

凹曲面に沿う三次元境界層の多重不安定性

航技研 伊藤 信毅 (Nobutake Itoh)

1. はじめに

後退翼上の境界層においては、粘性型のトルミン・シュリヒティング不安定（以後 T-S 不安定と略記する）に加えて、ねじれ速度分布に特有な非粘性変曲点型の横流れ不安定（C-F 不安定）も発生する。すなわち、壁面曲率を無視した場合には、壁面圧力勾配 m と臨
界レイノルズ数 R_c の関係は図 1 の R_c - m 平面に示されたような変化をする (Itoh 1991)。逆圧力勾配および弱い順圧力勾配の範囲では T-S 不安定が R_c の下限を与え、順圧力勾配の大きい所では横流れ不安定の臨界レイノルズ数がより低い値を示す。一方、横流れ速度の無い二次元境界層

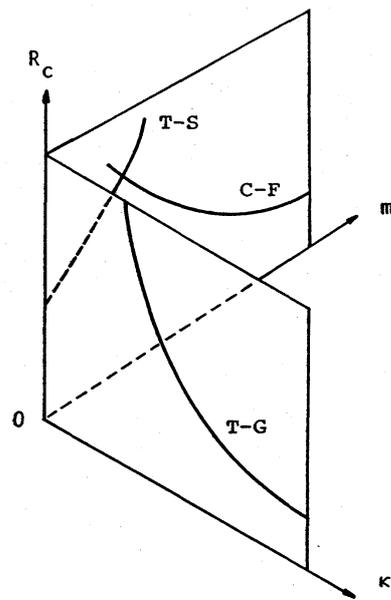


図 1 安定線図

において壁面が凹の曲率を持つ場合には、遠心力の作用によってテイラー・ゲルトラー不安定（T-G不安定）が生じることにもよく知られた事実である。テイラー数と呼ばれる無次元量 Ta がある程度大きくなると流れ方向に軸を持つ縦渦型の定常攪乱が発生する。いま凹曲面の無次元曲率を $-\kappa$ とするとき、テイラー数とレイノルズ数には $Re = \sqrt{-Ta/\kappa}$ の関係があるから、臨界テイラー数が与えられていれば臨界レイノルズ数の曲率に対する変化は図1の $Re-\kappa$ 平面のようになるはずである。このように $\kappa=0$ と $m=0$ の極限における安定性の特徴は既に判っているものの、後退翼下面のように横流れと壁面曲率の影響が共に無視できない場合に流れがどのような安定特性を示すかについてはまだ十分な知識が得られていない。そこで本研究では、翼面上の各点において与えられる横流れ速度の強さと壁面曲率の大きさに対して、T-S不安定、C-F不安定およびT-G不安定のどれが最も発生しやすいかを予測し、各不安定が最初に発生するパラメータ領域を明確にすることによって、翼の設計や境界層制御など工学的応用に役立つ定性的情報を提供する。

2. 線形安定計算のためのモデル方程式

曲率半径 r_0 の曲面に沿う層流境界層の線形安定性を調べる。

円柱座標を (r, θ, y^*) 、時間を t^* 、速度成分を (v_r, v_θ, v_y) 、圧力を p^* 、密度を ρ 、動粘性係数を ν 、適当に定義された境界層厚さを δ 、境界層に接する外部流の局所速度を Q_0 とし、局所レイノルズ数 $R = Q_0 \delta / \nu$ は十分大きく、無次元曲率 $\kappa = \delta / r_0$ は R^{-1} に比べて小さいものと仮定する。さらに諸量をつぎのように無次元化する。

