数理解析研究所講究録
第 852 巻 1993 年 52-66

底の抵抗を持つコルモゴロフ流のエネルギー法による非線形安定性

大阪府立大学　工学部　村上洋一 (Youichi MURAKAMI)
福田浩昭 (Hiroaki FUKUTA)
後藤金英 (Kanefusa GOTOH)

1. 序論

非圧縮粘性流体の平行流の安定性の問題は古くから研究されている。通常、平行流は管内の十分発達した流れとして実現される。例としてはハーゲンーポワズイユ流が有名である。また平板間においても平面ポワズイユ流や平面クエット流がある。これらは3次元方向に無限に広がっているが、3次元方向に一様という意味で2次元的な流れである。このような意味ではなく、流体自体が平面に束縛されているという効果で2次元流が実現されることもある。そのような例は地球流体における大規模な大気の流れや海流を取り扱うときに生じる (*Pedlosky (1987)*) 。この場合はもちろん完全な2次元流ではなく垂直方向に薄い層として実現されており3次元的な構造を持つ流れである。このような場合垂直方向に形成された境界層の構造を厳密な意味では考慮しなければならないが、その境界層の影響は2次元の速度に比例する抵抗として働くことが知られている。ここではこの近似を採用する。この底の抵抗の効果が線形安定性解析にどのような影響を及ぼすかについては *Dolzhanskiy(1987)* によって詳しく行われた。このような底の抵抗を持つ流れを *Dolzhanskiy* にならって準2次元流と呼ぶことにする。

周期平行流の線形安定性の理論的研究はコルモゴロフの講義で提案され、*Meshalkin and Sinai(1961)* によって最初に研究された。彼らは固有関数をフーリエ分解して得た無限次元の連立方程式を項数が3ということに着目して連分数展開をもちいて、以下のような結果を解析的に得た。(マシュー方程式も同様の方法で解かれている。) すなわち、臨界レイノルズ数 R_{Lc} は $\sqrt{2}$ で臨界波数は長波長の極限になることを示した。また増幅モードの振動数は常に0である、すなわち、安定性の交換が生じることも示した。弱非線形理論 (*Nepomnianshchii(1976)*、*Yamada(1986)*) や少数モードの打ち切りによる扱い (*Belotserkovskii et al(1978)*) などで超臨界状態での振る舞いも研究されている。

分岐ダイアグラム (*Okamoto and Shoji(1991)*) や時間発展 (*Platt et al(1991)*) についても数値的に詳細に調べられている。

このような理論的な研究に加えて、実験室においても体積力としての外力を作りだし、コルモゴロフ流を実現するという大胆な試みがなされた (*Dolzhanskiy(1990)*) 。2次元のナヴィエーストークス方程式の圧力に吸収されない外力としてはローレンツ力が考えられる。ポテンシャル力では渦度のある流れを励起できないことに注意しよう。彼らは電解質溶液をひろがった容器にみたし、電流を一方向に一様に流し、磁石をその容器の下に交互に並べることにより、sin の形をした磁場を作り、ローレンツ力を作った。流れが平面的であるという近似が成り立つ範囲で速度による磁場へのフィードバックはないことが理論的にわかる。このようにして体積力としての外力のある2次元のナヴィエーストークス方程式で記述される系を実験室で実現することが可能になる。外力をコントロールすることができるので理論との比較が容易になる。またこれは自然現象で生じる底のある系を実験室で実現するという積極的な意味がある。これにより底の効果が流れの安定性や乱流への遷移などにどのような働きをしているかを理論と実験で定量的に比較することが可能となった。

このように底の効果を考慮すると、自由流に対しての線形安定性解析において通常の粘性でスケールした臨界レイノルズ数はかなり大きくなる。したがって、亜臨界領域において有限攪乱に対して流れが安定であるかどうかという問題が生じる。実験においては外力のみをコントロールして自然攪乱を利用しているので、微小な攪乱のみを取り扱っているとは言い切れない側面がある。境界層や管内流の実験においては攪乱の有限性により、実験での乱流への遷移が線形安定性による臨界レイノルズ数よりもはるかに小さい値で生じることを思い起こそう。そこでこの研究ではコロモゴロフ流に対して任意の大きさの攪乱に対する臨界レイノルズ数をエネルギー法を用いて求める。底の効果を考慮しないせん断流においては通常この方法で求めた臨界レイノルズ数は有限攪乱による乱流の遷移の起こるレイノルズ数と比較してもはるかに小さくあまり有効な方法とはいえない (*Straughan(1992)*) 。準2次元流（底の抵抗を持つ流れ）においてこの方法が有効であるかどうかを試すというねらいもある。

2. 問題の定式化

考えている流体層は薄い ($h << 1$) ので、速度と圧力を表面 $z = h$ から z方向（垂直方向）にテイラー展開したものを3次元のナヴィエーストークス方程

式に代入する。この際、境界層近似にもとづき z方向の速度成分 wはオーダーが小さいので無視している。底では粘性境界条件、表面では速度の z方向の微分が 0 になるという境界条件を用いて方程式を 2 回 z方向に積分すると、

$$\nu \left.\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}\right|_{z=h} = -\lambda \mathbf{u}|_{z=h}, \qquad (\lambda = \frac{2\nu}{h^2}). \tag{1}$$

が得られ、他の項は流体表面 $(z = h)$ での速度 $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ と圧力 p になる。適当な無次元化を行うことにより、次の連続の式と運動方程式に従うことになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{Re}(\Delta \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}) + \mathbf{F}. \tag{3}$$

