数理解析研究所講究録
第849巻1993年1-12

Association schemes and Spin models

坂内英一 述
野見山栄二、藤川裕子(九大・理)記

1 Introduction

Spin model は Jones が (Pacific.J.Math.1989 [15]) で 定義した概念であるが、ここではつぎのことについて introductory な説明をこころみた。

1. Jones [15] ,Jaeger [14] に従って、spin model の定義と、それがどのようにして link invariant を導くかの解説、また association scheme との関連についての 解説

2. 宗政-綿谷 [18] による generalized spin model の導入の解説、更に坂内-坂内 [5] による一般化である generalized generalized spin model の概念の導入。

3. この方向での新しいいくつかの仕事についての解説。

なお講演者によるより新しい introductory な解説として、数学 **45** 巻 (1993)55-75, に発表された論説:代数的組合せ論ーアソシエーションスキームの最近の話題ーも参照してください。

2 Spin model

定義 2.1 有限集合 X と、以下の条件を満たす関数 $w_+, w_- : X \times X \to C$ が存在するとき、(X, w_+, w_-) を *Spin model with loop variable* D という。

但し、$D^2 = |X| = n$

(0) (symmetric condition)
$w_+(\alpha,\beta) = w_+(\beta,\alpha)$
$w_-(\alpha,\beta) = w_-(\beta,\alpha)$

(1) $w_+(\alpha,\beta)w_-(\alpha,\beta) = 1$

(2) $\sum_{x\in X} w_+(\alpha,x)w_-(x,\beta) = n\delta_{\alpha\beta}$

(3) (star-triangle relation)
$$\sum_{x\in X} w_+(\alpha,x)w_+(\beta,x)w_-(\gamma,x) = Dw_+(\alpha,\beta)w_-(\beta,\gamma)w_-(\gamma,\alpha)$$
for any $\alpha,\beta,\gamma \in X$

これを、行列 $W_\pm = (w_\pm(\alpha,\beta))_{\alpha\in X,\beta\in X}$ のことばでいいかえると、

(0′) ${}^tW_+ = W_+,\ {}^tW_- = W_-$
(1′) $W_+ \circ W_- = J$
(2′) $W_+W_- = nI$
(3′) $W_+Y_{\beta\gamma} = Dw_-(\beta,\gamma)Y_{\beta\gamma}$

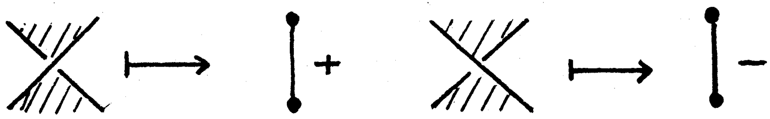
但し、${}^tW_\pm$ は $W_\pm$ の転置行列とし、演算$\circ$は Hadamard product、J は全ての要素が 1 の $n\times n$ 行列、I は n 次の単位行列とする。
また $Y_{\beta\gamma} = (w_+(\beta,x)w_-(\gamma,x))_{x\in X}$ は n 次のベクトル 。

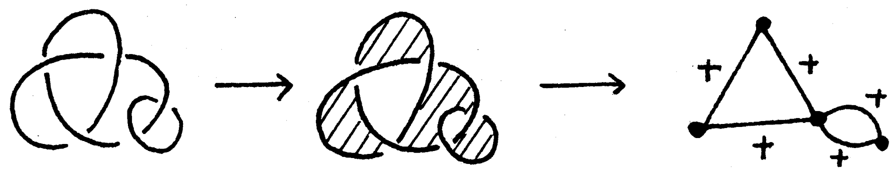
Spin model が存在すれば、それから link invariant が以下のようにして作られることが、Jones によって示された。

1. L を向きづけられていない link diagram とする。

2. L の領域の色分けを黒と白で無限領域は白、隣接する領域は異なるようする。

3. 黒い領域を頂点、交差点を辺とし、さらに各辺に対して図のように符号を付けた signed graph をつくる。





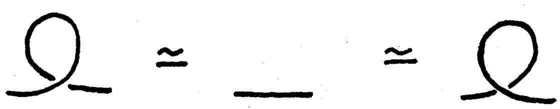
4. state σ を L の頂点から X への写像とし、次で partition function を定義する。

