数理解析研究所講究録
第873巻 1994年 165-176

非線形摩擦項を持つ波動方程式のエネルギー減衰と解の漸近挙動

東京都立大 理学部 望月 清 (Kiyoshi Mochizuki)
東京外大 留学生日本語教育センター
甕 隆博 (Takahiro Motai)

§1 序と結果

次の初期値問題の解のエネルギーについて考察する。

$$(1.1)\quad \begin{cases} w_{tt}(x,t)-\Delta w(x,t)+\lambda w(x,t)+b(x,t)|w_t(x,t)|^{\rho-1}w_t(x,t)=0 \\ w(x,0)=w_1(x)\ ,\quad w_t(x,0)=w_2(x) \qquad (x,t)\in \mathbb{R}^N\times(0,\infty) \end{cases}$$

ここで $\lambda\geqq 0$ 、$b(x,t)\geqq 0$ 、$\rho\geqq 1$ とする。エネルギーノルムを次で与える。

$$\left\|\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}\right\|_E^2=\frac{1}{2}\left\{\|w_2\|_{L^2}^2+\|\nabla w_1\|_{L^2}^2+\lambda\|w_1\|_{L^2}^2\right\}$$

特に $\left\|\begin{pmatrix} w(t)\\ w_t(t)\end{pmatrix}\right\|_E$ の場合は $\|w(t)\|_E$ とも書く。この方程式の解について形式的には次のエネルギー等式が成り立つ。

$$(1.2)\quad \|w(t)\|_E^2+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}b(x,\tau)|w_t(x,\tau)|^{\rho+1}dx\,d\tau=\|w(0)\|_E^2 \qquad (0\leqq t<\infty)$$

$b(x,t)\geqq 0$ なので $\|w(t)\|_E^2$ は減少する。そこで、その減少の様子と $b(x,t)$ と ρ の関係を調べてみよう。この問題について以

下のことが知られている。

エネルギー減衰

次の条件下でエネルギーは減衰する。

・Matsumura [3]

$\lambda=0$、$\rho=1$、$N \geqq 1$。$b_1>0$、$b_2>0$ が存在して

$b_1(1+|x|+t)^{-1} \leqq b(x,t) \leqq b_2$ かつ $b_t(x,t) \leqq 0$

・Nakao [11]

$\lambda>0$, $b(x,t) \equiv 1$、$N \geqq 1$、$1<\rho \leqq 1+\frac{2}{N}$

エネルギー非減衰

次の条件下でエネルギーは減衰しない。

・Mochizuki [4、5、6]

$\lambda=0$、$N \geqq 2$、$b_3>0$ が存在して

$0 \leqq b(x,t) \leqq b_3(1+|x|)^{-\delta}$ $(0 \leqq \delta \leqq 1)$ かつ $\rho > 1+\frac{2(1-\delta)}{N-1}$

または

$0 \leqq b(x,t) \leqq b_3(1+|x|)^{-\delta}$ $(\delta>1)$ かつ $\rho=1$

・Motai [10]

$\lambda>0$、$b(x,t) \equiv 1$、$\rho > 1+\frac{2}{N}$

また、エネルギーが非減衰の場合の解の漸近挙動については Mochizuki [5] と Motai [10] で考察されている。これ

らの結果から、特に $\lambda=0$ で非線形の摩擦項の場合の減衰の結果が何もないことがわかる。そこで、それに対する結果を中心に非減衰、漸近性の結果を報告する。

解の存在定理を述べるために、ソボレフノルムとして次を定義する。

$$\|u\|_{H_p^{k,s}} = \|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s(1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u}(\xi))\|_{L^p}$$

ここで特に $p=2$ のときは p を、$s=0$ のときは s を省略する。次の存在定理が成り立つ。

<u>定理1</u>（存在）

$\lambda \geqq 0$、$N \geqq 1$ とする。$b(x,t)$ は、正定数 C が存在して

$$|b_t(x,t)| + |\nabla b(x,t)| \leqq C b(x,t)$$

を満たし，$\rho>1$ とする。このとき初期値 $(w_1(x), w_2(x)) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2\rho})$ に対し、次を満たす解が一意に存在する。

