数理解析研究所講究録
第 850 巻 1993 年 109-123

Wiener 過程·Poisson 過程の汎関数の Coherent State 表現

京大工 小倉 久直 (Hisanao OGURA)

1 まえがき

Wiener[1], Cameron-Martin[2], Itô[3] らによる Gauss 過程 (Wiener 過程または Brown 運動過程) の非線形汎関数の理論は、物理学・工学・生物学の分野でも乱流理論, 不規則表面散乱, 非線形システム, 神経情報処理などにおいて最近よく応用される。Wiener-Itô の理論は Poisson 過程[4] あるいは周知の Hida-Ikeda による加法過程[5] への拡張がある。筆者が行なっている不規則表面による波動散乱問題の解析においては、不規則表面を一様な Gauss 確率場とみなし、移動群に対する確率の不変性をもちいて、平面波入射に対する散乱波動場の形を "stochastic Floquet theorem"[6] によって定め、波動確率場を決める未知の一様確率場を Wiener-Itô 展開によって表し、確率的境界条件を解いて Wiener 核とよぶ展開係数を定める。一旦このように確率散乱波動場が不規則面としての Gauss 確率場の汎関数として定まれば、散乱波の任意の統計量が計算できる。この様な方法を拡張すれば、不規則平面・不規則円筒面・不規則球面などによるスカラ波・電磁波の散乱問題が解かれる。しかしながら、本質的に多項式展開である Wiener-Itô 展開によって解きうるのはすべて不規則表面の粗さが小さい場合であって、最近必要とされている波動の波長に比して粗さが非常に大きい場合の解法は非常に困難である。その様な現実の応用上の必要性から、ここでは Wiener-Itô 展開に代わる汎関数表現法として、以下のように光量子論で用いられている Coherent-State 表現の可能性を定式化する。

Wiener 過程の汎関数の Wiener-Ito 展開は多変数 Hermite 多項式展開に他ならないが、これは光の量子場の Fock 空間表示に対応するものである。Fock 表示は光子数表示であるが、コヒーレンス理論[7, 8] では光子消滅演算子の固有状態であるコヒーレント状態 (coherent state) が取り扱われ、非直交な過備系 (overcomplete set) であるコヒーレント状態によって光量子状態を表示することができる。これをコヒーレント状態表示 (coherent-state representation) と呼ぶ。コヒーレント状態表示は連続自由度、すなわち光量子場の場合に移行することができる。本論文では先ずこれらの量子場の議論を翻訳して Wiener 過程の汎関数にたいしても "coherent-state" 表現を導く。特に coherent state が Hermite 多項式の母関数であることを用いると、過備系による coherent state 表現は、完備系による Wiener-Itô 展開に変換されることを示す。

この意味でも coherent state 表現はより自由度の大きい表現といえる。

本論文では更にPoisson過程の場合も類比的に定式化できることを示す。すなわち、Poisson変数に対しても "coherent state" を定義することができ、同様な 非直交・過備系による汎関数の "coherent-state" 表現を導く。この表現は連続自由度、すなわちPoisson過程の場合に移行することが出来る。さらに、coherent state はCharlier多項式の母関数であって、母関数展開を用いればWiener-Charlier展開[4], すなわち、Poisson過程の汎関数のWiener-Itô展開が再び導かれる。

これらの一部は工学誌に報告したが[9, 10], 以下に述べる実用向きの定式化は甚だ形式的で数学的にきちんと定義されていないので、数学の方が正しい定式化を与えて下さることを希望する。

2 Gauss 変数の関数と Coherent State 表現

2.1 Gauss 変数と Coherent State

Gauss 変数 X を平均値 0, 分散 α の実Gauss変数とし、R$=\{-\infty < x < \infty\}$ 上の確率測度を

$$dP(x) = G(x;\alpha)dx, \quad G(x;\alpha) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\alpha}} \tag{1}$$

で、測度 d$P(x)$ による (複素数値) 関数 $f(X)$ の平均値を $\langle f(X)\rangle$ で、複素数 $z=\mu+\mathrm{i}\lambda$ の全体を C で表わす。X のモーメント母関数$\langle \mathrm{e}^{zX}\rangle = \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}z^2}$ は z の整関数である。

Coherent States Gauss変数 Xの "coherent state" を

$$\phi(X,z) \equiv \mathrm{e}^{zX-\frac{\alpha}{2}z^2}, \quad z \in C \tag{2}$$

で定義する。 後に (20),(17) に示すように coherent state は d/dx の固有値 z、平均値 1 の固有関数で、Hermite多項式の母関数である。$\phi(X,0)=1$ であるが、その平均・共分散は[1]

$$\langle\phi(X,z)\rangle \;=\; 1 \tag{3}$$

$$K(\bar{z},z) \;\equiv\; \left\langle \overline{\phi(X,z)}\phi(X,z')\right\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\bar{z}z'} \tag{4}$$

(4) は共分散であるから、Hermite 性、正定値性をもつ。

[1]平均値を引かない形で、便宜上以下で共分散・分散と呼んでおく。

2.2 Hilbert 空間 L^2,$\mathcal{B}$と相互写像

Hilbert 空間 L^2 $\langle|f(X)|^2\rangle < \infty$ となる関数 f の全体は、よく知られた手続きにより、共分散・分散:

$$\left\langle\overline{f(X)}g(X)\right\rangle \equiv \int_R \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}P(x) \tag{5}$$

$$\langle|f(X)|^2\rangle \equiv \int_R |f(x)|^2\mathrm{d}P(x) \tag{6}$$

を内積・2乗ノルムとする Hilbert 空間 $L^2 \equiv L^2(R,\mathrm{d}P)$ と見なし得る。Coherent state $\phi(X,z)$ (z:固定) は $L^2(R)$ の元である。$\phi(X,z)$ ($z \in C$) の全体は L^2 で稠密で、非直交な過備系を成すが、例えば格子点 $z_{mn} = (na + imb), n, m = 0 \pm 1, \pm 2, \cdots$ 上の部分系は, $ab \leq 2\pi/\alpha$ ならば完備系である[11, 12]。