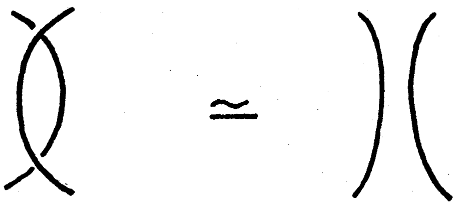
$$Z_L := D^{-b(L)} \sum_{\sigma:state} \prod_{edges} w_{\pm}(\sigma(a), \sigma(b))$$

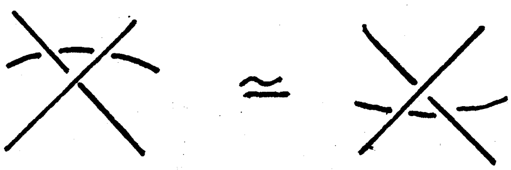
但し、$b(L)$ は黒い領域の個数、a, b は各辺の端点、$\pm$はその辺の符号とする。 すると、Z_L は、unoriented link diagram から C への写像となる。

定理 2.1 (Reidemeister) 有限回の *Reidemeister moves I,II,III* で移り合う 2 つの *link diagrams* は、同型である。

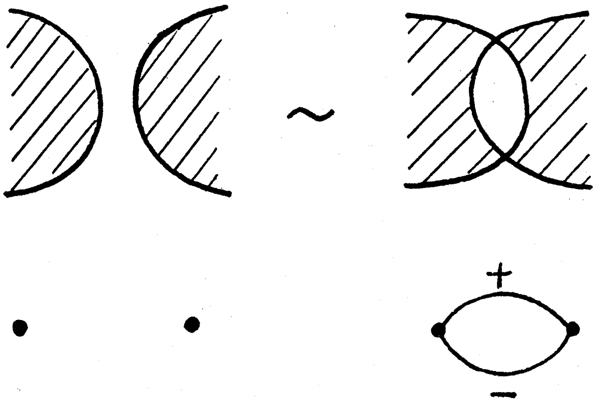
Reidemeister moves

I. 

II. 

III. 

事実　　Z_L は、Reidemeister move II,III では不変



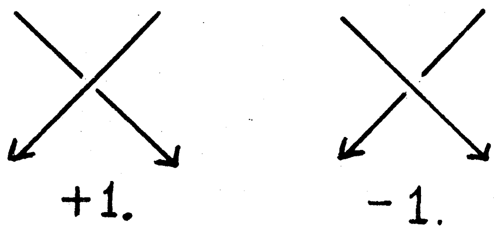
事実

$Z($  $) \ = \ a^{-1}Z($  $)$ (1)

$$(2)$$

$Z($  $) \ = \ aZ($  $)$ for some $a \in C$ (3)

oriented link diagram $\vec{L}$ の crossing に対して、図のように交差点 c に対して $sign(c)$ を定義する。



$$w(\vec{L}) := \sum_{c:crossings} sign(c)$$

$$R_{\vec{L}} := a^{-w(\vec{L})} Z_L$$

定理 2.2 $R_{\tilde{L}}$ は、*oriented link invariant* である。

Spin model(X, w_+, W_-) が存在すれば、次のことが成り立つ。

1.$w_+(\alpha, \alpha) = a \quad w_-(\alpha, \alpha) = a^{-1}$

$\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) = Da^{-1} \quad \sum_{x \in X} w_-(\alpha, x) = Da$

但し、$\alpha \in X$ は任意　$a \neq 0$

2.[Prop.2.16 in Jones [15]]

各 $z \in C$ に対して、$\sharp\{(a,b) | w_+(a,b) = z\}$ は n の倍数である。

上の１、２は、組合せ論でよく知られた association scheme の性質に近く、自然に association scheme を用いて Spin model を作ることが考えられる。

3 Assiciation scheme

定義 3.1 (Association scheme) 有限集合 X と、X 上の $d+1$ 個の関係 $R_i (i = 0, 1, \ldots, d)$（すなわち R_i 達は、$X \times X$ の部分集合）の組 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ で、つぎの条件 *(i)-(iv)* を満たすものを *association scheme* とよぶ。

(i)　$R_0 = \{(x,x) | x \in X\}$

(ii)　$R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_d = X \times X$ かつ　$R_i \cap R_j = \phi \quad if\ i \neq j$

(iii) 各 $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ に対して,${}^tR_i := \{(x,y) | (y,x) \in R_i\}$ と定義するとき ${}^tR_i = R_{i'}$ *for some* $i' \in \{0, 1, \ldots, d\}$