$\lambda=0$ ならば $w(t) \in L^\infty((0,\infty); H^{0,2} \cap H^{0,1}) \cap C([0,\infty); H^1) \cap C^1([0,\infty); L^2)$、

$\lambda>0$ ならば $w(t) \in L^\infty((0,\infty); H^2) \cap C([0,\infty); H^1) \cap C^1([0,\infty); L^2)$、

かつ $w_t(t) \in L^\infty((0,\infty); H^1)$

$$b(x,t)|w_t(t)|^{\rho-1} w_t(t) \in L^{\frac{\rho+1}{\rho}}((0,\infty); H^1_{\frac{\rho+1}{\rho}}) \cap L^\infty((0,\infty); L^2).$$

さらに、ほとんどいたるところ t に関する2階微分が存在し

$$w_{tt}(t) \in L^\infty((0,\infty);L^2)$$

かつ、(1.1) を L^2 の意味で満たす。

これ以後(1.1)の解とは定理1で存在が証明された解とする。減衰の結果を述べるために重み付きエネルギーを次で定義する。

$$(1.3)\quad \|w(t)\|_{E_\varphi}^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\varphi(r+t)\{|w_t(x,t)|^2+|\nabla w(x,t)|^2 + \lambda|w(x,t)|^2\} - \varphi''(r+t)|w(x,t)|^2\Big]dx$$

ここで $r=|x|$ で、φ として

$$(1.4)\qquad \varphi(s) = \{\log(a+s)\}^\mu \qquad (\mu>0)$$

または

$$(1.5)\qquad \varphi(s) = (a+s)^\nu \qquad (0<\nu<1)$$

を考え、a は μ と ν に応じて決めるものとする。

定理2(減衰)

(i) $\lambda \geqq 0$、$N \geqq 1$ とする。$0 \leqq \delta < 1$、$b_1>0$、$b_2>0$ に対し、ρ と $b(x,t)$ は

$$(1.6)\quad b_1(1+|x|+t)^{-\delta} \leqq b(x,t) \leqq b_2 \quad \text{かつ} \quad 1<\rho \leqq 1+\frac{2(1-\delta)}{N}$$

を満たすとする。さらに $\lambda=0$ の場合 $b_t(x,t) \leqq 0$ と仮定する。$\varphi(\cdot)$ は (1.4)で与えられたものとし、μ は

(1.7) $$0 < \mu < \frac{2}{\rho-1}$$

を満たす。このとき、初期値 $(w_1, w_2) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2\rho})$ が $\|w(0)\|_{E_\varphi} < \infty$ を満たすとき、定数 $K_1 > 0$ が存在して

(1.8) $$\|w(t)\|_E^2 \leqq K_1 \{\log(a+t)\}^{-\mu}$$

が成り立つ。

(ii) $\lambda > 0$、 $N \geqq 1$ とする。$0 \leqq \delta < 1$、 $b_1 > 0$、 $b_2 > 0$ に対し、ρ と $b(x,t)$ は

(1.9) $$b_1(1+|x|+t)^{-\delta} \leqq b(x,t) \leqq b_2 \quad かつ \quad 1 < \rho < 1 + \frac{2(1-\delta)}{N}$$

を満たすとする。$\varphi(\cdot)$ は (1.5) で与えられたものとし、ν は

(1.10) $$0 < \nu < \frac{2(1-\delta)}{\rho-1} - N \quad かつ \quad \nu \leqq 1$$

を満たす。このとき、初期値 $(w_1, w_2) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2\rho})$ が $\|w(0)\|_{E_\varphi} < \infty$ ならば、定数 $K_2 > 0$ が存在して

(1.11) $$\|w(t)\|_E^2 \leqq K_2 (a+t)^{-\nu}$$

が成り立つ。

次に非減衰と漸近挙動の結果を述べるために (1.1) に対する自由な系の方程式

(1.12) $$\begin{cases} w_{0tt}(x,t) - \Delta w_0(x,t) + \lambda w_0(x,t) = 0 \\ w_0(x,0) = w_1(x)、\quad w_{0t}(x,0) = w_2(x) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \end{cases}$$

