そこには13個ずつの points と lines があるので、それらをグラフの点とみなし、包含関係が成り立つときに辺で結ぶことにして、26個の点からなるグラフが出来る。(混乱を防ぐために、points, lines は射影平面に対して、点と辺はグラフに対して用いることにする。) このグラフをまた、 $PTL(3,3)$ で表すことにしよう。グラフ Y_{555} が、 $PTL(3,3)$ の部分グラフになっていることは、容易に確かめられるだろう。

次に、以上のグラフを Coxeter 群の生成元と関係式を与えているものとする。すなわち、グラフの点は生成元に、グラフの辺は2つの元の積に対する関係式を与えていると考えるのであるが、各生成元は $x^2 = 1$ をみたし、積 xy については、対応するグラフの点が結ばれているときには $(xy)^2 = 1$ 、結ばれていないときには $(xy)^3 = 1$ であることを意味するものとする。

Y_{555} は、Coxeter 群として無限群を生成するのであるが、これに簡単な関係式を1つ加えることで、Monster と位数2の群の Wreath 積 $M \wr Z_2$ (すなわち、直積 $M \times M$ に2つを入れ換える involution σ を付け加えたもの、これを Bimonster と呼ぶ) が得られるというのが、いわゆる Y -presentation である。このとき、 Y_{555} の16個の involutions は、実は Bimonster の定義に出てくる σ と Bimonster の中で共役になっている。そこで、 Y_{555} のうち f_3 が σ であるとしてよい。Bimonster の中で σ の centralizer $C(\sigma)$ を考えると、それは Monster に同型な群 $\{(x, x) \in M \times M\}$ と $\langle \sigma \rangle$ の直積である。一方、 Y_{555} の中では $f_3 (= \sigma), e_3$ を除いた部分(これを、 Y_{553} と表す。)が σ と可換である。実は、 $C(\sigma)$ は Y_{553} で生成され、さらに Bimonster と同じ関係式で presentation が得られる。

これらのことを、定理として掲げておく。

定理 (Conway, Norton, Soicher, Ivanov)

$$M \wr Z_2 \cong \langle Y_{555}, (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10} = 1 \rangle$$

$$M \times Z_2 \cong \langle Y_{553}, (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10} = 1 \rangle$$

非常にきれいな関係式ではあるのだが、その数学的な意味は今のところはっきりしていないと思われる。

さて、[12]で紹介した主要結果は次の定理 ([3]) であった。上記の 16 個の生成元に、さらに 10 個を加えたものが、驚嘆すべききれいな関係式をみたすと言うものである。

定理 (The 26 node theorem)

Bimonster $M \setminus Z_2$ に 26 個の involutions で、グラフ $PGL(3,3)$ が与える関係式をみたすものが存在する。

Monster に関する情報は $C(\sigma)$ を考えることによって得られる。すでに述べたように、生成元のひとつが σ であるとしてよいから、それが $PGL(3,3)$ の 1 つの point に対応するものとしよう。ひとつの point には 4 本の line が通るから、 $C(\sigma)$ の元としては、12 個の points と 9 本の lines に対応する 21 個の involutions があり、実際それらが $C(\sigma)$ を生成する。なお、points の個数を 12 としたのは σ 自身を除いたわけであるが、 $C(\sigma)/\langle \sigma \rangle$ が Monster であるので、含めずに考えた方がよい。

以下、Bimonster の 26 個の生成元の集合を S^{26} 、 $C(\sigma)$ の 21 個の生成元の集合を S^{21} と表すことにしよう。

なお、さらにどのような関係式を追加すれば Bimonster の presentation になるかということもわかっている (Soicher[16])。しかし、ここではそのことには触れない。以下では、グラフの関係式だけを考えて Coxeter 群を reflection 群として捉えようとするのが目的となるからである。