$$\begin{aligned} \frac{r_0 \theta}{\delta} &= x, & \frac{y^*}{\delta} &= y, & \frac{r - r_0}{\delta} &= z, & \frac{Q_0 t^*}{\delta} &= t, \\ \frac{v_\theta}{Q_0} &= U(z; X, Y) + \operatorname{Re}[u(z; X, Y) \exp\{i(\alpha x + \beta y - \omega t)\}], \\ \frac{v_y}{Q_0} &= V(z; X, Y) + \operatorname{Re}[v(z; X, Y) \exp\{i(\alpha x + \beta y - \omega t)\}], \\ \frac{v_r}{Q_0} &= \frac{1}{R} W(z; X, Y) + \operatorname{Re}[w(z; X, Y) \exp\{i(\alpha x + \beta y - \omega t)\}], \\ \frac{p^*}{\rho Q_0^2} &= P(X, Y) + \operatorname{Re}[p(z; X, Y) \exp\{i(\alpha x + \beta y - \omega t)\}], \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 U 、 V および P は基本流を、 u 、 v 、 w 、 p は基本流に重ねられた微小な波動型攪乱を表わし、 Re は実数部を意味する。また、 $X = x/R$ と $Y = y/R$ は境界層の x 方向と y 方向に対する緩やかな変化を表わすために用いられた。上式を円柱座標で書かれた連続の式とナビエ・ストークス方程式に代入し、基本流自身が運動方程式を満たすことおよび攪乱が十分小さくて、その非線形項が無視できることを仮定すれば線形攪乱方

程式が導かれる。さらに $\beta \neq 0$ を仮定して p と v を消去し、 u と w に関する連立常微分方程式を導く。

$$\begin{aligned}
 & [(\alpha^2 + \beta^2) \left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) \right\} + O\left(\frac{1}{R}, \kappa\right)] u \\
 & - [i\alpha \left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) \right\} D \\
 & \qquad \qquad \qquad + \beta(\beta DU - \alpha DV) + O\left(\frac{1}{R}, \kappa\right)] w = 0, \\
 & \left[\frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) \right] (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) \\
 & \qquad \qquad \qquad + i(\alpha D^2 U + \beta D^2 V) + O\left(\frac{1}{R}, \kappa\right)] w \\
 & + [-2\kappa \{(\alpha^2 + \beta^2)U - (\omega - \alpha U - \beta V)\} \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{2i}{\beta R} \left\{ \beta \frac{\partial(\alpha DU + \beta DV)}{\partial X} - \alpha \frac{\partial(\alpha DU + \beta DV)}{\partial Y} \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{2i}{\beta R} \left\{ \beta \frac{\partial(\alpha U + \beta V)}{\partial X} - \alpha \frac{\partial(\alpha U + \beta V)}{\partial Y} \right\} D + O\left(\frac{1}{R^2}, \frac{\kappa}{R}, \kappa^2\right)] u = 0.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

いま $|\omega - \alpha U - \beta V| = \varepsilon$ と置くとき、 ε は二次元トルミン・シュリヒティング波動では $O(1)$ 、二次元テイラー・ゲルトラー渦の中立安定状態では 0 になるが、これは前者では攪乱の波数ベクトルが基本流の速度ベクトルに平行であり、後者ではそれらが直交するためである。三次元境界層においても横流れ速度が小さい場合には、 ε が $O(1)$ のときと 1 に比べて小さい場合とが存在し、それに応じて攪乱の種類が異なるものと推測される。本研究では、曲率をもつ壁面に沿う

三次元流の安定性を調べることに目的であるから、T-S不安定、横流れ不安定およびT-G不安定の全てを同時に記述できる攪乱方程式が要求される。そこで、O-S方程式系とT-G方程式系の少なくともどちらかに現われる最低次項だけを残したつぎのモデル方程式を用いることにする。

$$\begin{aligned}
 & (\alpha^2 + \beta^2) \left[\frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) \right] u \\
 & - \left[i \alpha \left\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) \right\} D + \beta (\beta DU - \alpha DV) \right] w = 0, \\
 & \left[\frac{1}{R} \left\{ (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) \right\} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) \right. \\
 & \quad \left. + i(\alpha D^2 U + \beta D^2 V) \right] w - 2\kappa (\alpha^2 + \beta^2) Uu = 0. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

3. 境界条件の簡略化

境界条件は壁上および壁面から十分離れた所で攪乱速度が0になることから定まる。壁面上の条件は自明であるが、遠方の条件については適当な高さに境界層の外縁 $z=z_0$ を設定し、そこにおける条件に置き換える方法が一般的である。すなわち、境界層外縁より外側の一様流に対する攪乱方程式の一般解を求め、その内で $z \rightarrow \infty$ で発散する解を除いたものを外部解とする。境界層内の解が境界層外縁において、この外部解と滑らかに接合するという数学的手続きにしたがって境界条件が決められる。この方法を適用すると方程式(2.3)に対す