を考える。初期値 (w_1, w_2) に対し、この方程式の解を $U_0(t)$ で

$$U_0(t)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0(t) \\ w_{0t}(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

と対応させる。よく知られているように、この作用素はエネルギーノルムから定まる関数空間上の１パラメータユニタリー群となる。

定理３（非減衰）

$0 \leqq \delta \leqq 1$ と正定数 $b_3 > 0$ に対し、ρ と $b(x,t)$ は次を満たすとする。

(1.13)　$\lambda = 0$、$N \geqq 2$、$0 \leqq b(x,t) \leqq b_3(1+|x|)^{-\delta}$、$\rho > 1 + \frac{2(1-\delta)}{N-1}$

(1.14)　$\lambda > 0$、$N \geqq 1$、$0 \leqq b(x,t) \leqq b_3(1+|x|)^{-\delta}$、$\rho > 1 + \frac{2(1-\delta)}{N}$

さらに、$(w_1, w_2) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2\rho})$ に対する自由な系(1.12)の解 $w_0(t)$ が

(1.15)　$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} b(x,\tau) |w_{0t}(x,\tau)|^{\rho+1} dx\, d\tau < \infty$$

を満たすとする。$\varepsilon > 0$ をこれに対して

(1.16)　$$\varepsilon^{\rho-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} b(x,\tau) |w_{0t}(x,\tau)|^{\rho+1} dx\, d\tau < 2^{\rho+1} \|w_0(0)\|_E^2$$

を満たすように取る。このとき、初期値 $(\varepsilon w_1, \varepsilon w_2)$ に対する (1.1) の解のエネルギーは減衰しない。

定理４（漸近挙動）

$b(x,t) \equiv 1$ とする。

(i) $\lambda = 0$、$N \geqq 2$ とする。$1 + \frac{4}{N-1} \leqq \rho < \rho_N$ に対し $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ とし、$1 + \frac{2}{N-1} < \rho \leqq 1 + \frac{4}{N-1}$ に対し、

$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho+1}\right)$ とする。ここで $\rho_N=\infty\ (1\leqq N\leqq 6)$ 、$N/(N-6)\ (N\geqq 7)$ である。このとき、(1.1)の解の組 $(w(t),\ w_t(t))$ に対し $(w_1^+,\ w_2^+)\in(H^{0,2}\cap H^{0,1})\times H^1$ が一意に存在し

$$(1.17)\qquad \left\| U_0(-t)\begin{pmatrix} w(t)\\ w_t(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} w_1^+\\ w_2^+\end{pmatrix}\right\|_{H_p^{0,1}\times L^p}\to 0 \quad (\text{as } t\to\infty)$$

を満たす。

(ii) $\lambda>0$、$N\geqq 1$ とする。$1+\frac{4}{N}\leqq\rho<\rho_N$ に対し $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$、$1+\frac{2}{N}<\rho\leqq 1+\frac{4}{N}$ に対し $\frac{1}{p}=\frac{1}{\rho+1}$ とする。このとき、(1.1)の解の組 $(w(t),\ w_t(t))$ に対し $(w_1^+,\ w_2^+)\in H^2\times H^1$ が一意に存在し

$$(1.18)\qquad \left\| U_0(-t)\begin{pmatrix} w(t)\\ w_t(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} w_1^+\\ w_2^+\end{pmatrix}\right\|_{H_p^1\times L^p}\to 0 \quad (\text{as } t\to\infty)$$

が成り立つ。

[注 意]

(1) $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ のとき、$H_p^{0,1}\times L^p$、$H_p^1\times L^p$ のノルムはエネルギーノルムと一致する。