(iv) $\forall i, j, k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ に対して $p_{ij}^k := \sharp\{z \in X | (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j\}$ は、$(x,y) \in R_k$ のもとで、(x,y) のとり方によらず一定

更に次の条件 (v) を満たすものを、可換な *association scheme* と呼び、条件 (vi) を満たすものを、対称な *association scheme* と呼ぶ。

(v) $p_{ij}^k = p_{ji}^k \quad for\ {}^\forall i, j, k$

(vi) ${}^tR_i = R_i \quad for\ {}^\forall i$

(対称な association scheme は可換な association scheme になることは直ちに分かる)

A_i を R_i に対する adjacency matrix とする。

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x,y) \in R_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この時、$A_iA_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ が成り立ち $A_0, A_1, \ldots, A_d$ で生成される $M_n(C)$ (複素数体 C 上の n 次完全行列環、ただし $n = |X|$) の subalgebra $\mathcal{A} = < A_0, A_1, \ldots, A_d >$ を $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra と呼ぶ。このとき $\mathcal{A}$ は、$d+1$ 個の primitive idempotents $E_0, E_1, \ldots, E_d$ をもつ。このとき $E_0 = 1/nJ$ としても一般性を失わない。

$\mathcal{A}$ の 2 つの基底 $A_0, A_1, \ldots, A_d$ と $E_0, E_1, \ldots, E_d$ の変換行列 P, Q

i.e.

$$(A_0, A_1, \ldots, A_d) = (E_0, E_1, \ldots, E_d)P$$

$$n(E_0, E_1, \ldots, E_d) = (A_0, A_1, \ldots, A_d)Q$$

とすると、$PQ = QP = nI$ が成り立つ。

特に、$P = \bar{Q}$ となるとき、$\mathcal{X}$は self-dual であるという。

•$d = 1$ の場合、Trivial association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_0, R_1\})$

$A_0 = I, A_1 = J - I$となり、$W_+ = t_0A_0 + t_1A_1, D = -(t_1)^2 - (t_1)^{-2}, a = t_0 = -(t_1)^{-3}$として出来る Spin model(Potts' model とよばれる) は、$W_+ + \varepsilon W_- = (\varepsilon t_1 + t_1^{-1})(DI + \varepsilon J)$ を満たし、これからできる link invariant は Kauffman(実際には Jones)polynomial の特殊値である。

•$d=2$ の場合の association scheme （すなわち strongly regular graph ）からできる Spin model も、$W_+ + \varepsilon W_- = (\varepsilon t_1 + t_1^{-1})(DI + \varepsilon J)$ を満たし、これからできる link invariant も Kauffman polynomial の特殊値になることが Jaeger によって示された。

ここで、strongly regular graph S に対して Spin model が存在する必要十分条件は、S が locally strongry regular graph であること。

定理 3.1 (Jaeger [14])

(1) $< W_+, J, \cdot > \overset{\psi}{\cong} < W_-, I, \circ >$
$\quad W_+ \longmapsto DW_-$

(2) $< W_+, J, \cdot >$ が *Hadamard product* に関して閉じているならば、
(i) $< W_+, J, \cdot >$ は *self-dual assciation scheme* の *Bose-Mesner alge*
(ii) $W_+ = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i$ であれば $W_- = D\sum_{i=0}^{d} t_i E_i$

定理 3.2 (Jaeger) $\mathcal{X} = (X, \{R_i\})_{0\leq i\leq d}$ を *self-dual* な *association scheme* とし $\mathcal{A}$ をその *Bose-Mesner algebra* とする
$\mathcal{A}$ の元 W_+, W_- を $W_+ = \sum_{i=0}^{d} t_i A_i, W_- = D\sum_{i=0}^{d} t_i E_i$ とするとき (X, W_+, W_-) が *Spin model* となる必要十分条件は、

(i) $PT = DT^-$
(ii) ${}^\forall i, j \in \{1, \ldots, d\}$ *s.t.* $t_i \neq t_j$, と $(\beta, \gamma) \in R_i$ に対して
$\quad E_j Y_{\beta\gamma} = 0$