2 次元流なので流れ関数ψを導入して速度を表すと、

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{4}$$

となる。運動方程式に rot をとりこれらを代入すると、渦度方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J\{\Delta \psi, \psi\} = \frac{1}{Re}(\Delta^2 \psi - \lambda \Delta \psi) + \tilde{F}, \tag{5}$$

ここで以下のように定義している。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \; J\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}. \tag{6}$$

この方程式は外力 $\mathbf{F} = (\frac{1+\lambda}{Re} \sin y, 0)$ の下で $\mathbf{u} = (-\sin y, 0)$ $(\Psi = \cos y)$ を厳密解に持つ。以下、この流れの安定性を調べる。撹乱をψ'として、$\psi = \Psi + \psi'$ を式 (5) に代入すると、撹乱を支配する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} - J\{\Psi, (\Delta + 1)\psi'\} - J\{\psi', \Delta \psi'\} = \frac{1}{Re}(\Delta^2 \psi' - \lambda \Delta \psi'), \tag{7}$$

ここでは撹乱を任意の大きさで考えているので非線形項を落としていない。以下ではψ'をψと置き直す。

3. 線形安定性の結果

3.1 臨界レイノルズ数、R_{L_C}の計算

微小撹乱を考えているので非線形項を落とし (7) 式を線形化して次式を得る。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - J\{\Psi, (\Delta + 1)\psi\} = \frac{1}{R_L}(\Delta^2 \psi - \lambda \Delta \psi), \tag{8}$$

ここで Re を R_Lに書直した。主流Ψは周期関数であるからフロケの定理を用いて撹乱を次のような形におくことができる。

$$\psi = e^{\sigma t}\, e^{i(\alpha x+\beta y)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{i\,n\,y}. \tag{9}$$

ここで、αはフーリエモードの波数で $0 < \alpha < \infty$ の範囲を、βはフロケ指数で主流の対称性のため $0 < \beta < 0.5$ の範囲をとる。また a_nは複素係数である。これを式 (8) に代入すると次の無限次数の代数方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\Delta(\alpha,\beta+n)\left\{\sigma + \frac{\lambda}{R_L} + \frac{\Delta(\alpha,\beta+n)}{R_L}\right\} a_n \\ = \;& \frac{\alpha}{2}\left[\{\Delta(\alpha,\beta+n-1)-1\}\, a_{n-1} - \{\Delta(\alpha,\beta+n+1)-1\}\, a_{n+1}\right], \end{aligned} \tag{10}$$

ここで$\Delta(p,q) = p^2 + q^2$である。

この問題の場合、安定性の交換が成立している (*Meshalkin and Sinai(1961)*) ので、式 (10) で $\sigma = 0$ を代入して R_Lを求めることができる。式 (10) を変形すると R_Lについての次の固有値問題の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_L} a_n \;&=\; \frac{\alpha}{2\Delta(\alpha,\beta+n)\{\Delta(\alpha,\beta+n)+\lambda\}} \\ &\times\; \left[\{\Delta(\alpha,\beta+n-1)-1\}\, a_{n-1} - \{\Delta(\alpha,\beta+n+1)-1\}\, a_{n+1}\right], \end{aligned} \tag{11}$$

模式的に表すと、

$$\frac{1}{R_L}\,\boldsymbol{a} \;=\; M(\alpha,\beta,\lambda)\,\boldsymbol{a}\,, \quad \boldsymbol{a} \;=\; \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{12}$$

となる。まずλを与え、αとβを先ほどの範囲で動かして最小の R_L、R_{L_C}を求めるのが問題になる。実際の計算では $N = 3$ もしくはそれ以上の打切りモード数を用いた。

典型的な結果（$\lambda = 20$ と$\lambda = 100$ の場合）が図 1 に示されている。ここでは図は省略してあるが、βが増大するにつれて R_Lは増大するという結果が得られているので、αに対する R_Lの変化のみ示されている。特徴は$\alpha = 0$ と$\alpha = 1$ で発散し（ *Iudovich(1965)* ）、$\alpha \approx 0.59$ で最小値をとることである。$\lambda = 0$ の場合は$\alpha = 0$ で$\sqrt{2}$をとる。抵抗の効果の増大により流れが安定化することが

わかる。臨界レイノルズ数は図5に示すようにλがある程度大きくなると線形に増大する。図2のように臨界波数α_{Lc}は増大して0.59あたりで頭打ちになることがわかる。この点に関しては次で *Dolzhanskiy(1987)* の理論によって説明する。

3.2 線形安定性に対しての底の抵抗の効果

Dolzhanskiy はパラメータ $R_\lambda = R_\nu/\lambda$ を定義した。撹乱$\psi = e^{\sigma t}\psi'(x,y)$ を式(8)に代入することにより次式が得られる。

$$\sigma\Delta\psi' - J\{\Psi,(\Delta+1)\psi'\} = \frac{1}{R_\nu}\Delta^2\psi' - \frac{1}{R_\lambda}\Delta\psi'. \tag{13}$$

彼は準2次元の安定性に関して

$$\left.\begin{array}{ll} R_\nu & (\text{粘性}\Delta^2\text{の項}) \\ R_\lambda & (\text{抵抗}\Delta\ \text{の項}) \end{array}\right\} \text{どちらが支配的か}$$