Hilbert 空間 $\mathcal{B}$ 複素平面 C 上の 2 次元測度 $\mathrm{d}M(z)$ を

$$\mathrm{d}M(z) \equiv \frac{\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha|z|^2}\mathrm{d}^2 z = \frac{\alpha}{\pi}\mathrm{e}^{-\alpha r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

で定義する。ここで $z \equiv \mu + \mathrm{i}\lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}^2 z \equiv \mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ である。L^2 と同様に、C 上の整関数 $F(z)$ で次の意味のノルム有限な整関数から作られる Hilbert 空間を $\mathcal{B} \equiv L^2$ (C; $\mathrm{d}M$) と書き、その内積・2乗ノルムを

$$\langle\!\langle\overline{F(Z)}G(Z)\rangle\!\rangle \equiv \int_C \overline{F(z)}G(z)\mathrm{d}M(z) \tag{8}$$

$$\langle\!\langle|F(Z)|^2\rangle\!\rangle \equiv \int_C |F(z)|^2\mathrm{d}M(z) \tag{9}$$

で表す。ここで $\langle\!\langle F(Z)\rangle\!\rangle$ 等は、複素 Gauss 確率変数 Z の関数 $F(Z)$ の 2 次元 Gauss 確率測度 $\mathrm{d}M(z)$ による平均とみなす表記法である。正べき乗 z^n は $\mathcal{B}$ の一つの完備直交系を作る:

$$\langle\!\langle\overline{Z}^m Z^n\rangle\!\rangle \equiv \int_C \bar{z}^n z^m \mathrm{d}M(z) = \delta_{mn}\frac{n!}{\alpha^n} \tag{10}$$

再生核 Hilbert 空間 一般に正定値関数 $K(\bar{z}, z')$ にたいしては、$K(\bar{z}, z')$ を再生核とする再生核 Hilbert 空間が存在し、更に、$K(\bar{z}, z'), (z' \in C)$ は稠密である (Aronszajn)[13]。(4) で定義した正定値関数 $K(\bar{z}, z') = \mathrm{e}^{\alpha\bar{z}z'}$ の再生核空間は $\mathcal{B}$ で与えられる。すなわち、任意の $F(z) \in \mathcal{B}$ に対して $K(z, \bar{z'})$ を再生核とする再生公式

$$F(z) = \langle\!\langle\overline{K(\bar{z}, z')}F(z')\rangle\!\rangle \equiv \int_C K(z, \bar{z'})F(z')\mathrm{d}M(z') \tag{11}$$

が成立つ (Bargmann)[14]。$\mathcal{B}$を Bargmann 空間とも呼ぶ。

L^2 から $\mathcal{B}$ への写像 (Bargmann 写像) [14, 15] $f \in L^2$ に対し、$\mathcal{B}$への写像

$$xF(z) = \langle\phi(X,z)f(X)\rangle \equiv \int_R \mathrm{e}^{zx - \frac{\alpha}{2}z^2} f(x)\mathrm{d}P(x) \tag{12}$$

を定義すれば z の整関数であって、$F(z) \in \mathcal{B}$ である。上の写像は unitary であって内積を保存する:

$$\langle \overline{f(X)} g(X) \rangle = \langle\!\langle \overline{F(Z)} G(Z) \rangle\!\rangle \tag{13}$$

$$\langle |f(X)|^2 \rangle = \langle\!\langle |F(Z)|^2 \rangle\!\rangle \tag{14}$$

$$\langle f(X) \rangle = \langle\!\langle F(Z) \rangle\!\rangle = F(0) \tag{15}$$

$\mathcal{B}$ から L^2 への逆写像·Coherent State 表現 $\mathcal{B}$ から L^2 への写像を、$F \in \mathcal{B}$ に対して

$$f(X) = \langle\!\langle \phi(X,Z) F(\bar{Z}) \rangle\!\rangle \equiv \int_C e^{zX - \frac{\alpha}{2} z^2} F(\bar{z}) \mathrm{d}M(z) \tag{16}$$

で定義する。これは (12) の逆写像であって、$F(z)$ を (12) にとったものは L^2 の元 $f(X)$ の過備系 $\phi(X,z)$ による表現と見做しうる。これを $f(X)$ の "coherent state" 表現と呼ぶ。

2.3 Wiener-Hermite 展開

Hermite 多項式 (2) で定義された coherent state $\phi(X,z)$ は Hermite 多項式の母関数である:

$$\phi(X,z) \equiv e^{zX - \frac{\alpha}{2} z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} h_n(X,\alpha) \tag{17}$$

$$h_n(x,\alpha) \equiv G(x;\alpha)^{-1} \left(-\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^n G(x;\alpha) \tag{18}$$

$h_n(x,\alpha), n = 0,1,2,\cdots$ は $G(x;\alpha)$ 関する Hermite 多項式で、L^2 における完備直交系をつくる:

$$\langle h_n(X,\alpha) h_m(X,\alpha) \rangle = \delta_{mn} n! \alpha^n \tag{19}$$

$\alpha = 1$ の場合が通常の Hermite 多項式 は $H_n(x) = h_n(x,1)$ で $h_n(x,\alpha) = \sqrt{\alpha^n} H_n(x/\sqrt{\alpha})$ の関係がある。(17) より次の関係式がでる:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x,z) = z\phi(x,z), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h_n(x,\alpha) = n h_{n-1}(x,\alpha) \tag{20}$$

すなわち $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ は h_n の降次演算子に相当し、coherent state は降次演算子の固有関数で固有値 z を持つ。これは光量子論における coherent state の定義に相当する[7, 8]。

Wiener-Hermite 展開 (17),(10) を用いると、$\mathcal{B}$ の元である z の正べき $z^n, n = 0,1,2,\cdots$ は、$\mathcal{B}$ から L^2 への写像 (16) により Hermite 多項式 $h_n(X,\alpha)$ に写像される。したがって、$\mathcal{B}$ における巾級数 $F(z) = \sum f_n z^n$ に対し、L^2 では $h_n(X,\alpha)$ の級数が対応する。coherent state $\phi(x,z)$ が (17) のように展開されれば $F(z)$

