数理解析研究所講究録
第 852 巻 1993 年 80-94

乱流の渦度構造

都立大理学部　冨山泰伸（Yasunobu Tomiyama）

1. はじめに

数値シュミレーション[1),2),3),4),5)]により乱流中の渦構造の研究が近年盛んになってきている。そのレイノルズ数Reはまだ十分に大きいとは言えないので乱流の全体的な理解には不十分かもしれないが、小さな尺度の渦度構造を解明するにはかなりの期待がかけられるであろう。小規模渦構造に関する数値シュミレーションの結果[6)]によると、次ぎのような性質が明らかにされている。

1）乱流の小さな尺度の渦の形状は、渦の強度が強いとき管状を示し、中程度のときは面状となり、強度が弱いときははっきりした形状を示さない。

2）強い渦度の渦はそれと同程度の尺度の渦の平均特性時間に比べて長時間その形状を維持する。

3）ひずみ速度テンソルの３つの主値 s_1、s_2、s_3（$s_1+s_2+s_3=0$）に対応する単位主軸ベクトルを $\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_2$、$\mathbf{s}_3$ と表すと、主値 s_1、s_2、s_3 が $s_1>s_2>s_3$の時、渦度はs_2に対応する $\mathbf{s}_2$ の方向を向く傾向がある。この渦度とひずみ速度の相関は実験[7)]によっても確かめられている。

このように、数値シュミレーションによる解析は乱流構造の解明に有効な新たな材料を提供している。一方、理論的には非粘性ラグランジュ方程式の圧力項の仮定（局所有効性、等方性）を用いてVieillefosseによって導びかれた渦度とひずみ速度テンソルの方程式[8)]による力学過程を通してそれらの相互の相関関係が理解されている。また、最近では、渦度とそれにより誘導されるひずみ速度の運動学的考察[9),10)]も行なわれてきている。

上に述べた数値シュミレーションの結果から、乱流の中では管状や面状の強い小規模渦はその形状を維持し、それらのバックグラウンドとして大規模渦がラン

ダムな方向に配置され、小規模渦に比べ時間的には緩やかな変動をしていると想像される。そこで、ランダムなバックグラウンドの速度を一様なひずみ速度をもつ速度で置き換え、その中の強、中程度の形状のはっきりした比較的安定な渦を乱流の小規模渦と見なす。一様なひずみ速度をバックグラウンドとする渦度方程式はある条件の下で厳密解をもつ。解は面状渦、管状渦、螺旋状渦に対応しているので、それらの解を用いて渦のまわりに誘導されるひずみ速度と渦度の関係を運動学的に解析し、渦度構造を調べる。

2. 線型なひずみ速度の下での渦度方程式

線型なひずみ速度をバックグラウンドとする渦を考え、ひずみ速度と渦度に関係する速度を重ね合わせた全体の速度場 $\mathbf{v}\,(v_x, v_y, v_z)$を次のように仮定する。

$$v_x = \alpha x + \frac{\partial \Psi(x,y,t)}{\partial y}, \qquad (2\text{-}1)$$

$$v_y = \beta y - \frac{\partial \Psi(x,y,t)}{\partial x},$$

$$v_z = \gamma y + w(x,y,t)$$

この速度場は $\alpha+\beta+\gamma = 0$ のとき非圧縮性の条件を満たしている。それに対する渦度 $\boldsymbol{\omega}\,(\omega_x, \omega_y,, \omega_z)$ は以下のようになる。

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (2\text{-}2)$$

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\omega_z = -\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)$$

これらを渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega} \qquad (2\text{-}3)$$

に代入すると

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \beta \mathrm{y}\frac{\partial \omega_x}{\partial \mathrm{y}} = \alpha\omega_x + \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial \mathrm{y}^2}\right) + \frac{\partial[\Psi,w]}{\partial \mathrm{y}}, \qquad (2\text{-}4)$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \beta \mathrm{y}\frac{\partial \omega_y}{\partial \mathrm{y}} = \beta\omega_y + \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial \mathrm{y}^2}\right) - \frac{\partial[\Psi,w]}{\partial \mathrm{y}},$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \beta y\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \gamma\omega_z + \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}\right) + [\Psi,\omega_z]$$