という問題をたて次のように考えた。$\lambda = 0$ の場合の増幅率を $\mathrm{Re}\,\sigma = \sigma(\alpha, R_\nu)$ とおく。準2次元流で $\mathrm{Re}\,\sigma = 0$ のとき $R_\lambda^{-1} = \sigma(\alpha, R_\nu)$ が成り立つ。($\mathrm{Re}\,\sigma$ の代わりに R_λ^{-1}が加わると考えればよい。) この表式は $(\alpha, R_\lambda, R_\nu)$ 空間での中立曲面そのものを表している。したがって、準2次元流で中立曲線を求める問題は$\lambda = 0$ の場合の増幅率$\sigma(\alpha, R_\nu)$ を求める問題に帰着する。*Lin(1958)* と *Wasow(1948)* による次の定理がある。

$$\mathrm{Re}\,\sigma = \sigma(\alpha, R_\nu)\ \text{は},\ R_\nu \to \infty\ \text{で}\sigma(\alpha)\ (\text{非粘性解})\ \text{に一様収束する}.$$

この定理から、$R_\nu^{-1} \to 0$ で R_λ^{-1}は$\sigma(\alpha)$ に一様収束することがわかる。一方、$R_\lambda^{-1} = 0$ での$\sigma(\alpha, R_\nu) = 0$ は $R_\lambda^{-1} \neq 0$ での曲線の形 (U字形) とは異なっている。このようにして、λが十分大きいときには R_ν (粘性Δ^2の項) を落しても良いという結論が得られる。

線形安定性で成立したこのような性質はエネルギー法による臨界レイノルズ数 R_{E_c}に対しても成立するだろうかという問題が考えられる。そこで、ここで取り上げる有限撹乱に対する安定性問題の場合のλ依存性についても以下で考察する。

4. エネルギー法による非線形安定性

4.1 エネルギー法

攪乱の全エネルギーの時間発展についての方程式を導く。エネルギー E は通常のように次のように定義される。

$$E = \frac{1}{2}\iint_S (u^2+v^2)dS \ \ (= -\frac{1}{2}\iint_S \psi\Delta\psi dS\ ). \tag{14}$$

ここで、面 Sは次の条件 ∂S 上で $u = v = 0$ または、周期境界条件を満たすものとする。(14) 式を時間微分したものに式 (7) を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E &= \iint_S (u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t})dS \\ &= -\iint_S \psi\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)\, dS \\ &= -\frac{1}{R}\iint_S (\psi\Delta^2\psi - \lambda\psi\Delta\psi)\, dS \\ &\quad + \iint_S \psi\ J\{\Psi, (\Delta+1)\psi\}dS + \iint_S \psi\ J\{\psi, \Delta\psi\}dS.\end{aligned} \tag{15}$$

周期境界条件より $\iint_S[\psi\ J\{\psi,\Delta\psi\}]dS = 0$ となり、残りの項はすべてψについての 2 次の項である。

$$D = \iint_S (\psi\Delta^2\psi - \lambda\psi\Delta\psi)\, dS\ ,\ I = \iint_S \psi\ J\{\Psi, (\Delta+1)\psi\}\, dS, \tag{16}$$

とすると次式のように書ける。

$$\frac{d}{dt}E = -\frac{1}{R}D + I = D\{\frac{I}{D} - \frac{1}{R}\}. \tag{17}$$

ここで攪乱の非線形項を省略せずに導出されていることに注意する。この式はレイノルズ－オア方程式と呼ばれている。

式 (17) で右辺が負ならば安定、正ならば不安定となるので、右辺が負になるための十分条件を導く。$\frac{1}{R_{E_C}} = \max\frac{I}{D}$ とおくと、(17) 式より次の不等式が成立つ。

$$\frac{d}{dt}E \le D\{\frac{1}{R_{E_C}} - \frac{1}{R}\} \tag{18}$$

ポアンカレの不等式 ($^\exists M_0 > 0$; $\iint_S \psi\Delta^2\psi dS \le M_0 E$) から、$M = M_0 + \lambda$ ($D \le M\ E$) とおくと、次の不等式が成立する。

$$\frac{d}{dt}E \le M(\frac{1}{R_{E_C}} - \frac{1}{R})E \tag{19}$$

従って、

$$E \leq e^{M(\frac{1}{R_{E_C}}-\frac{1}{R})t} \tag{20}$$

式(20)より、$R < R_{E_C}$なら $E \to 0$ ($t \to \infty$) 即ち、$u \to 0$ ($t \to \infty$) となる。以上のように $R < R_{E_C}$は、有限攪乱に対しても主流が安定な十分条件を与えている。R_{E_C}をエネルギー法による臨界レイノルズ数と呼ぶ。

次に R_{E_C}の計算の方法について述べる。汎関数 I/Dの停留値を R_E^{-1}とする。$R_{E_c}^{-1}$は I/Dの最大値であるから、R_{E_c}は R_Eの中のの最小値になっている。ψについて I/Dの変分をとると次のようになる。

$$\delta(\frac{I}{D}) = \frac{\delta I \cdot D - I \cdot \delta D}{D^2} = \frac{1}{D}(\delta I - \frac{I}{D}\delta D) = 0, \quad \delta I - \frac{1}{R_E}\delta D = 0. \tag{21}$$

ここでδDとδIは次のようになっている。

$$\delta D = 2\iint_S \delta\psi[\Delta^2 - \lambda\Delta\psi]dS, \tag{22}$$

$$\delta I = -\iint_S \delta\psi[\frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial\psi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(K\frac{\partial\psi}{\partial x})]dS, \tag{23}$$

ここで

$$K = \frac{1}{2}[-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}]. \tag{24}$$