である。

但し $T = {}^t(t_0, \ldots, t_d), T^- = {}^t(t_0^{-1}, \ldots, t_d^{-1})$

4 Spin model の一般化

定義 4.1 (generalized spin model) *[Munemasa-Watatani [18]]* 有限集合 X と以下の条件を満たす関数 $w_+, w_- : X \times X \longrightarrow C$ が存在するとき

(X, w_+, w_-) を *generalized spin model* とよぶ。

(1) $w_+(\beta, \alpha) w_-(\alpha, \beta) = 1$
(2) $\sum_{x \in X} w_-(\alpha, x) w_+(x, \beta) = n\delta_{\alpha\beta}$
(3) $\sum_{x \in X} w_+(\alpha, x) w_+(x, \beta) w_-(x, \gamma) = D w_+(\alpha, \beta) w_-(\beta, \gamma) w_-(\alpha, \gamma)$
$\quad for\ \alpha, \beta, \gamma \in X$
ただし $D^2 = n = |X|$

この *generalized spin model* からも前と同様にして、*oriented link invariant* が作られる。

宗政－綿谷 [18] は $|X| = 3, 4, 5$ のときの例を作った。
坂内－坂内 [4] は、巡回群 $G = G_m (= Z_m)$ の group association scheme $\mathcal{X}(G_m)$ から generalized spin model が組織的に構成できることを示した。

定義 4.2 (generalized generalized spin model) *[坂内－坂内 [5]]* 有限集合 X と、次の条件を満たす関数 $w_i : X \times X \longrightarrow C$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ が存在するとき (X, w_1, w_2, w_3, w_4) を *generalized generalized spin model* という。

(1) $w_1(\alpha, \beta) w_3(\beta, \alpha) = 1$
$\quad w_2(\alpha, \beta) w_4(\beta, \alpha) = 1$
(2) $\sum_{x \in X} w_1(\alpha, x) w_3(x, \beta) = n\delta_{\alpha\beta}$
$\quad \sum_{x \in X} w_1(\alpha, x) w_3(x, \beta) = n\delta_{\alpha\beta}$
(3*a*) $\sum_{x \in X} w_1(\alpha, x) w_1(x, \beta) w_4(\gamma, x) = D w_1(\alpha, \beta) w_4(\gamma, \alpha) w_4(\gamma, \beta)$
(3*b*) $\sum_{x \in X} w_1(x, \alpha) w_1(\beta, x) w_4(x, \gamma) = D w_1(\beta, \alpha) w_4(\alpha, \gamma) w_4(\beta, \gamma)$

oriented link diagram $\vec{L}$ から、前と同様に graph をつくり、辺に次のように方向と番号を対応させる。

partition function: $Z_{\vec{L}} := D^{-b(\vec{L})} \sum_{\sigma:state} \prod_{a\to b} w_{n(a\to b)}(\sigma(a), \sigma(b))$
$n(a \to b)$: a から b への辺の番号

このとき、この partition function は, Reidemeister move II,III で不変である。

- Generalized generalized spin model の特別な場合

  (X, W_+, W_-) を generalized spin model とする。

  $W_i = (w_i(\alpha,\beta))_{\alpha\in X,\beta\in X}$, $\{\varepsilon,\varepsilon'\} = \{+,-\}$ とする。

  W_1, W_2, W_3, W_4 のうちの 2 つは $\{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}$ にあり、残りの 2 つが $\{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ にある場合を考える。

  (1) $W_1, W_2 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}, W_3, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ のときを Jones type とよぶ。

  (2) $W_1, W_4 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}, W_2, W_3 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ のときを Psuedo Jones type とよぶ。

  (3) $W_1, W_3 \in \{W_\varepsilon, {}^tW_\varepsilon\}, W_2, W_4 \in \{W_{\varepsilon'}, {}^tW_{\varepsilon'}\}$ のときを Hadamard type とよぶ。

講演者の spin model に関する興味は、当時九大にいた河野氏が L.Kauffman を九大の談話会 (1991 年 11 月頃) におよび、そのとき Jaeger の論文 [14] の preprint をもらったことに始まる。
self-dual な symmetric association scheme の上に新しい spin model が存在するのではないか、と構成を試みたことに始まった。最初の出発点は、Hamming association scheme $H(d,q)$ 上の spin model の構成（坂内-坂内-生田-川越 [7]）であり、ここでは Hamming association scheme の指標