は巾級数となり、$f(X)$ の coherent state 表現 (16) は

$$f(X) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n n!} h_n(X,\alpha) \left\langle h_n(X',\alpha) f(X') \right\rangle \tag{21}$$

の様に $h_n(X,\alpha)$ の級数形に書直される。(21) は良く知られた Hermite 多項式による $f(X)$ の直交展開である。

3 Wiener 過程の汎関数の Coherent State 表現

3.1 Gauss 系列汎関数の Coherent State 表現

前節の 1 次元の結果は容易に多次元または無限次元の場合に拡張される。

Gauss 系列 平均値 0, 分散 α の独立な実 Gauss 系列を $\boldsymbol{X} = \{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \}$ で表す。$\boldsymbol{X}$ の確率測度 $\mathrm{d}P(\boldsymbol{X})$ を確率測度 (1) の (無限) 直積

$$\mathrm{d}P(\boldsymbol{X}) = G(\boldsymbol{x};\alpha)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \prod_n G(x_n;\alpha)\mathrm{d}x_n \tag{22}$$

で表す。複素数の系列 (関数または無限次元ベクトル) $\boldsymbol{z} = \{z_n\}$ の全体を $\boldsymbol{C}$ で表し、$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{X} \equiv \sum_n z_n X_n$, $z^2 \equiv \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z} = \sum_n z_n^2$ と書く。

Coherent State (2) に対応して、Gauss 系列 $\boldsymbol{X}$ の coherent state を

$$\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{z}) \equiv \mathrm{e}^{\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{X} - \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{z}^2} = \prod_n \mathrm{e}^{z_n X_n - \frac{\alpha}{2} z_n^2}, \quad \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C} \tag{23}$$

で表すと、つぎの関係が成り立つ:

$$\langle \phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{z}) \rangle \quad = \quad 1 \tag{24}$$

$$K(\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}') \quad \equiv \quad \left\langle \overline{\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{z})}\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{z}') \right\rangle = \mathrm{e}^{\alpha \bar{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{z}'} \tag{25}$$

Hilbert 空間 L^2 $\langle |f(\boldsymbol{X})|^2 \rangle < \infty$ となる汎関数 f のつくる Hilbert 空間 L^2 の内積・2 乗ノルムを共分散 $\left\langle \overline{f(\boldsymbol{X})} g(\boldsymbol{X}) \right\rangle$, 分散 $\langle |f(\boldsymbol{X})|^2 \rangle$ で表す。

複素 Gauss 系列 $\boldsymbol{X}$ と同様に、平均値 0, 分散 $1/\alpha$ の独立な複素 Gauss 系列を $\boldsymbol{Z} = \{Z_n\}$ で表す。$\boldsymbol{Z}$ の確率測度を (7) の直積,

$$\mathrm{d}M(\boldsymbol{Z}) = \prod_n \frac{\alpha}{\pi} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}|z_n|^2} \mathrm{d}^2 z_n \tag{26}$$

で定義し、 $\mathrm{d}M(\boldsymbol{Z})$ による $F(\boldsymbol{Z})$ の平均値を $\langle\langle F(\boldsymbol{Z})\rangle\rangle$ で表す。

Hilbert 空間 $\mathcal{B}$　$\boldsymbol{C}$ 上の整関数で表される複素汎関数 $F(\boldsymbol{Z})$ のつくる Hilbert 空間 $\mathcal{B}\equiv L^2\ (\boldsymbol{C};\mathrm{d}M)$ を定義し、その内積・2乗ノルムを (8),(9) と同様に $\langle\langle\overline{F(\boldsymbol{Z})}G(\boldsymbol{Z})\rangle\rangle, \langle\langle|F(\boldsymbol{Z})|^2\rangle\rangle$ で表す。特に (10) を多変数に拡張すると

$$\langle\langle\overline{Z_{i_1}\cdots Z_{i_n}}Z_{j_1}\cdots Z_{j_m}\rangle\rangle = \alpha^{-n}\delta_{mn}\delta_{ij}^n \tag{27}$$

$$\delta_{ij}^n \equiv \sum_{\text{all pair }(\nu,\mu)}\prod^n \delta_{i_\nu j_\mu} \tag{28}$$

ここでδ_{ij}^nは2組の n 個の添字 $i\equiv(i_1,\cdots,i_n), j\equiv(j_1,\cdots,j_n)$ から1つずつ取り出した対 (i_ν,j_μ) に対応する n 個のδ_{i_ν,j_μ}の積をすべての組合せ $n!$個について加え合わせたものである。

再生核 Hilbert 空間　$K(\bar{z},z)$ を再生核とする再生核 Hilbert 空間は $\mathcal{B}$で与えられ、次の再生公式が成り立つ:

$$F(\boldsymbol{z}) = \langle\langle\overline{K(\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{Z}')}F(\boldsymbol{Z}')\rangle\rangle \equiv \int_C K(\boldsymbol{z},\bar{\boldsymbol{z}}')F(\boldsymbol{z}')\mathrm{d}M(\boldsymbol{z}') \tag{29}$$

L^2 から $\mathcal{B}$への写像　$f\in L^2$ に対し、$\mathcal{B}$への写像 を

$$F(\boldsymbol{z}) = \langle\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{z})f(\boldsymbol{X})\rangle \equiv \int_{\boldsymbol{R}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}-\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{z}^2}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}P(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

で定義する。これは unitary 写像であって (13)-(15) と同様な関係式が成り立つ。

$\mathcal{B}$から L^2への逆写像·Coherent State 表現　$\mathcal{B}$ から L^2 への写像を、$F\in\mathcal{B}$ に対して

$$f(\boldsymbol{X}) = \langle\langle\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})F(\bar{\boldsymbol{Z}})\rangle\rangle \equiv \int_{\boldsymbol{C}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{X}-\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{z}^2}F(\bar{\boldsymbol{z}})\mathrm{d}M(\boldsymbol{z}) \tag{31}$$