る境界条件はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}
 u = w = w' &= 0 \quad \text{at } z=0, \\
 u' + \rho_1 u - \frac{i\alpha}{\rho_2^2} (w'' + \rho_1 w') &= 0, \\
 w'' + (\rho_1 + \rho_2)w' + \rho_1\rho_2 w - \frac{\rho_2^2 \kappa R U_0}{\rho_1 (\rho_1 + \rho_2)} u &= 0, \\
 w'' + (2\rho_1 + \rho_2)w' + \rho_1 (\rho_1 + 2\rho_2)w' + \rho_1^2\rho_2 w &= 0 \quad \text{at } z=z_0,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

但、 $\rho_1^2 = \alpha^2 + \beta^2 - i\omega R + i\alpha R U_0 + i\beta R V_0$, $\rho_2^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

しかしこの接合境界条件を用いると、二次元境界層に対するテイラー・ゲルトラー方程式の臨界点が $\beta \rightarrow 0$ の極限に位置することが知られている。図2の実線はブラジウス速度分布に対して、上記の境界条件を用いて得られた中立安定曲線を示している。同じ方程式に支配される回転円筒間のクエット流については有限な波数 β に対して臨界点が存在するから、この現象は境界層の非平行性を無視した結果と推測される。中立曲線は β の小さいところでは非常に緩やかな変化しかないから、現実の流れの安定限界がこの付近のレイノルズ数に近いことは容易に想像される。いま接合境界条件の代りに、境界層外縁の位置 $z=z_0$ を十分大きく取り、そこで攪乱速度が0になるという打切り境界条件

$$u = w = w' = 0 \quad \text{at } z=0 \quad \text{and } z=z_0, \tag{3.2}$$

を用いることにすれば、中立曲線は図2の点線あるいは鎖線

のようになる。 β の大きい所では実線で示された通常の中立曲線に漸近するが、 β が0に近づくとつれて再び上昇し、その間に臨界点を持つ。この臨界点は理論的に正当化されたものではないけれども、T-G不安定の安定限界を表現する一つの目安として用いることはできる。本安定計算では、現象の定性的把握を第一の目的にするので、計算の容易さを優先させることとし、攪乱方程式(2.3)と境界条件(3.2)によって構成される固有値問題を扱う。その際、解は境界層外縁の位置に強く依存することになるため、計算の容易さと解の定性的信頼性の共存を計るようにならなければならない。図2と図3にはそれぞれ二次元ブラジウス境界層のT-G不安定とT-S不安定の中立安定曲線について、いくつかの z_0 に対して打ち切り境界条件を用いた結果が接合境界条件を用い