が得られる。ただし、[* , *] を次ぎのように定義する。

$$[\Psi,w] = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (2-5)$$

これはΨ とw の交換関係を示し、Ψとw, Ψ とω_z が交換可能なら、すなはち、$[\Psi, w] = 0$, $[\Psi, \omega_z] = 0$ を満たすとき上の渦度方程式は線型方程式になり、解析的に解くことができる。以下にΨ とw , Ψ とω_z が交換可能となる条件の例を挙げ、それぞれの場合の渦の形状を併記する。

Case (I) $w(x,y,t) \neq 0, \Psi = const.$ ：曲面状渦

Case (I') $w = 0, \Psi(x,t) \neq 0$ または $w = 0, \Psi(y,t) \neq 0$ ：平面状渦

Case (I") $w(x,t) \neq 0, \Psi(x,t) \neq 0$

または$w(y,t) \neq 0, \Psi(y,t) \neq 0$ ：層状渦

Case (II) $w(r,t) \neq 0, \Psi(r,t) \neq 0$ ：螺旋状渦

Case (II') $w = 0, \Psi(r,t) \neq 0$ ：円形管状渦

Case (I') と Case (I") は Case (I) の、Case (II') は Case (II) のそれぞれの特別な場合に帰着できるので、Case (I) と Case (II) だけを考える。Case (II') に相当する方程式はすでに神戸[11),12)]によっては解かれている。

3. 曲面状渦

Case（I）に対しては $\omega_z = 0$ で ω_x, ω_y は（2－2）により速度wを微分することによって得られるので、先ずwを求めよう。wの方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \alpha x \frac{\partial w}{\partial x} + \beta y \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma w + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{3-1}$$

で表される。変数 x と y をξ と η に、w をw' に次のように変数変換[11),12)]する。

$$\xi(t) = \exp[-a(t)], \quad \eta(t) = \exp[-b(t)],$$
$$w(x,y,t) = \exp[c(t)]w'(\xi,\eta,t), \tag{3-2}$$

ただし、

$$a(t) = \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s, \ b(t) = \int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s, \ c(t) = \int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s = -a(t) - b(t)$$

そのとき、w' は次の方程式に従う。

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = \nu \left(\mathrm{e}^{-2a} \frac{\partial^2 w'}{\partial \xi^2} + \mathrm{e}^{-2b} \frac{\partial^2 w'}{\partial \eta^2} \right)$$

ここで、つぎの２つの異なる時間

$$\tau(t) = \int_0^t \exp[-2a(s)]\mathrm{d}s, \ \lambda(t) = \int_0^t \exp[-2\mathrm{b}(s)]\mathrm{d}s \tag{3-3}$$

を導入し、変数分離 $w'(\xi,\eta,t) = X(\xi,\tau)Y(\eta,\lambda)$ を行なうと、次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} = \kappa(t)\exp(2a)X, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \nu \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} = -\kappa(t)\exp(2b)Y$$

ここで $\kappa(t)$ は任意関数である。今、

$$\int_0^t \kappa \exp(2a)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \kappa \exp(2b)\mathrm{d}\lambda$$

を考慮すると解が次のように得られる。

$$w'(\xi,\eta,t) = \frac{1}{4\pi\nu\sqrt{\tau\lambda}} \iint w(p,q,0)\exp\left[-\frac{(\xi-p)^2}{4\nu\tau} - \frac{(\eta-q)^2}{4\nu\lambda} \right]\mathrm{d}p\mathrm{d}q$$

従って

$$w(x,y,t)=\frac{\mathrm{e}^{c}}{4\pi\nu\sqrt{\tau\lambda}}\iint w(p,q,0)\exp\left[-\frac{(\xi-p)^2}{4\nu\tau}-\frac{(\eta-q)^2}{4\nu\lambda}\right]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{3-4}$$

これを y と x で微分して、渦度の x, y 成分が次のように得られる。

$$\omega_x(x,y,t)=\frac{\mathrm{e}^{c-b}}{4\pi\nu\sqrt{\tau\lambda}}\iint \omega_x(p,q,0)\exp\left[-\frac{(\xi-p)^2}{4\nu\tau}-\frac{(\eta-q)^2}{4\nu\lambda}\right]\mathrm{d}p\mathrm{d}q$$
$$\omega_y(x,y,t)=\frac{\mathrm{e}^{c-a}}{4\pi\nu\sqrt{\tau\lambda}}\iint \omega_y(p,q,0)\exp\left[-\frac{(\xi-p)^2}{4\nu\tau}-\frac{(\eta-q)^2}{4\nu\lambda}\right]\mathrm{d}p\mathrm{d}q \tag{3-5}$$