(2) この講演後 (i) の結果は次のように拡張できることがわかった。

$\lambda=0$、$N\geqq 3$ とする。$0<\delta\leqq 1$、$b_3>0$ に対し、$0\leqq b(x,t)\leqq b_3(1+|x|)^{-\delta}$ とする。$1+\frac{4(1-\delta)}{N-1}<\rho<\rho_N$ に対し $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$、$1+\frac{2(1-\delta)}{N-1}<\rho\leqq 1+\frac{4}{N-1}$ に対し $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\eta_\rho$

とする。ここで $\eta_\rho > 0$ で，ρ に依存した定数である。このとき(i)の結論が成り立つ。

以上が今回の主要な結果である。定理1に関連して、弱解の存在定理は摩擦項の単調性により、既に Lions－Strauss[2]、Strauss[12]等で証明されている。ここでは、特に定理4の結果を得るために強解の存在定理の形で述べた。

定理2と定理3を比べると $\lambda=0$ の場合

$$1+\frac{2(1-\delta)}{N} < \rho \leqq 1+\frac{2(1-\delta)}{N-1}$$

に対して、減衰・非減衰が明らかになっていないことがわかる。$\lambda>0$ の場合の結果から、この条件下ではエネルギー減衰が起こると予想されるが、未解決の問題である。

定理3では(1.15)を満たす初期値が存在することが重要となる。実は(1.13)と(1.14)はそれを保証するための条件である。(1.15)は自由な系の解の L^∞ 評価を使うことにより示すことができる。$\lambda=0$ の場合は Klainerman[1] の一般化されたソボレフの不等式を、$\lambda>0$ の場合は $L^\infty-L^1$ 評価を使えばよい。詳しい証明は Mochizuki－Motai[8] を参照してほしい。

定理4の $\lambda>0$ で $1+\frac{4}{N} \leqq \rho < \rho_N$ の場合は既に Motai[10] で示されている。また、漸近性を調べるための抽象的枠組も

Mochizuki‐Motai[7]で報告されている。定理4の証明はMochizuki‐Motai[9]で与える予定である。

また、ここで報告された結果を与える方法は他の摩擦項にも適用できる。例えば$(V_\gamma * |w_t|^2)w_t$ （$V_\gamma = |x|^{-\gamma}$ $(0<\gamma<N)$ $*$はxに関する合成積）に対しても同様の結果を得ることができる。この場合についてもMochizuki‐Motai[8、9]を参照してほしい。

次の節では定理2の証明の概略を与える。

§2 定理2の証明の概略

$\varphi(\cdot)$は(1.4)または(1.5)で与えられたものとする。このとき次を得る。

補題1

初期値$(w_1, w_2) \in H^2 \times (H^1 \cap L^{2\rho})$を$\|w(0)\|_{E\varphi} < \infty$を満たすように選び、対応する(1.1)の解を$w(t)$とする。このとき(1.4)または(1.5)の$a$を十分大きく取れば、定数$k>1$が存在して、次の不等式がなりたつ。

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & \frac{k-1}{k}\|w(t)\|^2_{E\varphi} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(r+\tau) b(x,\tau) |w_t(x,\tau)|^{\rho+1} dx d\tau \\
& \leqq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \varphi'(r+\tau) \{ 2|w_t(x,\tau)|^2 + b(x,\tau)|w_t(x,\tau)|^{\rho} |w(x,\tau)| \} dx d\tau \\
& \qquad + \frac{k+1}{k}\|w(0)\|^2_{E\varphi} \qquad (0 \leqq t < \infty)
\end{aligned}
$$

証明の概略

$\{\varphi(r+t)w(x,t)\}_t$ を (1.1) の両辺にかけ、計算すると次を得る。

$$(2.2)\qquad X_t + \nabla\cdot Y + Z = 0$$

$$X = \frac{1}{2}\varphi\{w_t^2 + |\nabla w|^2 + \lambda w^2\} - \frac{1}{2}\varphi'' w^2 + \varphi' w_t w$$

$$Y = -\varphi \nabla w w_t - \varphi' \nabla w w + \frac{x}{2r}\varphi'' w^2$$

$$Z = \varphi b(x,t)|w_t|^{p+1} + \varphi' b(x,t)|w_t|^{p-1} w_t w + \frac{1}{2}\varphi'\{|\nabla w|^2 - 3w_t^2 + 2w_r w_t\} + \frac{1}{2}\{\lambda\varphi' - \frac{N-1}{r}\varphi''\}w^2$$