5. Y-presentation からの C の構成

ここでは、Y-presentation から、 $C = 2^{1+24} \cdot (Co.1)$ を構成する方法の概略を述べる (Norton[13])。

まず, $p \in S^{26}$ を point とし, p を通る 4 本の lines を L_1, L_2, L_3, L_4 とおき, 各 L_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 上の p 以外の 3 点を x_i, y_i, z_i とおく。このとき L_i, x_i, y_i, z_i は D_4 型の Coxeter 群の関係式をみたす。従って $\langle L_i, x_i, y_i, z_i \rangle$ は位数 2 の中心を持つが, 実は, これが i によらないことが示されるので, それを p^* と表す。

このとき, 次が成り立つ。

$$\langle p, p^* \mid p = \text{a point} \in S^{26} \rangle \cong 2^{1+26}$$

$$\langle p, p^* \mid p = \text{a point} \in S^{21} \rangle \cong 2^{1+24}$$

右辺にでてくる extra-special 2-群の中心の元は, 交換子 $[p, p^*]$ である (p によらない)。また, p 全体, あるいは, p^* 全体は, elementary Abel 群を生成する。

次に, 2 つの points $p(\neq)q$ に対し, p, q 通る line $L(p, q)$ をとり, 積 pq の $L(p, q)$ による共役 $pq^{L(p, q)}$ を考える。これを COG と名付けるのだが, それは, これらによって Conway Group と関わる部分群 (Monster の極大部分群 C に対応するもの) を生成されることから来る命名である。

$$\langle p, p^*, pq^{L(p, q)} \mid p, q, L \in S^{26} \rangle \cong 2^{1+26} \cdot (2^{24} : (Co.1))$$

$$\langle p, p^*, pq^{L(p, q)} \mid p, q, L \in S^{21} \rangle \cong 2 \times 2^{1+24} \cdot (Co.1)$$

これらは, Norton[13] に述べられているが, 証明は Conway 群に対する生成元と関係式に関する coset enumeration を含んでおり, 直接的に理解できるものではない。例えば, 2 節で述べたような 2^{1+24} と Golay code との関わりを見つけることは, これだけの情報では難しいと思う。

6. Lorentzian lattice と Leech roots

ここでは, Lorentzian lattice と, その周辺の諸概念について述べる。ここで述べきれなかったことは, [8] あるいは [5, Chapter 23] にある。

対応する affine Dynkin diagram と同型である。

$$A_1^{24}, A_2^{12}, A_3^8, A_4^6, D_4^6, A_5^4 d_4, A_6^4, A_7^2 d_5^2, A_8^3, D_6^4, A_9^2 d_6, E_6^4, \\ A_{11} D_7 E_6, A_{12}^2, D_8^3, A_{15} D_9, D_{10} E_7^2, A_{17} E_7, D_{12}^2, A_{24}, E_8^3, D_{16} E_8, D_{24}$$

Γ を Leech lattice 以外の Niemeier lattice のひとつとし, Lorentzian lattice に含まれていると考えると, $L = \Gamma \oplus \tilde{U}$ と表される。ここで, \tilde{U} は U と同型な 2 次元の lattice で, (定数倍を除いて) ただひとつの長さ 0 のベクトルを含んでいる。 Γ の roots の集合は, spherical root system になり, 全体で 24 次元空間を張る。

上記の定理 (1) に述べられているのは, Γ を $\text{Aut}(L)$ で動かすことにより, \tilde{U} が "deep hole isotropic element" と呼ばれる長さ 0 のベクトル w と, "Leech glue vector" と呼ばれる Leech root q で生成され, このときの root system の simple root の集合が Leech roots の集合になっている, というのである。

この deep hole isotropic element は Leech lattice の deep hole と呼ばれる興味深い対象と関連したものであるが, 詳しい定義は省略する。Leech glue vector については, 次のように特徴付けられる。