この解は渦度が x、y 面内に含まれる曲面状の渦度を表している。

簡単な例として $\alpha=-\sigma, \beta=\sigma, \gamma=0$ (σ=cst) を考えよう。このときの定常解

$$\omega_y(x)=\left[A\int_0^x\exp(\sigma\xi^2/2\nu)\mathrm{d}\xi+\omega_0\right]\exp(-\sigma x^2/2\nu) \tag{3-6}$$

が得られる。A と ω_0 は定数である。

4. 螺旋状渦

Case（II）の渦度方程式

$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t}+\alpha r\frac{\partial\omega_z}{\partial r}+2\alpha\omega_z=\nu\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_z}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial\omega_\theta}{\partial t}+\alpha r\frac{\partial\omega_\theta}{\partial r}-\alpha\omega_\theta=\nu\left(\frac{\partial^2\omega_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_\theta}{\partial r}-\frac{\omega_\theta}{r^2}\right) \tag{4-1}$$

の変数 t、r、ω_z、ω_θ に変数変換：

$$a(\mathrm{t})=\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s,$$
$$\rho(t)=\exp[-a(t)]r,\quad \tau(t)=\int_0^t\exp[-2a(s)]\mathrm{d}s,$$
$$\omega_z(r,t)=\exp[-2a(t)]\omega_0(\rho,\tau),\quad \omega_\theta(r,t)=\exp[a(t)]\omega_1(\rho,\tau) \tag{4-2}$$

を施し、新しい変数 τ、ρ、ω_0、ω_1 を用いて方程式を書き改めると

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \tau} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \omega_n}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\omega_n\right) \qquad (n = 0,1) \tag{4-3}$$

となる。この方程式の解はn次の変形Bessel関数 I_n を用いて

$$\omega_n(\rho,\tau) = \frac{e^{-\rho^2/4\nu\tau}}{2\nu\tau}\int_0^\infty \lambda\omega_n(\lambda,0)I_n(/2\nu\tau)\exp[-\lambda^2/4\nu\tau]d\lambda \tag{4-4}$$

と表される。従って、渦度のr成分、θ 成分は次ぎのように得られる。

$$\omega_z(r,t) = \frac{\exp(-2a-\rho^2/4\nu\tau)}{2\nu\tau}\int_0^\infty \lambda\omega_z(\lambda,0)I_0(\rho\lambda/2\nu)\exp(-\lambda^2/4\nu\tau)d\lambda \tag{4-5}$$

$$\omega_\theta(r,t) = \frac{\exp(a-\rho^2/4\nu\tau)}{2\nu\tau}\int_0^\infty \lambda\omega_\theta(\lambda,0)I_1(\rho\lambda/2\nu)\exp[-\lambda^2/4\nu\tau]d\lambda$$

簡単な例として, $\alpha=\beta=-\sigma$, $\gamma=2\sigma$ の時、定常解を求めると

$$\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = \omega_0\exp(-\sigma r^2/2\nu), \tag{4-6}$$

$$\omega_\theta = -\frac{\partial w}{\partial r} = gr$$

となる。ここでgは定数である。

5. 面状渦とひずみ速度

Case (I) の定常解 (3-6) で $\omega_y(x)$ を $\omega_z(x)$ と置き換えて$A=0$ とした解を考える。即ち,

$$\omega_z(x) = \omega_0\exp(-\sigma x^2/2\nu) \tag{5-1}$$

そのときの速度場は

$$\begin{aligned} v_x(x) &= -\sigma x, \\ v_y(x) &= \omega_0\int_0^x \exp(-\sigma\xi^2/2\nu)d\xi + B_0, \\ v_z(x) &= \sigma z \end{aligned} \tag{5-2}$$

となり、ひずみテンソルS (s_{ij})

$$s_{11}=\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\sigma,\quad s_{22}=\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\quad s_{33}=\frac{\partial v_z}{\partial z}=\sigma,$$

$$s_{12}=s_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\omega_z,\quad s_{23}=s_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=0, \tag{5-3}$$

$$s_{31}=s_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=0,$$

となる。これを用いて、ひずみテンソルの主値s_1、s_2、s_3($s_1>s_2>s_3$) を求めると次のようになる。

（１）$\omega_z > (8)^{1/2}\sigma$ （$x^2< 2\nu\log[\omega_0/(8)^{1/2}\sigma]/\sigma$ ）のとき、