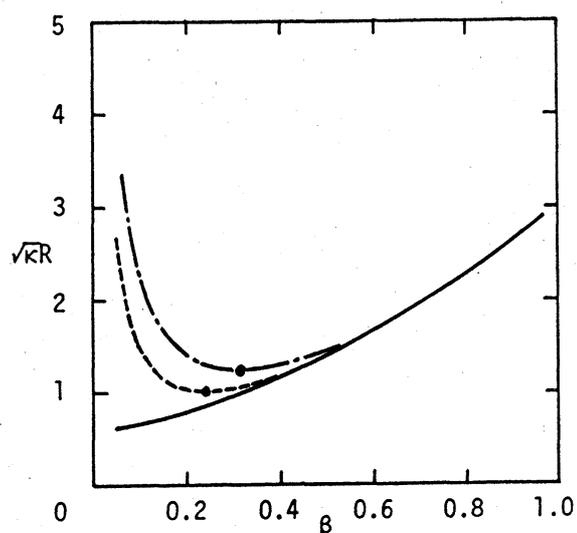


図2. T-G不安定の中立曲線

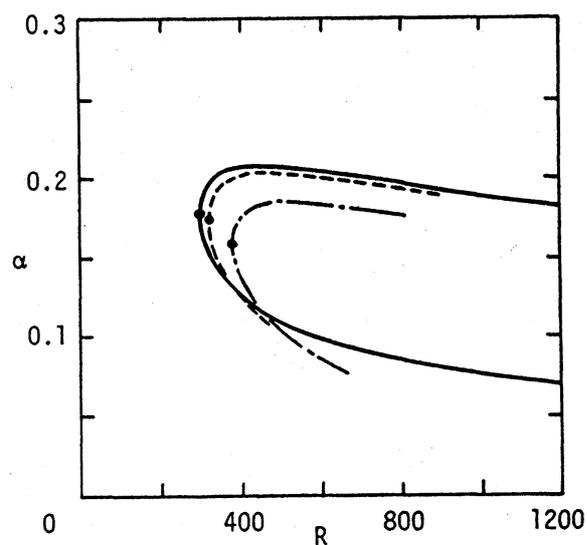


図3. T-S不安定の中立曲線

た結果と比較されている。 z_0 を大きく取ると、積分領域が広がるために計算に必要なメモリーと計算時間が増大するとともに、 $T - G$ 不安定の臨界点が $\beta \rightarrow 0$ の方向に急速に移動し、打切り境界条件を用いた利点が減少する。以上のことを総合的に判断して、以下の計算では境界層外縁をブラジウス速度分布の排除厚の8倍($z_0 = 13.766$)に選ぶことを決めた。

以上によって定められた攪乱方程式(2.3)と境界条件(3.2)は固有値問題を構成し、複素固有値 ω を実数波数 α と β およびレイノルズ数 R の関数として定める。

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, R) \quad (3.3)$$

固有値の実部 ω_r が攪乱の振動数を ω_i が時間的増幅率を表わす。一般には固有値は無数個存在すると考えられるが、流れの安定性を判別するためには、その内で増幅率 ω_i が最大の値を持つ固有値だけを考えれば良い。最大の ω_i が正の値を持てば攪乱は増幅するから、流れは不安定、 ω_i が負であれば攪乱は減衰し、流れは安定である。基本流と壁面曲率が与えられたとき、攪乱が増幅も減衰もしない中立安定の状態は $\omega_i(\alpha, \beta, R) = 0$ を満たす波数とレイノルズ数の組合せで与えられ、 α 、 β および R を座標軸とする三次元空間に一つの曲面を定義する。この曲面上で R が最小になる点が存在するとき、この点を臨界点(α_c, β_c, R_c)、そのときの R を臨界

レイノルズ数とよぶ。ある形態の流れについてその安定特性を数量化する最も簡単な方法は臨界レイノルズ数を算出することである。臨界点は、 ω の虚数部および ω を α と β でそれぞれ偏微分したときの虚数部が0になる点として定まる。

4. 三種類の不安定性に対する臨界値の比較

三次元境界層の速度分布は物体の形状や外部流の流線方向および圧力勾配の状態によって様々に変化するので、一般的な速度分布を系統的に分類することは不可能である。ここでは最も簡単な三次元境界層として、一様流中に後退角を持って置かれたくさび状物体の上の境界層、すなわち Falkner-Skan-Cooke流を取り上げる。この流れは前縁に沿う方向(y方向)には圧力勾配がなく、前縁に直角な方向(x方向)にだけ圧力勾配が存在するから、アスペクト比の大きい後退翼の三次元境界層を模擬する速度分布としてしばしば用いられる(伊藤 1993)。いま前縁からの距離 x^* における外部流の流速を $Q_0 = \sqrt{U_0^2 + V_0^2}$ 、x軸と成す角を $\gamma = \arctan(V_0/U_0)$ で表し、速度を Q_0 で、壁面からの距離を境界層厚さ $\delta = \sqrt{\nu x^*/U_0}$ で無次元化するとき、境界層内の速度分布は次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} F'(z), \quad V = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} G(z), \quad (4.1)$$

ただし、関数 $F(z)$ および $G(z)$ は常微分方程式

$$F'' + \frac{1+m}{2} FF'' + m\{1 - (F')^2\} = 0, \quad F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1,$$

$$G'' + \frac{1+m}{2} FG' = 0, \quad G(0) = 0, \quad G(\infty) = 1. \quad (4.2)$$