で定義する。これは (30) の逆写像で、Gauss 系列 $\boldsymbol{X}=\{X_n\}$ の汎関数 $f(\boldsymbol{X})$ の coherent state 表現である。

3.2　汎関数の連続的 Coherent State 表現

Wiener 過程　Wiener 過程すなわち Brown 運動過程を $B(t),\ t\in T=\{a\le t\le b\}$, (または$-\infty<t<\infty$), $B(0)=0$ で表し、独立増分 $\mathrm{d}B(t)$ は $\langle\mathrm{d}B(t)\rangle=0,\ \langle|\mathrm{d}B(t)|^2\rangle=\mathrm{d}t$ を満たす Gauss 変数とし、(22) に対応する測度を $\mathrm{d}P(\boldsymbol{B})$ で表す。$B(t)$ の汎関数を $f[\boldsymbol{B}]=f[B(t),a\le t\le b]$、対応する Hilbert 空間を $L^2=L^2[\boldsymbol{B},\mathrm{d}P(\boldsymbol{B})]$ と書き、$X_n\to\mathrm{d}B(t), z_n\to z(t), \alpha\to\mathrm{d}t$ と置いて n の和を t の積分に置換える。

Coherent State 汎関数　(23) に対応する coherent state 汎関数は上記の極限移行のもとで

$$\phi[\boldsymbol{B},\boldsymbol{z}] = \exp\left[\int_T z(t)\mathrm{d}B(t) - \frac{1}{2}\int_T z(t)^2\mathrm{d}t\right] \tag{32}$$

の形に書ける。ここで $\int z(t)\mathrm{d}B(t)$ は Wiener 積分を表す。(24)- (25) に対応して次式が成り立つ:

$$\langle \phi[\boldsymbol{B},\boldsymbol{z}]\rangle = 1 \tag{33}$$

$$K[\overline{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}'] = \langle \phi[\boldsymbol{B},\overline{\boldsymbol{z}}]\phi[\boldsymbol{B},\boldsymbol{z}']\rangle \tag{34}$$

$$= \exp\left(\int_T \overline{z(t)}z'(t)\mathrm{d}t\right) \tag{35}$$

複素白色雑音 $\boldsymbol{Z} = \{z(t), t \in T\}$ の測度 (26) は $z_n \to z(t), \alpha \to \mathrm{d}t$ の極限では、複素 Gauss 白色雑音の確率測度を与える。すなわち、$z(t)$ の実部·虚部は平均値 0 の独立な Gauss 白色雑音とみなしうる: $\left\langle \overline{z(t)}z(t')\right\rangle = \delta(t-t')$. ここでは Fは $z(t)$ の汎関数とみなした記法 $F[\boldsymbol{z}]$ を用い, 対応する Bargmann 空間を $\mathcal{B} = L^2[\boldsymbol{z}, \mathrm{d}M(\boldsymbol{z})]$ で表す。

L^2から $\mathcal{B}$への写像 $f \in L^2$ の L^2から $\mathcal{B}$への写像を

$$F[\boldsymbol{z}] = \langle \phi[\boldsymbol{B},\boldsymbol{z}]f[\boldsymbol{B}]\rangle \tag{36}$$

$$= \left\langle \exp\left[\int_T z(t)\mathrm{d}B(t) - \frac{1}{2}\int_T z(t)^2\mathrm{d}t\right] f[\boldsymbol{B}]\right\rangle \tag{37}$$

で定義する。この写像は unitary で (13),(14) と同様の関係が成り立つ:

$$\langle \overline{f[\boldsymbol{B}]}g[\boldsymbol{B}]\rangle = \langle\!\langle \overline{F[\boldsymbol{Z}]}G[\boldsymbol{Z}]\rangle\!\rangle \tag{38}$$

$$\langle |f[\boldsymbol{B}]|^2\rangle = \langle\!\langle |F[\boldsymbol{Z}]|^2\rangle\!\rangle \tag{39}$$

$\mathcal{B}$から L^2への逆写像 · Coherent State 表現 $\mathcal{B}$ から L^2 への写像を、$F \in \mathcal{B}$ に対して

$$f[\boldsymbol{B}] = \langle\!\langle \phi[\boldsymbol{B},\boldsymbol{Z}]F[\bar{\boldsymbol{Z}}]\rangle\!\rangle \tag{40}$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \exp\left[\int_T z(t)\mathrm{d}B(t) - \frac{1}{2}\int_T z(t)^2\mathrm{d}t\right] F[\bar{\boldsymbol{z}}]\mathrm{d}M(\boldsymbol{z}) \tag{41}$$

で定義する。これは (37) の逆写像であって、この汎関数 $f[\boldsymbol{B}]$ の表現式の右辺は、複素 Gauss 白色雑音 $z(t), t \in T$ に関する平均に書かれている。(41) が Wiener 過程の汎関数の coherent state 表現である。

3.3 汎関数の Wiener-Itô 展開

多変数 Hermite 多項式 n 変数 Hermite 多項式を

$$h_n(x_{i_1},\cdots,x_{i_n};\alpha) = \alpha^n G(\boldsymbol{x};\alpha)^{-1}\prod_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{\partial}{\partial x_{i_\nu}}\right)G(\boldsymbol{x};\alpha) \tag{42}$$

$$\langle h_n(X_{i_1},\cdots,X_{i_n};\alpha)h_m(X_{j_1},\cdots,X_{j_m};\alpha)\rangle = \alpha^n\delta_{mn}\delta^n_{ij} \tag{43}$$