$s_1=[(\sigma^2+\omega_z^2)^{1/2}-\sigma]/2,\ s_2=\sigma,\ s_3=-[(\sigma^2+\omega_z^2)^{1/2}+\sigma]/2$

（２）$\omega_z < (8)^{1/2}\sigma$ （$x^2> 2\nu\log[\omega_0/(8)^{1/2}\sigma]/\sigma$ ）のとき

$s_1=\sigma,\ s_2=[(\sigma^2+\omega_z^2)^{1/2}-\sigma]/2,\ s_3=-[(\sigma^2+\omega_z^2)^{1/2}+\sigma]/2$

s_1、s_2、s_3に対応する主軸の方向の単位ベクトル$\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_2$、$\mathbf{s}_3$は渦度の強さω_zに依存し（１）の場合は$\mathbf{s}_2$が渦度の方向z方向に一致し、$\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_3$、はx-y平面内にある。（２）の場合は$\mathbf{s}_1$と渦度の向きが一致し、$\mathbf{s}_2$、$\mathbf{s}_3$、がx-y平面内にある。従って、強い渦の中心付近では渦度の向きは中間値の主軸の方向$\mathbf{s}_2$に一致し、乱流中の渦度の傾向と一致する。（１）の場合、$\mathbf{s}_1$とx軸、$\mathbf{s}_3$とy軸のなす角をθで表すと

$$\tan\theta=\frac{\sigma}{\omega_z}\left\{1-\sqrt{1+(\omega_z/\sigma)^2}\right\} \tag{5-4}$$

となる。ω_zが有限のときθ は $0<\theta<\pi/4$ の範囲の値をとる。$\omega_z=0$ のとき$\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_2$はそれぞれx、y軸に一致し、ω_z が増大するに従ってθ は $\pi/4$（４５度）に近ずく。$\omega_z=(8)^{1/2}\sigma$（$s_1=s_3$）のときのθ はおおよそ３５.３度に相当する。

乱流の数値シュミレーション[3)]の示すところによるとs_1、s_2、s_3 の平均値の比はおおよそ$s_1:s_2:s_3=3:1:-4$で、渦度の方向は中間値のひずみ速度の主軸の方向と平行になる傾向を示している。我々の計算ではこの比に対応する主値

のとき渦度の方向はｓ$_2$の方向に一致し、数値シュミレーションの結果と合致する。ｓ$_1$、ｓ$_3$はxy平面内にあってｓ$_1$とx軸、ｓ$_3$とy軸のなす角度θは４０．９度程度である。従って、ｓ$_1$、ｓ$_3$はx、y軸のなす角をおおよそ等分する方向を示している。

圧力勾配は

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = (-\sigma^2 x, 0, \sigma^2 z) \tag{5-5}$$

と表される。従って、zが小さいときこの圧力勾配の方向はx軸にほぼ平行で、圧力勾配の方向がｓ$_1$、ｓ$_3$とはおおよそ４５度程度の角をなすと報告している数値シュミレーションの結果[13)]と合致する。

６．　螺旋状渦とひずみ速度

Case（II）の定常解（４-６）

$$\omega_z = \omega_0 \exp(-\sigma r^2 / 2\nu),\ \omega_\theta = gr \tag{6-1}$$

に対する円柱座標の速度成分と、ひずみテンソルは次ぎのようになる。

$$v_r = -\sigma r,$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\nu\omega_0}{\sigma r}[1 - \exp(-\sigma r^2 / 2\nu)] \tag{6-2}$$

$$v_z = 2\sigma z - \frac{1}{2} g r^2$$

$$\begin{aligned} &s_{11} = -\sigma + \chi \sin 2\theta,\quad s_{22} = -\sigma - \chi \sin 2,\quad s_{33} = 2\sigma, \\ &s_{12} = s_{21} = -\chi \cos 2\theta,\quad s_{23} = s_{32} = -\omega_\theta \sin\theta / 2, \\ &s_{31} = s_{13} = -\omega_\theta \cos\theta / 2, \end{aligned} \tag{6-3}$$