である。$\delta\psi$が任意であるから、R_Eは次の式を満たさなければならない。

$$\frac{1}{R_E}\{\Delta^2 - \lambda\Delta\}\psi = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial\psi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(K\frac{\partial\psi}{\partial x})\right]. \tag{25}$$

これはψに対して線形になっている。この方程式から R_Eを決定し、その最小値 R_{E_c}を求めることが問題になる。

4.2 R_Eの数値計算

臨界レイノルズ数 R_{E_C}を数値的に求める方法について説明する。式(25)は線形な方程式であり、R_Lの場合と同様に R_Eを求めることが出来る。主流 $\Psi = \cos y$は y方向に周期 2πの関数であるから、フロケの定理が使えて攪乱を次のようにおくことができる。

$$\psi = e^{i(\alpha x+\beta y)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{i n y}, \tag{26}$$

ここで $0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < 1$ である。これを式 (25) に代入すると次のような無限個の代数方程式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{E_C}} a_n &= \frac{-\alpha}{4\Delta(\alpha, \beta+n)\{\Delta(\alpha, \beta+n)+\lambda\}} \\ &\times \ [(2\beta+2n-1)\, a_{n-1} + (2\beta+2n+1)\, a_{n+1}]. \qquad (27)\end{aligned}$$

これは R_Eの固有値問題になっている。実際にはこれを有限で打ち切って R_E の計算を行う。表 1 のようにλを増やすと打切り N を大きくする必要があり、この研究では $N = 8 \sim 10$ で計算を行った。

表 1

λ	50	100	200	300
4 桁までの精度に必要な N	4	8	10	12

λを固定してα, βを動かしたときの R_Eの最小値 R_{E_c}を計算した。図 3(a) に$\lambda = 20$ の場合の R_Eのα, βに対する等高線の様子を示す。R_Eの最小値は $\alpha = \beta = 0$ に現れる。この形の R_Eの分布は $0 < \lambda < 49.1\cdots$のλの範囲にわたって見い出される。図 3(b) に$\lambda = 100$ の場合の R_Eの等高線を示す。この場合 $\alpha = 1.78, \beta = 0$ で R_Eは最小値を取る。このように$\lambda > 49.1\cdots$では、R_Eの最小値を与えるαの値は変化してゆく。βの増大は図 3(a), 図 3(b) の両方で R_Eを増加させるように働いていることがわかる。従って R_{E_C}を求めるには、$\beta = 0$ としてαのみを動かして R_Eの最小値を取ればよいことがわかる。図 4(a), 図 4(b) はそれぞれ図 3(a), 図 3(b) の$\beta = 0$ での切断面（α軸上）を表している。R_Eの変化の様子を$\beta = 0$ で見てみると図 4(a) では$\alpha = 0$ で最小値を、図 4(b) では$\alpha = 0$ で極大値を取り$\alpha = 1.78\cdots$で最小値を取っていることがわかる。

λの値を変えたときの R_{E_C}の変化の様子を、図 5 の実線 (b) で示している。$\lambda < 49.1\cdots$まではほぼ線形に増加して、それ以降では R_{E_C}の増加率は小さくなる。破線 (c) は長波長展開で得られた臨界レイノルズ数 $R_{E_0} = \sqrt{8\lambda(\lambda+1)}$ である$\lambda < 49.1\cdots$では $R_{E_C} = R_{E_0}$が成立し、$\lambda > 49.1\cdots$では R_{E_C}を与えるαの値は有限の値を取る。実線 (a) は、線形安定性での臨界レイノルズ数 R_{L_C}の変化の様子を示している。実線 (a) と (b) を比べると、この範囲では $O(R_{L_C}) \sim O(R_{E_C})$ であることがわかる。

R_{E_C}を与えるαの値をα_{E_C}とする。図 6 はα_{E_C}値の様子を示している。$\lambda < 49.1\cdots$では$\alpha_{E_C} = 0$ で、$\lambda > 49.1\cdots$ではα_{E_C}の値は有限の値を取る。この様に R_{E_C}の変化の様子が$\lambda = 49.1\cdots$で変ることはα_{E_C}の値が有限になるという

ことに関係している。また図 4(*a*) と図 4(*b*) を比べればこれは R_Eの$\alpha = 0$ における曲率が変化 ($\lambda = 20$ では正、$\lambda = 100$ では負) したためであると考えられる。図 7 に$\alpha = 0$ での R_Eの曲率の様子を示す。図 7 の四角のマークは曲率を数値計算結果から最小二乗法によって数値的に求めたものである。図 7 の実線は長波長展開によって求めた$\alpha = 0$ での R_Eの曲率を示していて、両者は良く一致している。長波長展開については次に述べる。

4.3 長波長近似 ($\alpha = 0$ 付近での振舞い)

撹乱の周期関数の部分、$F(y)$ と臨界レイノルズ数、R_{E_C}を$\alpha = 0$ からの漸近展開によって解析的に求める。線形安定性の場合 (*Gotoh, K., M. Yamada and J. Mizushima (1983), Sivashinsky, G. I. and V. Yakhot (1985)*) に用いられる手法と同様のものである。撹乱$\psi = e^{i(\alpha x+\beta y)}F(y)$ を (25) に代入すると $F(y)$ に関する方程式が得られる。

$$\left\{(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2}) + \alpha^2(-2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda) + \alpha^4\right\} F = i\alpha R_E \left(\frac{1}{2}\sin y\; F - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F\right). \tag{28}$$