$H_n(X_{i_1},\cdots,X_{i_n}) \equiv h_n(X_{i_1},\cdots,X_{i_n};1)$ で定義する。(43) は直交性である。$x_i \to \mathrm{d}B(t)$, $\alpha \to \mathrm{d}t$ の極限で、$h_n[\mathrm{d}B(t_1), \cdots, \mathrm{d}B(t_n)] \equiv h_n(\mathrm{d}B(t_1),\cdots,\mathrm{d}B(t_n);dt)$ を n 次の Wiener-Hermite 微分式 とよぶ。(43) に対応する直交性

$$\begin{aligned}&\langle h_n[\mathrm{d}B(t_1),\cdots,\mathrm{d}B(t_n)]h_m[\mathrm{d}B(s_1),\cdots,\mathrm{d}B(s_n)]\rangle\\ &= \quad \delta_{mn}\delta^n(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n \end{aligned} \tag{44}$$

を持つ。ここで $\delta^n(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})$ は (28) において$\delta^n_{i_\nu j_\mu}$ を$\delta(t_\nu - s_\mu)$ に置き換えたものである。更に (27) は次の形に移行する:

$$\langle\!\langle z(t_1),\cdots,z(t_n)\overline{z(s_1)},\cdots,\overline{z(s_m)}\rangle\!\rangle = \delta_{mn}\delta^n(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s}) \tag{45}$$

Coherent State 汎関数の Wiener-Hermite 展開 Coherent state (17) が Hermite 多項式の母関数であったのと同様に、coherent state 汎関数 (32) は次の形に展開される:

$$\begin{aligned}\phi[\boldsymbol{B},\boldsymbol{z}] &= \exp\left[\int_T z(t)\mathrm{d}B(t) - \frac{1}{2}\int_T z(t)^2\mathrm{d}t\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_T\cdots\int_T z(t_1)\cdots z(t_n)h_n[\mathrm{d}B(t_1),\cdots,\mathrm{d}B(t_n)]\end{aligned} \tag{46}$$

右辺の各項は n 重 Wiener 積分であり、$\phi[\boldsymbol{B},\boldsymbol{z}]$ は h_nの母汎関数ともみなしうる。これを (37) に代入すれば、$\mathcal{B}$における次の巾展開がえられる。f_nは $f[\boldsymbol{B}]$ により定まる関数である:

$$F[\boldsymbol{z}] = \sum_{n=0}^{\infty}\int_T\cdots\int_T z(t_1)\cdots z(t_n)f_n(t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \tag{47}$$

Wiener-Itô 展開 (46),(47) を (41) に代入して (45) を用いると, 結局次式がえられる:

$$f[\boldsymbol{B}] = \sum_{n=0}^{\infty}\int_T\cdots\int_T f_n(t_1,\cdots,t_n)h_n[\mathrm{d}B(t_1),\cdots,\mathrm{d}B(t_n)] \tag{48}$$

これがよく知られた Wiener-Itô 展開であり、光量子場の Fock 空間表示に相当する。

3.4 汎関数の離散的 Coherent State 表現

規格直交系による変換 T上に適当な $L^2(T)$ の実完備規格直交系 $\{\xi_j(t), j=0,1,2,\cdots\}, (\xi_j,\xi_k)_T = \delta_{jk}$, をとり、複素数値関数 $z(t)$ を次のように直交展開する:

$$z(t) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{Z}_j\xi_j(t), \quad \mathcal{Z}_j \equiv \int_T \xi_j(t)z(t)\mathrm{d}t \tag{49}$$

Gauss 系列　その時、$\xi_j(t)$ の Wiener 積分 $B_j, j = 0,1,2,\cdots,$ は独立な実 Gauss 系列である:

$$B_j \equiv \int_T \xi_j(t)\mathrm{d}B(t), \quad \langle B_j B_k \rangle = \delta_{jk} \tag{50}$$

これを用いて Wiener 積分は次のように表現できる:

$$\int_T z(t)\mathrm{d}B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{Z}_j B_j \tag{51}$$

Coherent State 汎関数　(50),(51) により、(32) は (23) と同形に変換される:

$$\phi[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{z}] = \exp\left[\sum_{j=0}^{\infty}(\mathcal{Z}_j B_j - \frac{\mathcal{Z}_j^2}{2})\right] \tag{52}$$

複素 Gauss 系列　$\boldsymbol{z} \equiv \{\mathcal{Z}_j, j = 0,1,2,\cdots\}$ は 1 つの独立な複素 Gauss 系列で、白色雑音系列 $\{Z_n\}$ と同様な性質をもつ:

$$\langle\!\langle \overline{\mathcal{Z}_j}\mathcal{Z}_k \rangle\!\rangle = \delta_{jk}, \quad \langle\!\langle \mathcal{Z}_j \mathcal{Z}_k \rangle\!\rangle = 0 \tag{53}$$

L^2 から $\mathcal{B}$ への写像　(37) の写像に対応して、

$$F[\boldsymbol{z}] = \left\langle \exp\left[\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{Z}_j B_j - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{Z}_j^2\right] f[\boldsymbol{B}] \right\rangle \tag{54}$$

$\mathcal{B}$ から L^2 への逆写像

$$f[\boldsymbol{B}] = \int_{\mathcal{B}} \exp\left[\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{Z}_j B_j - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{Z}_j^2\right] F[\bar{\boldsymbol{z}}]\mathrm{d}M(\boldsymbol{z}) \tag{55}$$

で定義する。これは (54) の逆写像で、離散的な coherent state (52) による汎関数 $f[\boldsymbol{B}]$ の表現を与える。

離散的 Coherent State 表現の Wiener-Hermite 展開　(46) と同様に、

$$\phi[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{z}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n}\mathcal{Z}_{j_1}\cdots\mathcal{Z}_{j_n}H_n(B_{j_1},\cdots,B_{j_n}) \tag{56}$$

これを用いれば前と同様にして (55) は

$$f[\boldsymbol{B}] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j_1}\cdots\sum_{j_n} f_n^d(j_1,\cdots,j_n)H_n(B_{j_1},\cdots,B_{j_n})\right] \tag{57}$$

の形に書ける。これは L^2 の離散的基底である独立 Gauss 系列 $\{B_j, j = 0,1,2,\cdots\}$ による Wiener-Itô 展開で、Cameron-Martin 展開[2] の名で呼ばれる。