ただし

$$\chi \equiv -\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \frac{\omega_0}{2}\left[\frac{2\nu}{\sigma r^2} - (1 - \frac{2\nu}{\sigma r^2})\exp(-\sigma r^2 / 2\nu)\right]$$

である。従って、s_{ij}の主値 s は

$$(2\sigma - s)\left\{(s+\sigma)^2 - \chi^2\right\} - \frac{1}{4}\omega_\theta{}^2(s+\sigma) = 0$$

の方程式から得られ、次ぎのようになる。

$$\begin{aligned}
&s_1 = 2\sqrt{Q}\cos(\phi / 3),\\
&s_2 = 2\sqrt{Q}\cos(\phi / 3 - 2\pi / 3)\\
&s_3 = 2\sqrt{Q}\cos(\phi / 3 - 4\pi / 3)\\
&\cos\phi = R / \sqrt{Q^3}\\
&Q = (3\sigma^2 + \chi^2 + \omega_\theta{}^2 / 4) / 3,\\
&R = \sigma(\sigma^2 - \chi^2 + \omega_\theta{}^2 / 8),
\end{aligned} \qquad (6\text{-}4)$$

ϕ の値は $0 < \phi < \pi$ と考えられるので s_1、s_2、s_3 は

$$-2\sqrt{Q} \le s_3 \le -\sqrt{Q} \le s_2 \le \sqrt{Q} \le s_1 \le 2\sqrt{Q} \qquad (6\text{-}5)$$

の大小関係がある。s_i (i = 1,2,3) に対応する固有単位ベクトル

$\mathbf{s}_i$ (ξ_i, η_i, ζ_i) は

$$\begin{aligned}
&\xi_i = c_i\sqrt{|s_i - 2\sigma|}\left[(s_i + \sigma)\cos\theta - \chi\sin\theta\right],\\
&\eta_i = c_i\sqrt{|s_i - 2\sigma|}\left[(s_i + \sigma)\sin\theta + \chi\cos\theta\right],
\end{aligned} \qquad (6\text{-}6)$$

$$\zeta_i = c_i\sqrt{\left|(s_i + \sigma)\left[(s_i + \sigma)^2 - \chi^2\right]\right|},$$

$$c_i = 1 / \sqrt{|s_i - 2\sigma|\left[(s_i + \sigma)^2 + \chi^2\right] + \left|(s_i + \sigma)\left[(s_i + \sigma)^2 - \chi^2\right]\right|}$$

となる。一方、渦度 $\boldsymbol{\omega}$ ($-\omega_\theta\sin\theta$, $\omega_\theta\cos\theta$, ω_z) の $\mathbf{s}_i$ に対する方向余弦 $\cos\theta_i$ は

$$\cos\theta_i = \frac{c_i}{|\boldsymbol{\omega}|}\left|\omega_\theta \chi \sqrt{|s_i - 2\sigma|} + \omega_z \sqrt{\left|(s_i+\sigma)\left\{(s_i+\sigma)^2 - \chi^2\right\}\right|}\right| \tag{6-7}$$

のように表される。

先ずはじめに、管状渦 $\omega_\theta=0$ の場合を考えよう。$\chi(r)$ の最大値は $\chi_m=0.149\,\omega_0$ で $\chi_m<3\sigma$ のときは $\boldsymbol{\omega}$ は 常に $\mathbf{s}_1$の方向を向く。$\chi_m>3\sigma$ のときは $\chi(r)<3\sigma$ の範囲、即ち $r<r_0$、$r>r_1$ の領域（図１参照）で $s_1=2\sigma$, $s_2=-\sigma+\chi$, $s_3=-\sigma-\chi$ となり、$\mathbf{s}_1$は z 軸と一致し $\mathbf{s}_2$、$\mathbf{s}_3$ は x, y 平面内にある。渦度は z 軸を向いているので $\boldsymbol{\omega}$ の $\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_2$、$\mathbf{s}_3$ に対する方向余弦は $\cos\theta_1=1$, $\cos\theta_2=0$, $\cos\theta_3=0$ となる。$\chi(r)>3\sigma$ の範囲、即ち $r_0<r<r_1$ のリング状領域では $s_1=-\sigma+\chi$, $s_2=2\sigma$, $s_3=-\sigma-\chi$ となり、$\mathbf{s}_2$が z 軸と一致し $\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_3$ は xy 平面内にある。したがって $\boldsymbol{\omega}$ の $\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_2$、$\mathbf{s}_3$ に対する方向余弦は $\cos\theta_2=1$, $\cos\theta_1=0$, $\cos\theta_3=0$ となる。このように 管状渦の場合にはω_zではなく、$\chi(r)$ が渦度とひずみ速度の構造に重要な役割を果たしている。定義式からわかるように$\chi(r)$は渦の中心の周りの角速度が中心から離れることによる剛体回転からの遅れの割合を示し、今の場合非負である。