の解である。通常の細長い後退翼では、壁面曲率は前縁に直角な方向にのみ緩やかに変化し、前縁に沿う方向にはほとんど0であるから、 γ は壁面曲率の方向と外部流の角度を表わすと解釈することができる。結局、流れ場を規定する三つのパラメータ γ 、 m 、 κ の値に対して臨界レイノルズ数がどのように変化するかを調べるのが本節の目的になる。

はじめに壁面曲率のない場合 ($\kappa = 0$) について、 $T-S$ 不安定と $C-F$ 不安定の臨界レイノルズ数 R_c が二つのパラメータ γ と m に対してどのように変化するかを見ておく。図4は γ を一定として、 R_c の m に対する変化を描いたものである。逆圧力勾配 ($m < 0$) および弱い順圧力勾配の範囲においては $T-S$ 不安定が最小臨界レイノルズ数を決めるが、順圧力勾配が大きくなるにつれて、 $C-F$ 不安定の臨界値が急速に低下して $T-S$ 不安定の臨界値より低くなる。外部流線の傾き角 γ が増加すると圧力勾配の方向とのずれが大きくなるために横流れの効果が弱められ、 $T-S$ 不安定と $C-F$ 不安定の交代する位置が m の大きい方に移動する。

つぎに外部流線の傾き角を $\gamma = 1$ に固定した場合について、壁面曲率の影響を調べる。この場合には壁面曲率の方向と45°の方向に外部流の流線が向いている局所的な流れを考えていることになる。図5は曲率 κ をパラメータとして $m - R_c$ 平面上に臨界レイノルズ数の変化を示したものである。 $\kappa = 0$ のときには T - S 不安定と横流れ不安定だけが存在し、 $m = 0.05$ において両者の臨界値の大小が入替わる。これに対して、 $\kappa = -0.25 \times 10^{-4}$ の曲率に対しては逆圧力勾配の強い $m < -0.011$ の領域と $0.043 < m < 0.046$ の非常に狭い領域で T - S 不安定が R_c の下限を与え、 $-0.011 < m < 0.043$ では T - G 不安定、 $m > 0.046$ では横流れ不安定が R_c の下限を決定する。さらに曲率を大きくした場合 ($\kappa = -0.5 \times 10^{-4}$) では逆圧力勾配の強い領域 ($m < -0.028$) で T - S 不安定、中間の領域 ($-0.028 < m < 0.069$) で T - G 不安定、順圧力勾配の強い領域 ($m > 0.069$)

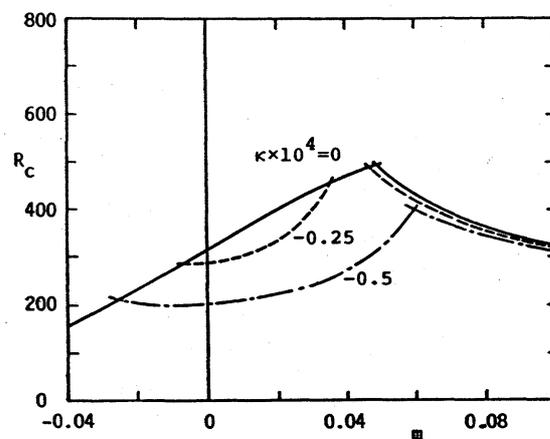
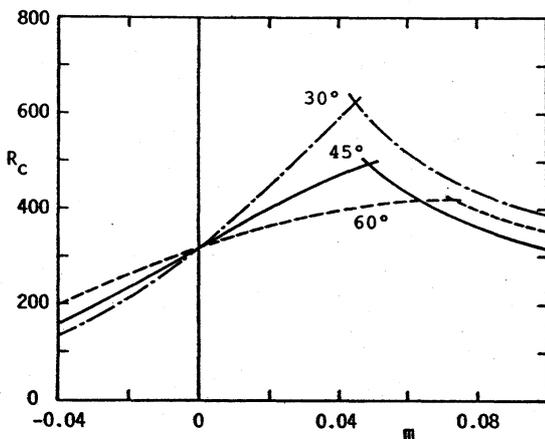