4 Poisson 過程の汎関数と Coherent State 表現

4.1 Poisson 変数と Coherent State 表現

Poisson 変数と階乗モーメント母関数 正整数値をとる確率変数 X を平均値 α (一般に n 次キュムラント $\langle X^n\rangle_c = \alpha$) の Poisson 変数とし、その Poisson 分布を

$$j(x;\alpha) \equiv \mathrm{e}^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots \tag{58}$$

とおく。X の階乗モーメント $\left\langle X^{(n)}\right\rangle \equiv \langle X(X-1)\cdots(X-n+1)\rangle = \alpha^n$ の母関数を次の形に表す:

$$\left\langle (1+z)^X \right\rangle = \sum_{x=0}^{\infty}(1+z)^x j(x;\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha z} \tag{59}$$

Coherent States Poisson 変数 X の"coherent state" を

$$\phi(X,z) = (1+z)^X \mathrm{e}^{-\alpha z} \tag{60}$$

で定義する。後に述べるように、これは差分演算子Δの固有値 zの固有関数で、Charlier 多項式の母関数である。更に

$$\langle \phi(X,z)\rangle = 1 \tag{61}$$

$$K(\bar{z},z) \equiv \left\langle \overline{\phi(X,z)}\phi(X,z')\right\rangle \tag{62}$$

$$= \mathrm{e}^{\alpha[(1+\bar{z})(1+z')-1]}\mathrm{e}^{-\alpha(\bar{z}+z')} = \mathrm{e}^{\alpha\bar{z}z'} \tag{63}$$

が示されるが、これは Gauss 変数の coherent state の性質 (3),(4) とαの定義の差を除き全く一致する。

Hilbert 空間 L^2 $\left\langle |f(X)|^2\right\rangle < \infty$ となる関数 f の全体は、よく知られた手続きにより Hilbert 空間 L^2 をつくり、その内積・2乗ノルムを共分散・分散であらわす:

$$\left\langle \overline{f(X)}g(X)\right\rangle \equiv \sum_{x=0}^{\infty}\overline{f(x)}g(x)j(x;\alpha) \tag{64}$$

$$\left\langle |f(X)|^2\right\rangle \equiv \sum_{x=0}^{\infty}|f(x)|^2 j(x;\alpha) \tag{65}$$

再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{B}$ $K(\bar{z},z) = \mathrm{e}^{\alpha\bar{z}z'}$ を再生核とする再生核 Hilbert 空間は Gauss 変数の $\mathcal{B}$と同形であるから、(7)-(11) の公式がそのまま成り立つ。特に再生公式は

$$F(z) = \langle\!\langle \overline{K(\bar{z},z')}F(z')\rangle\!\rangle \equiv \int_C K(z,\bar{z}')F(z')\mathrm{d}M(z') \tag{66}$$

L^2 から $\mathcal{B}$ への写像 (12) と同じく、$f \in L^2$ に対し、$\mathcal{B}$への写像を

$$F(z) = \langle \phi(X,z) f(X) \rangle \tag{67}$$

$$\equiv \sum_{x=0}^{\infty} (1+z)^x e^{-\alpha z} f(x) j(x;\alpha) \tag{68}$$

で定義すれば、$F(z) \in \mathcal{B}$ である。特に $f \equiv 1$ は $F \equiv 1$ に写像される。上の写像 は unitary であって内積・ノルムを保存し、(13)–(15) と同一の関係が成り立つ:

$$\langle \overline{f(X)} g(X) \rangle = \langle\!\langle \overline{F(Z)} G(Z) \rangle\!\rangle \tag{69}$$

$$\langle |f(X)|^2 \rangle = \langle\!\langle |F(Z)|^2 \rangle\!\rangle \tag{70}$$

$$\langle f(X) \rangle = \langle\!\langle F(Z) \rangle\!\rangle = F(0) \tag{71}$$

$\mathcal{B}$ から L^2 への逆写像· Coherent State 表現 $\mathcal{B}$ から L^2 への写像を、$F \in \mathcal{B}$ に対して (16) と同様に

$$f(X) = \langle\!\langle \phi(X,Z) F(\bar{Z}) \rangle\!\rangle \tag{72}$$

$$\equiv \frac{\alpha}{\pi} \int_C e^{-\alpha |z|^2} (1+z)^X e^{-\alpha z} F(\bar{z}) d^2 z \tag{73}$$

で定義すると、これは (68) の逆写像である。これは $f(X)$ を非直交過備系 である coherent state $\phi(X,z)$ によって表現したものとみなせる。

4.1.1 Wiener-Charlier 展開

Charlier 多項式[4] Hermite 多項式の Rodorigues 公式 (18) に対応して、Charlier 多項式は Poisson 分布 $j(x;\alpha)$ より次式で定義される:

$$p_n(x;\alpha) = j(x;\alpha)^{-1} (-\Delta)^n j(x-n;\alpha) \tag{74}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \frac{x^{(r)}}{\alpha^r}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{75}$$

ここで$\Delta f(x) \equiv f(x+1) - f(x)$ は差分演算子を表す。Charlier 多項式 $p_n(X;\alpha)$ は L^2 における完備直交系をつくる:

$$\langle p_n(X;\alpha) p_m(X;\alpha) \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} p_n(x;\alpha) p_m(x;\alpha) j(x;\alpha) \tag{76}$$

$$= \delta_{mn} \alpha^{-n} n! \tag{77}$$

(60) で定義された coherent state $\phi(X,z)$ は Charlier 多項式 $p_n(X;\alpha)$ の母関数である:

$$\phi(X,z) = (1+z)^X \mathrm{e}^{-\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n z^n}{n!} p_n(X;\alpha) \tag{78}$$

$$p_n(x;\alpha) = \frac{1}{\alpha^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}[(1+z)^x \mathrm{e}^{-\alpha z}]_{z=0} \tag{79}$$