次に$\omega_\theta=0$ の場合を考えよう。$(2\nu/\sigma)^{1/2}g/\omega_0<<1$ とき渦度の中心付近では ω_θ は十分小さく $\omega_\theta=0$ の時と同じような傾向をもつ。$\sigma/\omega_0=0.02$, $(2\nu/\sigma)^{1/2}g/\omega_0=0.01$ のときの渦度、ひずみ速度、渦度とひずみ速度の間の方向余弦に対する渦度の中心からの距離の依存性を図２、図３、図４に示す。中心付近では $\mathbf{s}_1$と$\boldsymbol{\omega}$の方向がほぼ一致し、中心から離れると $\mathbf{s}_2$が次第に大きくなって $\mathbf{s}_1$の値に近づきまた離れていく（見方を換えるとこれらの二つの主値の大小関係が”逆転”すると考えることもできる。ここでは $s_1>s_2$と定義されていることに注意）。この”逆転”のために$\boldsymbol{\omega}$ の $\mathbf{s}_1$から $\mathbf{s}_2$への方向転換が急激に起こるように見える。中心からさらに離れるとω_θ はが次第に大きくなり、そのため複雑な変化を伴う。中心から更に遠く離れたところでは、$\boldsymbol{\omega}$ はおおよそ $\mathbf{s}_1$に直交し、$\mathbf{s}_2$、$\mathbf{s}_3$ の角度をほぼ二等分するような方向を向く。

圧力勾配は以下のように得られる。

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\nu^2\omega_0{}^2}{\sigma^2 r^3}\left\{1-\exp(-\sigma r^2/2\nu)\right\}-\sigma^2 r,$$

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}=0, \qquad (6\text{-}8)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-4\nu g-2\sigma^2 z$$

今、$\sigma/\omega_0<<1$, $(2\nu/\sigma)^{1/2}g/\omega_0<<1$の場合を考えると、z方向の圧力勾配はr方向の圧力勾配に比べ十分に小さいので無視できる。従って、圧力勾配は渦度の中心付近ではほぼs_1に垂直でおおよそs_2、s_3を二当分する方向を向き、中間のリング状領域ではs_2に垂直でs_1、s_3を二当分する方向を向き、遠方では再びs_1に垂直でs_2、s_3を二当分する方向を向くことがわかる。中間のリング状領域で数値シュミレーションの結果[13)]と合致する。

7. 結び

乱流の中では大規模渦はランダムな方向を向きその中で安定した構造をもつ小規模渦が存在すると仮定しその周りのひずみ速度と渦度の関係を運動学的に調べた。その結果は

（１）小規模渦が面状の場合、渦度の強度ω_zが直接ひずみテンソルの主軸の方角（ひずみ速度ベクトル）に関係しているため、中心付近の渦の強い領域では渦度は第２ひずみ速度ベクトルの向きを向き、外側の渦の弱い領域では第１ひずみ速度ベクトルの向きを向く。

（２）小規模渦が管状の場合、渦度の強度ではなく、$\chi(r)$がひずみ速度ベクトルに強く関係しているため、渦度の中心を取り囲むリング状領域で渦度は第２ひずみ速度ベクトルの向きを向き、リング状領域の内側と外側の領域で第１ひずみ速度ベクトルの向きを向く。

（３）小規模渦が螺旋状の場合、渦度とひずみ速度ベクトルの関係は渦度の中心付近やそれに隣接したリング状領域では管状の場合と類似しているがリング状領域の外側の領域では螺旋の程度に応じて複雑な変化を行う。

圧力勾配の方向は、渦度の方向と第２ひずみ速度ベクトルの方向が一致する領域では、小規模渦の形状に依らず（１）、（２）、（３）のどの場合でも渦度に垂直で第１、第３のひずみ速度ベクトルの方向をほぼ等分するような方向である。これは乱流の数値シュミレーションの結果を支持しているように思われる。