波数αが小さいという条件から、$F(y)$ と R_Eをαのべきで次のように展開する。

$$F = F_0 + \alpha\, F_1 + \alpha^2\, F_2 + \cdots, \tag{29}$$

$$R_E = R_0 + \alpha\, R_1 + \alpha^2\, R_2 + \cdots. \tag{30}$$

これらを式 (28) に代入しαについて整理すると次のようになる。

$$O(1)\ :\quad (\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2})F_0 = 0, \tag{31}$$

$$O(\alpha)\ :\quad (\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2})F_1 = iR_0\left(\frac{1}{2}\sin y\; F_0 - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F_0\right), \tag{32}$$

$$\begin{aligned} O(\alpha^2)\ :\quad & (\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2})F_2 + (-2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda)F_0 \\ & = iR_0\left(\frac{1}{2}\sin y\; F_1 - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F_1\right) + iR_1\left(\frac{1}{2}\sin y\; F_0 - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F_0\right), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} O(\alpha^3)\ :\quad & (\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2})F_3 + (-2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda)F_1 \\ & = iR_0\left(\frac{1}{2}\sin y\; F_2 - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F_2\right) + iR_1\left(\frac{1}{2}\sin y\; F_1 - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F_1\right) \end{aligned}$$

$$+iR_2\left(\frac{1}{2}\sin y\, F_0 - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F_0\right), \tag{34}$$

$n \geq 4$

$$O(\alpha^n)\ :\quad (\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2})F_n + (-2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda)F_{n-2} + F_{n-4}$$

$$= i\Sigma_{m=0}^{n-1}R_m\left(\frac{1}{2}\sin y\, F_{n-1-m} - \cos y\frac{\partial}{\partial y}F_{n-1-m}\right). \tag{35}$$

これらの式を F_nが周期2πの関数であるという条件で低次より順番に解いていくことによりレイノルズ数を決定する。

低次から解を求め非同次項を評価していくと次のようになる。式 (31) から、F_0が周期関数という条件により

$$F_0 = const. \equiv 1. \tag{36}$$

と決まる。式 (32) に $F_0 = 1$ を代入して解くと、

$$F_1 = \frac{i\,R_0}{2(\lambda+1)}\sin y, \tag{37}$$

と決まる。式 (33) に F_0, F_1を代入して整理すると、

$$(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2})F_2 = -\lambda + \frac{R_0^2}{8(\lambda+1)} + \frac{3R_0^2}{8(\lambda+1)}\cos 2y + \frac{iR_1}{2}\sin y \tag{38}$$

となる。F_2 は周期境界条件を満たさなければならないので、右辺の定数項は 0 でなければならない。従って、

$$R_0 = \sqrt{8\lambda(\lambda+1)}. \tag{39}$$

非同次解を求めると、

$$F_2 = \frac{iR_1}{2(\lambda+1)}\sin y + \frac{3R_0^2}{8\cdot 4(\lambda+1)(\lambda+4)}\cos 2y, \tag{40}$$

が得られる。式 (34) に F_0, F_1, F_2を代入して式を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2})F_3 = &\frac{R_0R_1}{4(\lambda+1)} + \frac{3R_0R_1}{4(\lambda+1)}\cos 2y \\ &+ i\left[\frac{R_2}{2} - \frac{R_0(\lambda+2)}{2(\lambda+1)} + \frac{9R_0^3}{4\cdot 4\cdot 8(\lambda+1)(\lambda+4)}\right]\sin y \\ &+ i\frac{3\cdot 5\cdot R_0^3}{4\cdot 4\cdot 8(\lambda+1)(\lambda+4)}\sin 3y.\end{aligned} \tag{41}$$

右辺の定数項 =0 より、$R_0R_1 = 0$ 、即ち、

$$R_1 = 0. \tag{42}$$

また、

$$F_3 = i\left[\frac{R_2}{2} - \frac{R_0(\lambda+2)}{2(\lambda+1)} + \frac{9R_0^3}{4\cdot 4\cdot 8(\lambda+1)(\lambda+4)}\right]\frac{1}{\lambda+1}\sin y$$
$$+i\frac{3\cdot 5\cdot R_0^3}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 9(\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda+9)}\sin 3y, \tag{43}$$

が得られる。式 (35) に F_0, F_1, F_2, F_3, R_1を代入して式を整理する。

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \lambda\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)F_4$$
$$= -1 + \frac{R_0R_2}{8(\lambda+1)} + \frac{R_0}{4(\lambda+1)}\left[\frac{R_2}{2} - \frac{R_0(\lambda+2)}{2(\lambda+1)} + \frac{9R_0^3}{4\cdot 4\cdot 8(\lambda+1)(\lambda+4)}\right]$$
$$+i\frac{R_3}{2}\sin y$$
$$+3\left[1 - \frac{R_0^2(\lambda+8)}{4\cdot 8(\lambda+1)(\lambda+4)} + \frac{5^2R_0^4}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 8\cdot 9(\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda+9)}\right]\cos 2y$$
$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot R_0^4}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 8\cdot 9(\lambda+1)(\lambda+4)(\lambda+9)}\cos 4y. \tag{44}$$

右辺の定数項 =0 より、

$$-1 + \frac{R_0R_2}{8(\lambda+1)} + \frac{R_0}{4(\lambda+1)}\left[\frac{R_2}{2} - \frac{R_0(\lambda+2)}{2(\lambda+1)} + \frac{9R_0^3}{4\cdot 4\cdot 8(\lambda+1)(\lambda+4)}\right] = 0. \tag{45}$$