まず, w を deep hole isotropic element とし, $\langle w \rangle^\perp$ の Leech roots の集合を X とする。 X の diagram を考えたときの任意の連結成分を X_1 とし, $a \in X_1$ で X_1 から a を除いた集合の diagram が spherical になるとき, a を X_1 の extended root と呼ぶことにする。(例えば, X_1 の diagram が E_6 なら 3 つの extended roots がある。) このとき, w の Leech glue roots とは, Leech root q で, $\langle w \rangle^\perp$ の任意の連結成分に対し, その extended roots のうちひとつだけと内積が -1 になり, 他の (extended roots 以外のものも含めた) 全てのベクトルと直交するようなもの, である。

具体的な例については次節に譲る。

7. Leech roots と Y_{555}

さて、ようやくであるが、本稿の主題である Leech roots と Y_{555} の関係について述べたい。

そのために、Leech glue roots についての重要な例を具体的に記しておく。

$w = (w', 2, 3)$, ($w' = \frac{1}{\sqrt{8}}(2^{24}) \in \Lambda$) は deep hole isotropic element であり、その Leech glue root のひとつとして $q = ((0^{24}), 1, -1)$ がとれる。Leech root $v = (v', 1, b)$ が $\langle w, q \rangle^\perp$ に含まれる条件は、 $(w, v) = 0, (q, v) = 0$ より $(w', v') - 2b - 3 = 0, -b + 1 = 0$ から $(w', v') = 5$ を得るので、 v' の成分の和の $\frac{2}{\sqrt{8}}$ 倍が 5 になる。一方、 v が root (i.e. 長さ 2) であることから、 v' は長さ 4 となり、先に与えた Leech lattice の長さ 4 のベクトルの表から、 $\langle w, q \rangle^\perp$ の Leech roots は、 $(\frac{1}{\sqrt{8}}(-3, 1^{23}), 1, 1)$ という形の 24 個で、diagram は a_1^{24} である。また、 $\langle w \rangle^\perp$ の Leech roots は、これらに $(\frac{1}{\sqrt{8}}(5, 1^{23}), 1, 2)$ という形の 24 個を加えたもので、 -3 と 5 の成分の位置が等しいもの同志が結ばれて A_1^{24} の diagram を作る。さらに、 w の Leech glue root の全体は、

$$(v_X, 1, \frac{|X|}{4} - 1) \quad (X \in \mathcal{C})$$

の 2^{12} 個で Golay code の元と 1:1 に対応している。

なお、こうした Golay code との対応は、特殊な w, q をとったから可能になったということではなく、root system が a_1^{24} になるように w, q をとれば、24 点集合 Ω を、 $\langle w \rangle^\perp$ の Leech roots で q と直交しないもの全体として、各 Leech glue roots r に r と直交するベクトルからなる $\mathcal{P}(\Omega)$ の部分集合を対応させれば、 q を零ベクトル (空集合) とする Golay code が出来上がる。

この他にも、Leech glue roots の集合に興味ある構造が入る例が見受けられ、例えば、 A_2^{12} からは、 F_3 上の ternary Golay code が、 D_4^6 からは、 F_4 上の Hexacode ができる。

そして、もうひとつ面白いものが現れるものとして、 E_6^4 の場合があり、ここから Monster の生成元の集合 S^{21} に対応するものが現れるのである。

定理

E_6^4 に対する Leech glue roots は 9 個存在し、これらに E_6^4 の 12 個の extended roots を合わせた 21 個の roots の diagram は、 S^{21} の作るグラフと同型である。

とくに、この 21 個の roots に関する reflections で生成される群は、 S^{21} のグラフが与える生成元と関係式から定義される Coxeter 群と同型である。(従って、ある正規部分群による商群として Monster が現れる。)

Lorentzian lattice の root に関する reflection は、lattice の自己同型になっていることが知られている。その全体の作る群は巨大な無限群であり、完全な構造はわかっていない。

さて、こうして Lorentzian lattice の中に、 S^{21} を作ることができた。最後に述べたいことは、これらが Golay code と自然なつながりを持つということである。