一様なひずみ速度の中の面状、管状、螺旋状の定常渦が誘導するひずみ速度とその定常渦の関係は、乱流中の小規模渦と周りのひずみ速度の状況を比較的良く表わしているように思える。もしそうだとすると、乱流の中の渦構造は初めに仮定したようにランダムな大規模渦の中に面状、管状または螺旋状の小規模渦がその規模の平均特性時間に比べてはるかに長い時間にわたってその形状を維持していると想像される。しかし、このような乱流中の幾何学的な渦構造を確かめるためにはその構造の下での乱流のエネルギー・スペクトルなど他の側面からの研究による傍証も必要だろう。

＜参考文献＞

1) E.D.Sigga, " Numerical study of small-scale intermittency in three-dimensinal turbulence." J.Fluid Mech. **107** (1981), 375-406.

2) R.Kerr, "Higher-order delivative correlations and the alignment of small-scall structures in isotropic numerical turbulence." J.Fluid Mech. **153** (1985), 31-58.

3) W.T.Ashurst, A.R.Kerstein, R.M.Kerr & C.H.Gibson, "Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier-Stokes turbulence." Phys.Fluid **30** (1987), 2343-2353.

4) A.Vincent & M.Meneguzzi, "The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence." J.Fluid Mech. **225** (1991), 1-20 .

5) K.Yamamoto & I.Hosokawa, "A decaying isotropic turbulence pursued by the spectral methods." J,Phys.Soc.Jpn. **57** (1988), 1532-1535.

6) Z.S.She, E.Jackson & S.A.Orszag, "Intermittent vortex structure in hmogeneous isotropic turbulence." Nature **344** (1990), 226-228.

7) T.Dracos, M.Kholmyansky, E.Kit & A.Tsinober, "Some experimental results on velocity-velocity gradients measurements in turbulent grid flows." "*Topological Fluid Mechanics*." (ed. H.K.Moffatt & A.Tsinober), 564. Camb. Univ. Press.

8) P.Vieillefosse, "Local interaction between vorticity and sher in a perfect incompressible fluid." J.Phys. **43** (1982), 837-842.

9) Z.S.She, E.Jackson & S.A.Orszag, "Structure and dynamics of hompgeneous turbulence: models and simulations." Proc.R.Soc.London, **A433** (1991), 101-124.

10) J.Jimenez, " Kinematic alignment effects in turbulent flows." Phys.Fluids **A4**(1992), 652- 654.

11) T.Kanbe, "A class of exact solutions of the Navier-Stokes equation." Fluid.Dyn.Res. **1** (1986), 21-31

12) 神戸勉、" Navier-Stokes 方程式のある厳密解（３次元）" ながれ **2** (1983) 78-87.

13) W.T.Ashurst, J.Y.Chen, M.M.Rogers, " Pressure gradient alignment.with strain rate and scalar gradiernt in simulated Navier-Stokes turbulence." Phys.Fluids **30**(1987), 3293-3294.

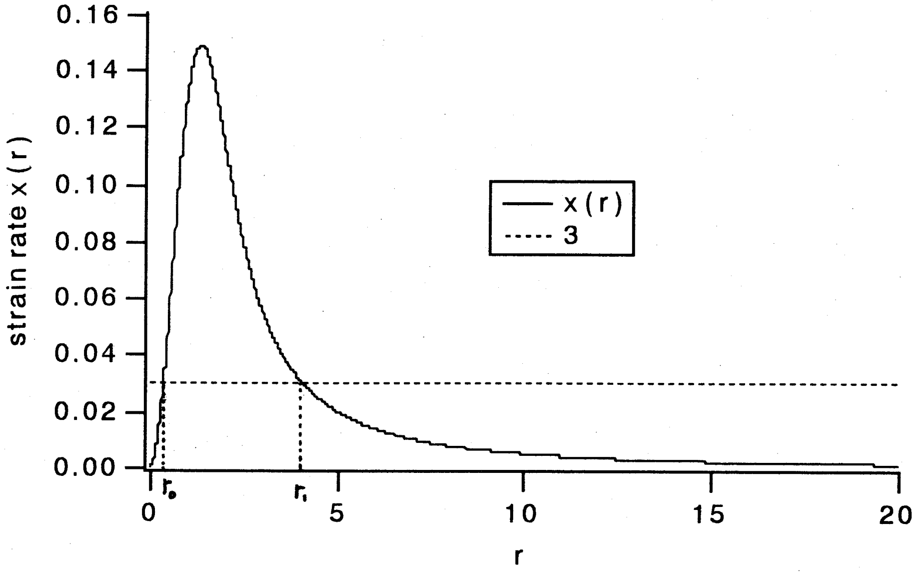

図　1　[σ/ω_0=0.02]