実際 (79) を計算すれば (75) に一致する。(78) より次の関係式がでる:

$$\Delta\phi(x;\alpha) = z\phi(z;\alpha), \quad \Delta p_n(x;\alpha) = \frac{n}{\alpha} p_{n-1}(x;\alpha) \tag{80}$$

これはΔ が p_n の降次演算子であることを示し、coherent state は降次演算子Δの固有値 z をもつ固有関数であることを示す。これは Gauss 変数の coherent state が $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ の固有関数であること, すなわち (20) に対応する。

Wiener-Charlier 展開 (78),(10) を用いると、$\mathcal{B}$ の元である z の正べき $z^n, n = 0,1,2,\cdots$ は、$\mathcal{B}$ から L^2 への写像 (73) により Charlier 多項式 $p_n(X,\alpha)$ に写像される。したがって、(68) に (78) を代入すれば $\mathcal{B}$ における巾級数 $F(z) = \sum f_n z^n$ が得られるから、 L^2 における $f(X)$ の coherent state 表現 (73) は Charlier 多項式 p_nによる直交級数展開に書き直される:

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} p_n(X,\alpha) \langle p_n(X',\alpha) f(X')\rangle \tag{81}$$

4.2 汎関数の Coherent State 表現

多次元 Poisson 変数 多次元 Poisson 変数列を $\boldsymbol{X} = \{X_j, j = 1,2,\cdots\}$ とおく。これらは独立な Poisson 分布 $j(x_j;\alpha)$ に従うものとすれば、多次元 Gauss 変数の場合と同様に (22)–(31) の関係式が成り立つ。とくに coherent state は

$$\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{z}) = \prod_j (1+z_j)^{X_j} \mathrm{e}^{-\alpha X_j} \tag{82}$$

と書ける。coherent state は多変数 Charlier 多項式の母関数であって、

$$\phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_n} z_{j_1} \cdots z_{j_n} p_n(X_{j_1},\cdots,X_{j_n};\alpha)\alpha^n \tag{83}$$

ここで$p_n(x_{j_1},\cdots,x_{j_n};\alpha)$ は多変数 Charlier 多項式[4]で (43) に対応する直交性を持つ ($S_j f(x_j) \equiv f(x_j - 1)$):

$$p_n(x_{j_1},\cdots,x_{j_n};\alpha) \equiv j(\boldsymbol{x};\alpha)^{-1} \prod_{\nu=1}^{n} (-\Delta_{i_\nu} S_{i_\nu}) j(\boldsymbol{x};\alpha) \tag{84}$$

$$j(\boldsymbol{x};\alpha) \equiv \prod_j j(x_j;\alpha) \tag{85}$$

$$\langle p_n(X_{i_1},\cdots,X_{i_n};\alpha)p_m(X_{j_1},\cdots,X_{j_m};\alpha)\rangle = \alpha^{-n}\delta_{nm}\delta_{ij}^n \tag{86}$$

$c_n(x_{j_1},\cdots,x_{j_n};\alpha) \equiv p_n(x_{j_1},\cdots,x_{j_n};\alpha)\alpha^n$ とおけば、(43) と同形の直交性が成り立つ:

$$\langle c_n(X_{i_1},\cdots,X_{i_n};\alpha)c_m(X_{j_1},\cdots,X_{j_m};\alpha)\rangle = \alpha^n\delta_{nm}\delta_{ij}^n \tag{87}$$

Poisson 過程 Poisson 過程を $D(t)$, $t \in T = \{a \le t \le b\}$ (または$-\infty < t < \infty$), $D(0) = 0$ で表し、独立増分 $D(\Delta) \equiv D(t+\Delta) - D(t)$ は Poisson 分布 $j(x;\Delta)$ に従う。微分 $\mathrm{d}D(t)$ は $\langle \mathrm{d}D(t)\rangle = dt$ となる Poisson 変数で Poisson 分布 $j(x;\mathrm{d}t)$ を持つ。Poisson 過程の測度を $\mathrm{d}P(\boldsymbol{D})$ で表す。Poisson 過程 $D(t)$ の L^2汎関数を $f[\boldsymbol{D}] \equiv f[D(t), a \le t \le b]$ と書く。以下では、$D(t)$ の分割を細かくして、$\alpha = \Delta \to \mathrm{d}t$, $X_j \to \mathrm{d}D(t_j), z_j \to z(t_j)$ の極限移行により Poisson 過程の式へ移行する。

Coherent State 汎関数 (82) の多変数 coherent state は上の極限移行のもとで、coherent 汎関数

$$\phi[\boldsymbol{D},\boldsymbol{z}] = \prod_{t_j \in T}\left\{[1+z(t_j)]^{\mathrm{d}D(t_j)}\mathrm{e}^{-z(t_j)\mathrm{d}t_j}\right\} \tag{88}$$

$$= \exp\left[\int_T \log[1+z(t)]\mathrm{d}D(t) - \int_T z(t)\mathrm{d}t\right] \tag{89}$$

の表式に移行する。積分$\int_T u(t)\mathrm{d}D(t)$ はランダム測度 $D(\Delta)$ による確率積分を表す[4]。当然ながら (33)-(35) と同様に

$$\langle\phi[\boldsymbol{D},\boldsymbol{z}]\rangle = 1 \tag{90}$$

$$\left\langle \exp\left[\int_T \log[1+z(t)]\mathrm{d}D(t)\right]\right\rangle = \exp\left[\int_T z(t)\mathrm{d}t\right] \tag{91}$$

$$K[\bar{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{z}'] = \langle\phi[\boldsymbol{D},\overline{\boldsymbol{z}}]\phi[\boldsymbol{D},\boldsymbol{z}']\rangle = \exp\left[\int_T \overline{z(t)}z'(t)\mathrm{d}t\right] \tag{92}$$

が成り立つ。(91) は (90) からでるが、左辺は一般の点過程 $X(t)$ の場合の確率母汎関数に相当する。上に述べたように、再生核 (92) は Wiener 過程の場合 (35) と同じであるから、同形の再生核 Hilbert 空間 $\mathcal{B}$をもつ。