これを変形して、

$$R_2 = \frac{4(\lambda+1)}{R_0} + \frac{R_0}{2}\left[\frac{\lambda+2}{\lambda+1} - \frac{9\lambda}{8(\lambda+4)}\right]. \tag{46}$$

が得られる。

以上の計算結果より、R_Eの漸近表示が次のように得られた。

$$R_E = \sqrt{8\lambda(\lambda+1)} + \alpha^2\left\{\frac{4(\lambda+1)}{R_0} + \frac{R_0}{2}\left[\frac{\lambda+2}{\lambda+1} - \frac{9\lambda}{8(\lambda+4)}\right]\right\}. \tag{47}$$

原点での R_Eの値については前の節で示したように数値計算結果と一致している。また原点での曲率 R_2のλによる変化は次の図 7 のようになり、数値計算結果から最小 2 乗法を用いて求めた係数と良く一致していることがわかる。またこの表式を 0 と置くことにより$\lambda_0 = 49.1...$を導出する事ができる。

5. 結論と今後の課題

われわれは底の抵抗の効果がコルモゴロフ流の安定特性にどのような影響を及ぼすかを数値的および解析的に研究した。$O(R_{L_c}) \sim O(R_{E_C}) \propto \lambda$ が$\lambda < 200$ の範囲で成立していることを示し、線形減衰の効果は微小擾乱および有限擾乱に対してもこの範囲において定量的に同程度であることがわかった。抵抗の効果がない場合（$\lambda = 0$）は $R_{E_C} = 0$ となり大域的に安定にはなりえないが、抵抗の効果により線形不安定の生じるレイノルズ数と同程度まで大域的に主流が安定になりえることがわっかた。*Bondarenko et al(1979)* の実験は$\lambda \approx 20$ に相当するので、実験で擾乱を注意深く制御しなくても線形臨界レイノルズ数が得られたことを支持していると考えられる。もちろん $R_{E_c} < R < R_{LC}$の範囲においては亜臨界不安定が生じる可能性はある。

中立曲線の様子が$\lambda = \lambda_0$を境にかわることを長波長からの展開によって示した。これは$\lambda \to \infty$ 、すなわち、抵抗を伴う非粘性極限においては R_Eはαの単調減少関数であることを示唆していると考えられる。抵抗のない粘性がある場合と対照的である。このことを数値的及び解析的に示すことが次の問題の一つである。

もう１つの方向としてはここで得られた結果がコルモゴロフ流特有のものであるかそれとも底の抵抗を持つ系、すなわち、準２次元流で一般的に成立するかどうかを調べることがある。準２次元流は地球規模の流れでは基礎的な地位を占めており、実験室でのシミュレイションも行われている。(*Dolzhanskiy et al(1990)*) われわれの結果が広く成立すれば準２次元流の安定性を強く保証することになるであろう。

参考文献

Belotserkovskii, S.O., A. P. Mirabel and M. A. Chusov, 1978 *Izv. Atmos. and Oceanic Phys.* **14**, 6.

Bondarenko, N. F., M. Z. Gak and F. V. Dolzhanskiy, 1979 *Izv. Atmos. and Oceanic Phys.* **15**, 711.

Dolzhanskiy, F. V. 1987 *Izv. Atmos. and Oceanic Phys.* **23**, 262.

Dolzhanskiy, F. V., V. A. Krymov and D. Yu. Manin, 1990 *Sov. Phys. Usp.* **33** 495.

Gotoh, K., M. Yamada and J. Mizushima 1983 *J. Fluid Mech.***127**, 45.

Iudovich, V.I. 1965 *Prikl. Math. Mekh.***29**, 527.

Lin, C.C. 1958 *Theory of Hydrodynamic Stability.*

Meshalkin, L. D. and Y. G. Sinai 1961 *Prikl. Math. Mekh.***25**, 1140.

Nepomnianshchii, A. A. 1976 *Prikl. Math. Mekh.***40**, 886.

Okamoto, H. and M. Shoji 1991 **数理研講究録 767**, 29.

Pedlosky, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*,(Springer-Verlag).

Platt, N., L. Sirovich, and N. Fitzmaurice 1992 *Phys. Fluids***A3** 681.

Sivashinsky, G. I. and V. Yakhot 1985 *Phys. Fluids***28** 1040.

Straughan, B. 1992 *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection*, Applied Mathematical Sciences 91,(Springer-Verlag).

Wasow, W. 1948 *Ann. Math.* **49**, 852.

Yamada, M. 1986 *J. Phys. Soc. Jpn.***55**, 3073.

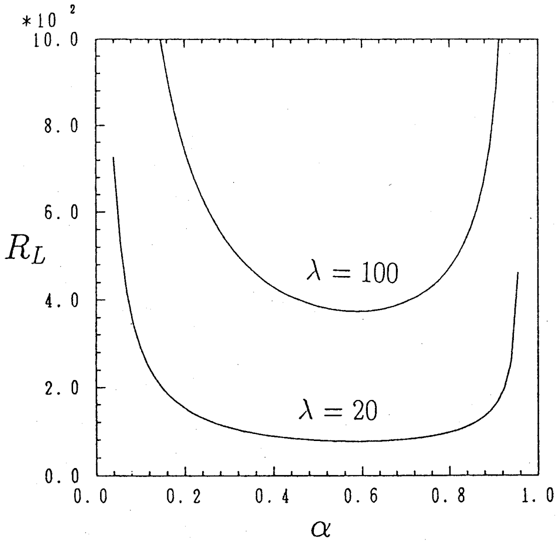

図 1. $R_L = R_L(\alpha)$.