図4. $\kappa = 0$ の場合の臨界線図

図5. $\gamma = 1$ の場合の臨界線図

で横流れ不安定が支配的になる。T-S不安定の臨界曲線は図に示した程度の弱い曲率の変化に対しては非常に鈍感で、図中の全ての κ に対して $\kappa=0$ に対する臨界曲線と区別できない。また、凹の曲率の横流れ不安定に対する影響はT-S不安定に対する影響に比べるといくらか大きい不安定効果を与えいけれども、T-G不安定に対する影響に比べては著しく小さいことが判る。これに対してT-G不安定では、 R_c がほぼ $1/\sqrt{-\kappa}$ に比例して低下する傾向が横流れ速度の存在する場合にも当てはまり、曲率の効果が本質的な役割を果す事実には変わりはない。図5の臨界曲線に対応する攪乱の振動数、波数ベクトルの大きさおよびその角度を m に対してプロットしたものが図6である。ここで注目すべきことはT-G不安定

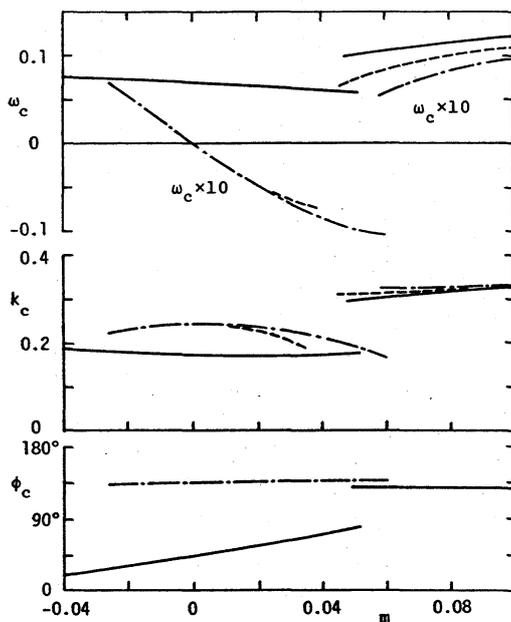


図6. 波数と振動数の臨界値

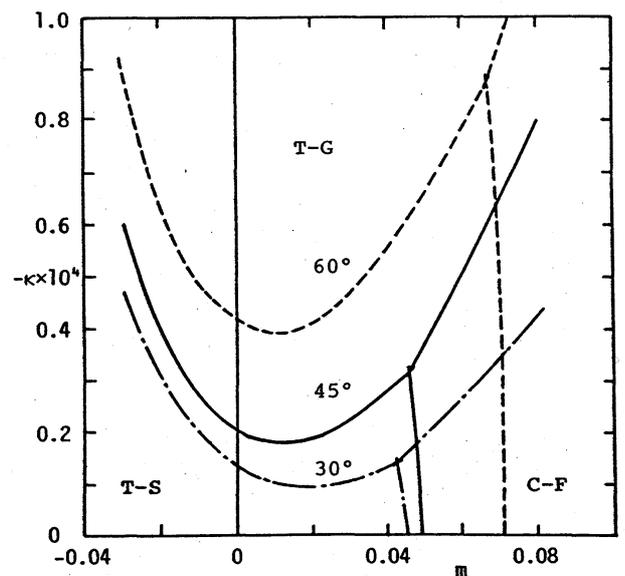


図7. 不安定領域区分図

と C - F 不安定の攪乱振動数が T - S 不安定のそれに比べて一桁小さいことおよび T - S 攪乱の波数ベクトルが m の増加と共に緩やかに角度を増すのに対して、T - G と C - F 攪乱の波数ベクトルが外部流線にほぼ直交していることである。

図 5 と同様な計算をさらに多くの κ に対して行なうと、三つの不安定性がそれぞれ R_c の下限を与えるパラメター領域を区別することができる。その結果を γ の三つの値に対して示したものが図 7 である。壁面が凹の曲率を持つ場合 ($\kappa < 0$) には、パラメター m と κ の大きさによって T - S 不安定、T - G 不安定および C - F 不安定の発生する可能性があり、その中のそれぞれ二つの不安定を区分する三本の曲線は一点で交わる。この交点では三つの不安定性が同じ臨界レイノルズ数を与えることになり、この点における三種類の攪乱を比較することは興味深い。図 8 にはこれらの攪乱の振幅分布と位