L^2から $\mathcal{B}$への写像 (37) と同様に、$f \in L^2$ の L^2から $\mathcal{B}$への写像を

$$\begin{aligned} F[\boldsymbol{z}] &= \langle\phi[\boldsymbol{D},\boldsymbol{z}]f[\boldsymbol{D}]\rangle \\ &= \left\langle \exp\left[\int_T \log[1+z(t)]\mathrm{d}D(t) - \int_T z(t)\mathrm{d}t\right] f[\boldsymbol{D}]\right\rangle \end{aligned} \tag{93}$$

で定義する。この写像は unitary で内積を保存する:

$$\langle\overline{f[\boldsymbol{D}]}g[\boldsymbol{D}]\rangle = \langle\!\langle\overline{F[\boldsymbol{Z}]}G[\boldsymbol{Z}]\rangle\!\rangle,\ \langle|f[\boldsymbol{D}]|^2\rangle = \langle\!\langle|F[\boldsymbol{Z}|^2\rangle\!\rangle \tag{94}$$

$\mathcal{B}$からL^2への逆写像・Coherent State 表現　$\mathcal{B}$ から L^2 への写像を、$F \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned} f[\boldsymbol{D}] &= \langle\!\langle\phi[\boldsymbol{D},\boldsymbol{Z}]F[\bar{\boldsymbol{Z}}]\rangle\!\rangle \\ &= \int_{\mathcal{B}} \exp\left[\int_T \log[1+z(t)]\mathrm{d}D(t) - \int_T z(t)\mathrm{d}t\right] F[\bar{\boldsymbol{z}}]\mathrm{d}M(\boldsymbol{z}) \end{aligned} \tag{95}$$

で定義する。これは (93) の逆写像であって、この汎関数 $f[\boldsymbol{D}]$ の表現式の右辺は、(41) と同じく、複素 Gauss 白色雑音 $z(t), t \in T$に関する平均に書かれている. これが Poisson 過程の汎関数 $f[\boldsymbol{D}]$ の coherent state 表現である。Wiener 過程と違って、Poisson 過程の場合 (95) に対しては離散的 coherent state 表現を導くことはできない。

Poisson 過程の汎関数の Wiener-Itô 展開[5, 4]　coherent state が多変数 Charlier 多項式の母関数をあたえる公式 (83) を coherent state 汎関数 (88) に適用すれば、

$$\begin{aligned} \phi[\boldsymbol{D},\boldsymbol{z}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_T\cdots\int_T z(t_1)\cdots z(t_n) \\ \times c_n[\mathrm{d}D(t_1),\cdots,\mathrm{d}D(t_n)] \end{aligned} \tag{96}$$

と書ける。ここで n 次の Wiener-Charlier 微分式を

$$\begin{aligned} c_n[\mathrm{d}D(t_1),\cdots,\mathrm{d}D(t_n)] \equiv \\ p_n(\mathrm{d}D(t_1),\cdots,\mathrm{d}D(t_n);\mathrm{d}t)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n \end{aligned} \tag{97}$$

と置いた。(97) は次の直交関係を持つ:

$$\begin{aligned} \langle c_n[\mathrm{d}D(t_1),\cdots,\mathrm{d}D(t_n)]c_m[\mathrm{d}D(s_1),\cdots,\mathrm{d}D(s_n)]\rangle \\ = \delta_{mn}\delta^n(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_n \end{aligned} \tag{98}$$

前と同様にして $\mathcal{B}$ における直交基底 $z(t_1),\cdots,z(t_n)$ に対応して L^2 における直交基底 $c_n[\mathrm{d}D(t_1),\cdots,\mathrm{d}D(t_n)]$ が対応する。(96) を (93) に代入すれば結局次の形の展開式が得られる:

$$f[\boldsymbol{D}] = \sum_{n=0}^{\infty}\int_T\cdots\int_T f_n(t_1,\cdots,t_n)c_n[\mathrm{d}D(t_1),\cdots,\mathrm{d}D(t_n)] \tag{99}$$

これが Poisson 過程の汎関数の Wiener-Itô 展開である[5, 4]。

参考文献

[1] Wiener N.: "Nonlinear Problems in Random Theory", New York, John Wiley (1958)

[2] Cameron R.H., Martin W.T.: Ann. Math., **48**, pp.385-392 (1947)

[3] Itô K.: J. Math. Soc. Jpn **3**, No.1 pp.157-169 (1951)

[4] Ogura H.: IEEE Trans.Inf. Theory, **IT-18**, No.4, pp.473-481 (April 1972)

[5] Hida H., Ikeda N.: Proc. 5th Berkekey Symp. Math. Stat. and Prob., **2**, Part I, Univ. Calif. Press, pp.117-143 (1965)

[6] Ogura H.: Phys. Rev.**A11**,pp942-956 (1975)

[7] Glauber R.J.: "Coherent and incoherent states of the radiation field", Phys.Rev. **131** pp.2766-2788 (1963)

[8] Klauder J.R. and Sudarshan E.C.G.: "Fundamentals of Quantum Optics", W.A.Benjamim Inc. New York (1968)

[9] 小倉久直:Wiener 過程・Poisson 過程の汎関数の"Coherent State" 表現, 電子情報通信学会論文誌 **J 76-A**, No.8 (1993)

[10] 小倉 久直: 統計数理研 共同研究レポート 40 (1992-12)

[11] J.von Neumann: "Mathematical Foundation of Quantum Mechanics" Princeton Univ. Press (1955)

[12] Bargmann V., Butero P., Girardello L., Klauder J.R.: Rev. Mod. Phys., **2**, pp.221-228 (1971)

[13] Aronszajn N.: "Theory of reproducing kernes", Trans. Amer. Math. Soc., **68**, pp.337-404 (1950)

[14] Bargmann V.: Part I, Comm. Pure and Appl. Math., **14**, pp.187-214 (1961), Part II, **20**, pp.1-101 (1967)

[15] Schweber S.S.; J. Math. Phys. **3**, pp.831-842 (1962)