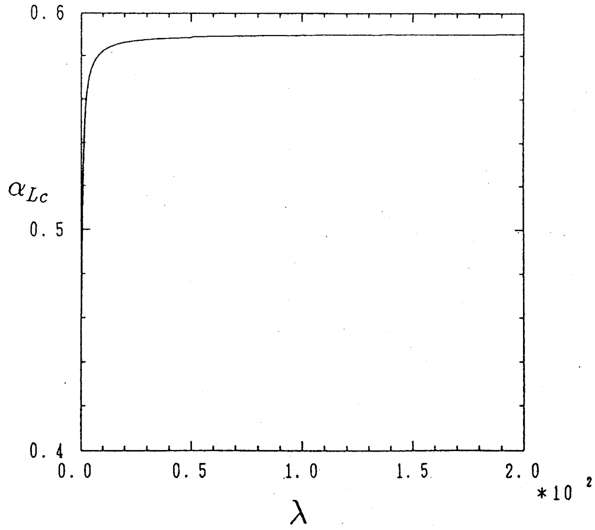

図 2. $\alpha_{Lc} = \alpha_{Lc}(\lambda)$.

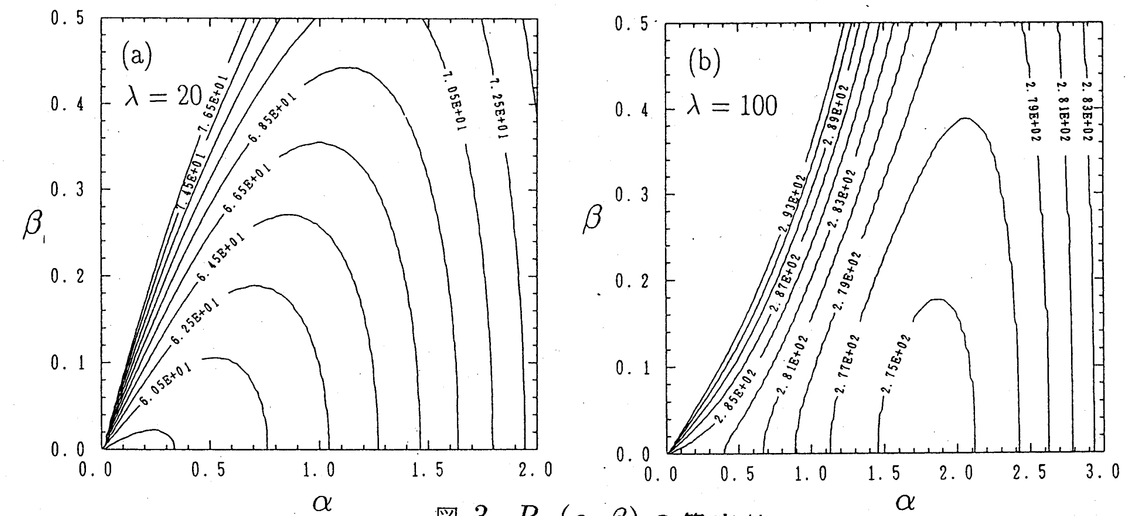

図 3. $R_E(\alpha, \beta)$ の等高線

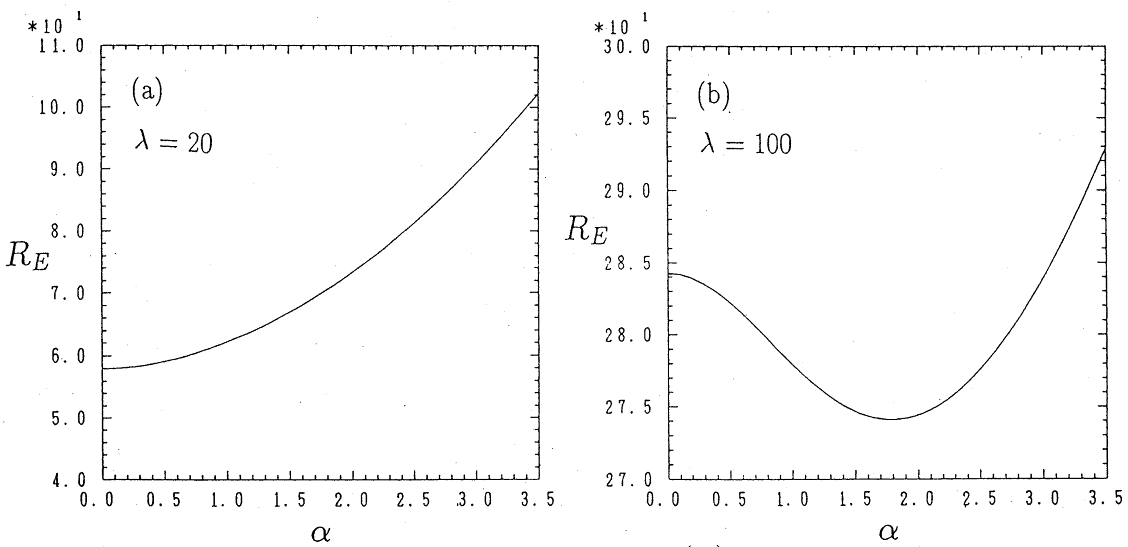

図 4. $R_E = R_E(\alpha)$.