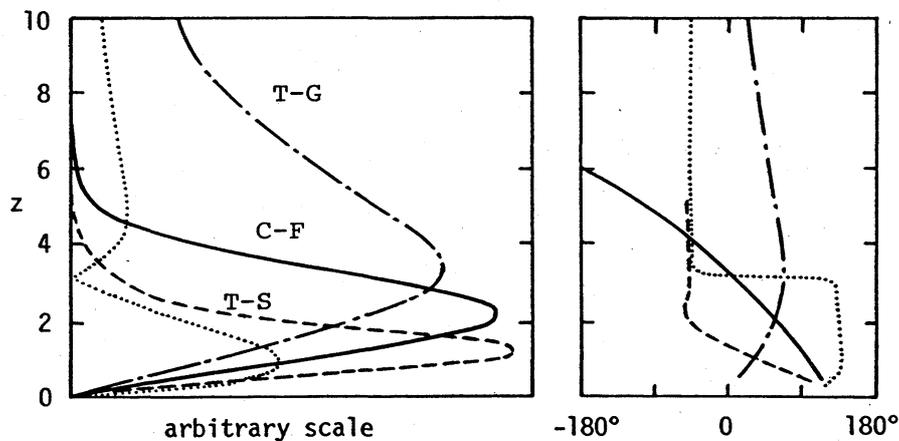


図 8 . 振幅と位相の分布 ($\gamma = 1$)

相分布を示してある。T - G 攪乱と C - F 攪乱についてはそれぞれの波数ベクトルに直交する方向、すなわち渦軸の方向の速度分布 v^* だけが示されている。他の方向の速度成分は v^* に比べて一桁以上小さいので省略した。これに対して T - S 攪乱は波数ベクトルの方向の速度成分 u^* とそれに直角な渦軸方向の成分 v^* が同程度の大きさを持ち、 u^* は境界層排除厚程度の高さで位相が 180° 急変するという良く知られた特徴を維持している。T - G 攪乱と横流れ攪乱の違いで特徴的なことは、前者の最大振幅の位置が後者のそれに比べて壁面に近いことおよび位相変化に点で両者が逆の傾向をもつことである。T - G 攪乱は壁面から離れるにつれて位相が進み、横流れ攪乱は位相遅れを生じる。

5. むすび

三次元境界層が凹の曲率をもつ壁面に沿う場合には、三種類の不安定性が発生する可能性をもつ。二次元境界層において観測されるトルミン・シュリヒティング不安定は、流れが三次元になっても、ある程度レイノルズ数が大きくなれば進行波型攪乱を発生させる。また三次元境界層に特有な現象として、外部ポテンシャル流に直交する速度成分が誘起する非粘性変曲点型不安定、すなわち横流れ不安定が現われ、外

部流にほぼ直角な方向に伝播する位相速度の小さい攪乱が増幅する。さらに壁面の曲率が存在することによって、遠心力の作用に基づくテイラー・ゲルトラー不安定が発生し、やはり外部流にほぼ直交する波数ベクトルを持つ攪乱が現われる。これら三種類の不安定性は、壁面曲率の大きさ、横流れ速度成分の強さおよび外部流の方向と壁面曲率の方向のなす角度に依存して、発生が強さが異なる。本研究では各不安定の発生強さを表わす尺度として臨界レイノルズ数を選び、三種類の不安定性がそれぞれ最低の臨界レイノルズ数を与えるパラメータ領域の区分を示した。壁面曲率と横流れ速度が共に小さいときにはT-S不安定、横流れ速度が大きい所では横流れ不安定、壁面曲率の大きい所ではT-G不安定がそれぞれ支配的になること、およびそれらの境界を数量的に表示することによって安定特性の総合的定性的把握を可能にした。

参 考 文 献

Itoh, N. (1991) Effect of pressure gradients on the stability of three-dimensional boundary layers. Fluid Dyn. Res. 7, 37-50.

伊藤信毅 (1993) 後退翼に沿う三次元境界層の簡単な安定性評価法、日本航空宇宙学会誌 41巻 471号