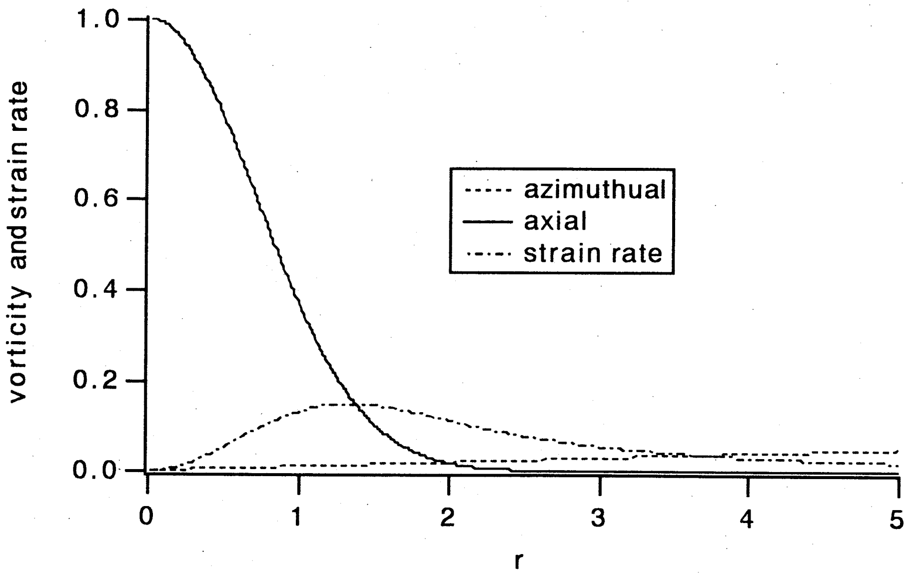

図　2　[σ/ω_0=0.02, $(2\nu/\sigma)^{1/2}g/\omega_0$=0.01]

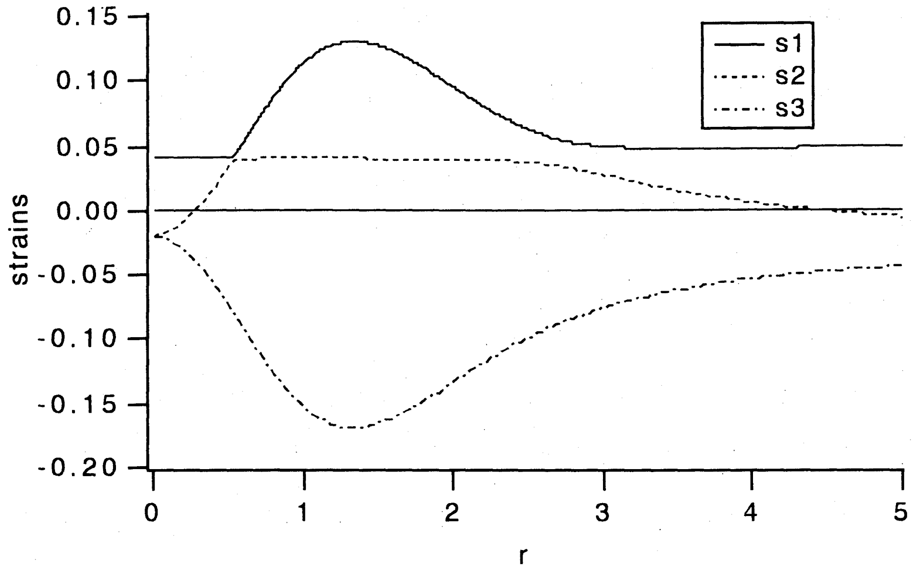

図　3　[σ/ω_0=0.02, $(2\nu/\sigma)^{1/2}g/\omega_0$=0.01]