表に対する modular invariance の決定（坂内-坂内 [3]）が役に立った。また modular invariance を考えることは、cyclic 群上の (generalized) spin model の構成（坂内-坂内 [4]）につながった。
またこれらは、野村 [19] の Hadamard グラフ上の spin model の構成の試みへ、影響を与えた。
Hamming association scheme $H(d,q)$ 上の spin model は、spin model のテンソル積が、また spin model になることから、完全グラフ K_q の d 個の直積から出来る spin model として直ちに得られること。また従って、その link invariant は Jones 多項式の d 剰になり新しい link invariant が生じないことも分かる。(de la Harpe-Jones によるコメント)。cyclic group 上の spin model の link invariant が一般的に何になるかはまだ計算されていないと思われる。[symmetric な場合 Goldschmidt-Jones [12] ,Kobayasi-Murakami-Murakami [17] により、また non-symmetric な場合の特別な例 $m=3,4,5$ は川越謙一により計算されている。] 野村の spin model は Jones 多項式で区別できない 2 つの link を区別できることがわかり（Jones-野村)、その後はっきりした invariant の形は Jaeger により与えられた。(Jaeger [14] 参照)
generalized generalized spin model のいくつかの例は、坂内-坂内 [5] で与えられているが Hadamard 行列と関係する Hadamard type のものの例は山田により色々と与えられている。(これらの link invariants が何であるかは調べられていない)
なお、関連した結果としては、

- Attila Sali [9] により size の小さい spin model の分類が色々となされている。
- 生田卓也 [13] により、$d=2$ の non-symmetric association scheme 上の generalized spin model の非存在が証明されている。
- Balmaceda [1] により、$d=2$ の symmetric cunference graph 上の spin model の分類の別証も与えられている。

なお、この京都の講演に触発されてのいくつかの新しい結果としては、

- symmetric association scheme 上に generalized spin model があればその association scheme は self- dual でなければならないこと。今まで association scheme 上の modular invariance を用いて spin model の構成を試みてきたが、spin model の存在が modular invariance を導くこと。(坂内-坂内-Jaeger により論文を準備中)
- 脇本実氏により、与えられた affine Lie algebra から、その表現論を用いて、新しい family としての spin model が (有限アーベル群上に) 構成されること。

参考文献

[1] J.Balmaceda, On a Theorem of Jaeger, submitted to Mem.Fac.Kyushu Univ.

[2] 坂内英一, 代数的組合せ論, 数学,**45**(1993),55-75.

[3] E.Bannai and E.Bannai, Modular invariance of the character table of the Hamming association scheme $H(d,q)$,to appear in J. of Number Theory.

[4] E.Bannai and E.Bannai, Spin models on finite cyclic groups, preprint.

[5] E.Bannai and E.Bannai, Generalized generalized spin models, preprint.

[6] E.Bannai and E.Bannai, Generalized spin models and association schemes, preprint.

[7] E.Bannai, E.Bannai, T.Ikuta, and K.Kawagoe, Spin models constructed from the Hamming association schemes $H(d,q)$, (preprint, unpublished) (第 10 回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 岐阜 (1992), 参照).

[8] E.Bannai and T.Ito, Algebraic Combinatorics I:Association schemes, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.

[9] E.Bannai, F.Jaeger and A.Sali, Classification of Small Spin Models, submitted to Mem.Fac.Kyushu.univ.

[10] A.E.Brouwer, A.M.Cohen and A.Neumaier, Distance Regular Graphs, Springer-Verlag,1989.

[11] P.de la Harpe, Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's Higman-Sims model, preprint.

[12] D.M.Goldschmidt ans V.F.R.Jones, Metaplectic link invariants, Geom. Dedicata, **31**(1989), 165-191.

[13] T.Ikuta, Non-existence of spin models corresponding to nonsymmetric associasion schemes of class 2 on $4m+3$ vertices if $m \geq 1$, submitted to Mem.Fac.Kyushu univ.

[14] F.Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata, **44**(1992), 23-52.

[15] V.F.R.Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific. J. Math.,**137**(1989), 311-334.

[16] L.H.Kauffman, An invariant of regular isotopy, Trans. Amer. Math. Soc.,**318** (1990),417-471.

[17] T.Kobayashi, H.Murakami and J.Murakami, Cyclotomic invariants for links, Proc. Japan Acad.,**64** A(1988), 235-238

[18] A.Mumemasa and Y.Watatani, Generalized spin models, in preparation.

[19] K.Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, preprint.