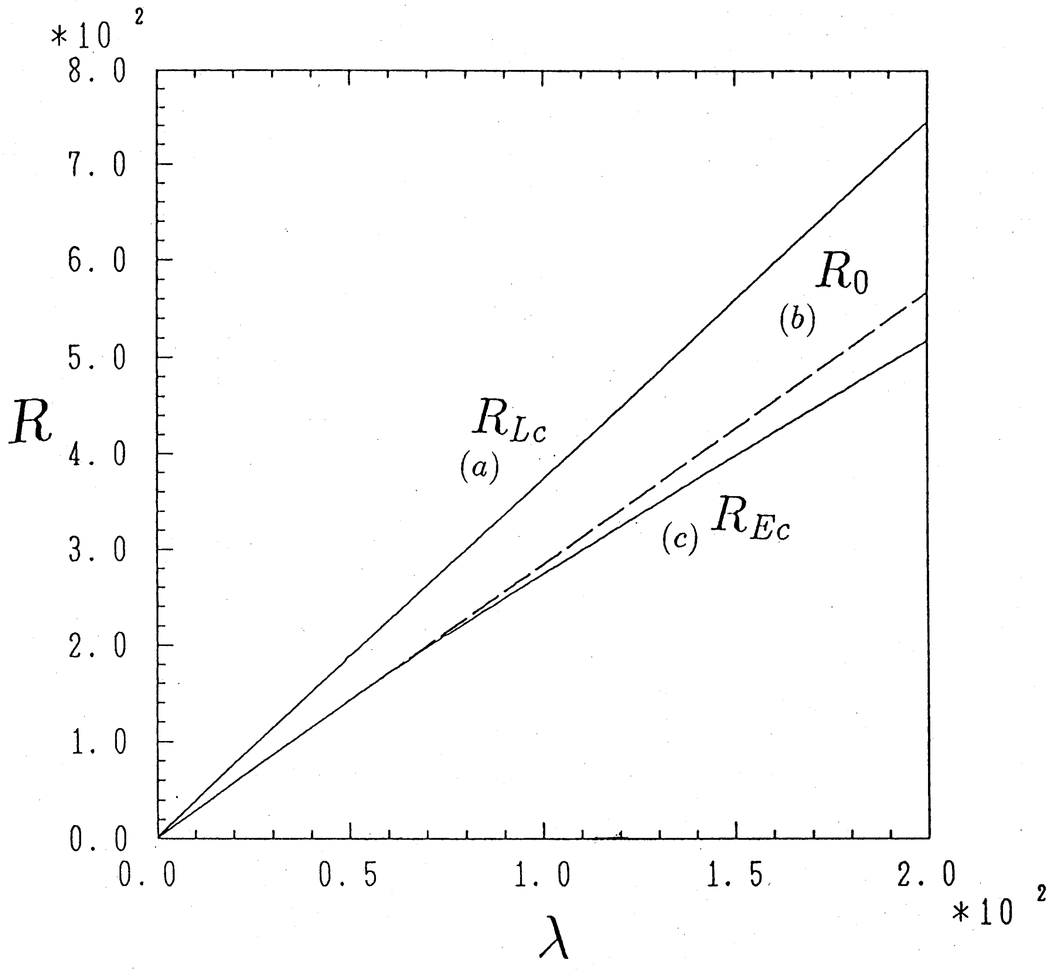

図 5. $R = R(\lambda)$.

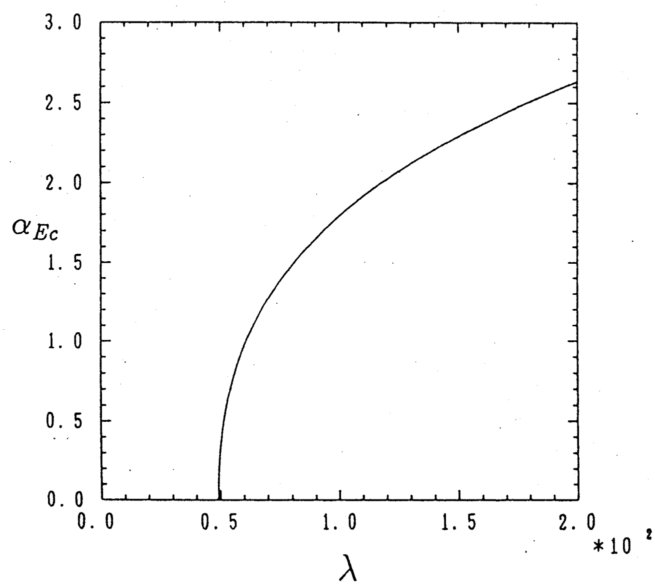

図 6. $\alpha_{E_C} = \alpha_{E_C}(\lambda)$.

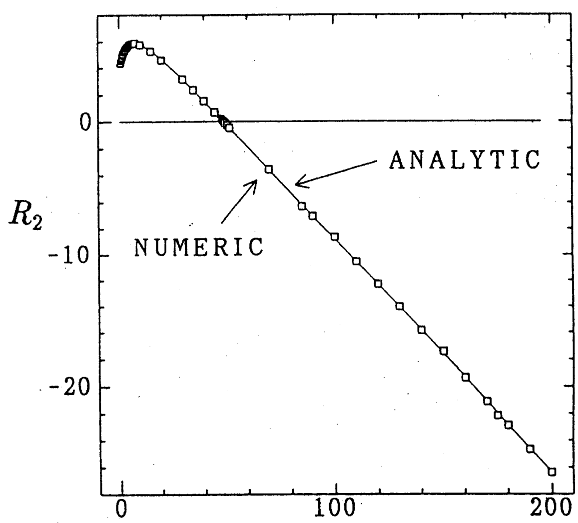

図 7. $R_2 = R_2(\lambda)$.