定理

上記定理の extended roots が、先に考えた A_1^{24} に対する Leech glue roots になるように、(E_6^4 を与える Deep hole isotropic element を) とることができる。このとき、12 個の roots は Golay code の基底を作る。

この定理により、 S^{21} の points の集合が、Golay code の基底であると思ってよい。ここから、5 節で言及した 2^{1+24} と Golay code との関わりが得られるわけである。実際、 $Q = \langle p, p^* \rangle \cong 2^{1+24}$ とおくと、12 個の p^* と中心の元 $[p, p^*]$ とで位数 2^{13} の正規部分群が作られ、その商群の生成元として、12 個の p (の像) がとれる。この商群は、 p 達を基底として Golay code を作ることになり、2 節で述べたように 2^{12} 次元表現の基底も、Golay code の元と対応する。ただし、この節で述べたことは、あくまで Coxeter 群 Y_{555} の話であって Monster の話にするには、さらにひとつの関係式を加えね

ばならない。この関係式を, Lorentzian lattice の言葉で解釈することができると思うのだが, 今のところよくわからない。

8. 終わりに

さあ, そして, どうなるのか? というところで終わってしまった, と思われたらどうか。実際, 我々はまだほんの入口に立っているところである。ここで述べ得たことといえば, Golay code を中心に Monster と関わりのあるさまざまなものが配置されている, ということだけであった。

我々の目的は, この, すべてに共通する言葉 Golay code を活かしながら, 196,833 次元空間と, そこに働く 21 個の involutions をつくることで, Monster を再構成したいということである。

この続きが良い形にまとまって, どこかで発表できたら良いと思っている。

9. 文献

- [1] J.H.Conway, A simple construction for the Fischer-Griess monster group, Invent. Math. 79(1985),513-540.
- [2] J.H.Conway, R.T.Curtis, S.P.Norton, R.A.Parker and R.A.Wilson, "Atlas of Finite Groups", Oxford Univ. Press, 1985.
- [3] J.H.Conway, S.P.Norton and L.H.Soicher, The Bimonster, the Group Y_{555} and the Projective Plane of Order 3, in "Proceedings of Computers in algebra, Chicago, 1985", Dekker (1988), 27-50.
- [4] J.H.Conway and A.D.Pitchard, Hyperbolic reflections for the Bimonster and $3Fi_{24}$, in "Groups, Combinatorics and Geometry", Cambridge, 1992.
- [5] J.H.Conway and N.J.A.Sloane, "Sphere Packings, Lattices and Groups", Springer.
- [6] R.L.Griess, The Friendly Giant, Invent. Math. 69(1982),1-102.
- [7] R.L.Griess, Code loops, J. Algebra 100(1986),224-234.
- [8] K.Harada, M.L.Lang and M.Miyamoto, Sequential Construction of Niemeier Lattices and Uniqueness proof, to appear.

- [9] A.A.Ivanov, Geometric Presentations of Groups with an application to the Monster, in "Proc. ICM Kyoto 1990".
- [10] A.A.Ivanov, A geometric characterization of the Monster, in "Groups, Combinatorics and Geometry", Cambridge, 1992.
- [11] M.Kitazume, Code loops and even codes over \mathbf{F}_4 , J. Algebra 118(1988), 140-149.
- [12] M.Kitazume, モンスターと Coxeter 群 Y_{444} , 京都大学数理解析研究所講究録 735 「組合せ論とその周辺の研究」 (1990), 1-18.
- [13] S.Norton, Presenting the Monster?, Bull. Soc. Math. Belg. 62(1990),595-605.
- [14] S.Norton, Construction the Monster, in "Groups, Combinatorics and Geometry", Cambridge, 1992.
- [15] L.H.Soicher, From the Monster to the Bimonster, J. Algebra 121(1989), 275-280.
- [16] L.H.Soicher, More on the Group Y_{555} and the Projective Plane of Order 3, J. Algebra 136(1991), 168-174.