また、φ の a を十分大きく取れば、定数 $k>1$ が存在して

$$(2.3)\qquad k^2\varphi'(s)^2 \leqq \lambda\varphi(s) - \varphi(s)\varphi''(s)$$

が成り立つ。これより

$$|\varphi' w_t w| \leqq \frac{1}{2k}\varphi\{w_t^2 + \lambda w^2\} - \frac{1}{2k}\varphi'' w^2$$

を得る。また、$\varphi'(s)>0$、$\varphi''(s)\leqq 0$ に注意すれば (2.2) を $[0,T]\times B(R)$ ($B(R)=\{x\in\mathbb{R}^N;\ |x|<R\}$) 上で積分し、$R\to\infty$ とすれば (2.1) を得る。■

そこで、定数 $M_1>0$、$M_2>0$ が存在して

$$(2.4)\qquad \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} 2\varphi' w_t^2\,dx\,d\tau \leqq M_1\left(\int_0^t\int \varphi b(x,\tau)|w_t|^{p+1}dx\,d\tau\right)^{\frac{2}{p+1}}$$

$$(2.5)\qquad \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} \varphi' b(x,\tau)|w_t|^{p}|w|\,dx\,d\tau \leqq M_2\left(\int_0^t\int \varphi b(x,\tau)|w_t|^{p+1}dx\,d\tau\right)^{\frac{p}{p+1}}$$

を示すことができれば、この補題より定理3が証明できる。そこで、ここでは定理3(i)の証明の一部である(2.4)を示す。(2.5)についても同様に示すことができる。詳細はMochizuki-Motai [8] を参照してほしい。

(2.4)の証明

ヘルダーの不等式により

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\varphi' w_t^2\,dx\,d\tau \leqq \left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\, b(x,\tau)|w_t|^{p+1}dx\,d\tau\right)^{\frac{2}{p+1}} \times \left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi b)^{-\frac{2}{p-1}}(\varphi')^{\frac{p+1}{p-1}}dx\,d\tau\right)^{\frac{p-1}{p+1}}$$

を得る。そこで 右辺の第2項を M_1 とおけば、$M_1<\infty$ を示せば(2.4)を証明できたことになる。(1.6)と(1.4)により

$$(\varphi b)^{-\frac{2}{p-1}}(\varphi')^{\frac{p+1}{p-1}} \leqq C\{\log(a+r+t)\}^{\mu-\frac{p+1}{p-1}}(a+r+t)^{-1-\frac{2(1-\delta)}{p-1}}$$

となる。そこで (1.6)と(1.7)に注意すれば

$$-\frac{2(1-\delta)}{(p-1)} \leqq -N\ , \qquad \mu-\frac{p+1}{p-1}<-1$$

なので

$$M_1 \leqq C\int_0^\infty\{\log(a+\tau)\}^{\mu-\frac{p+1}{p-1}}d\tau\int_0^\infty(a+r+\tau)^{-2}dr$$

$$\leqq C\int_0^\infty\{\log(a+\tau)\}^{\mu-\frac{p+1}{p-1}}(a+\tau)^{-1}d\tau < \infty$$

となり、(2.4)が示せた。 ∎

参考文献

[1] S. Klainerman, Comm. Pure Appl. Math., 40 (1987), 111–116.

[2] J.L. Lions, W.A. Strauss, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 43–96.

[3] A. Matsumura, Proc. Japan Acad., 53 (1977), 232–236.

[4] K. Mochizuki, Lecture Notes in Physics 39, Springer (1975), 486–490.

[5] ________, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 12 (1976), 383–390.

[6] ________, <u>波動方程式の散乱理論</u>、紀伊國屋書店 (1984).

[7] K. Mochizuk, T. Motai, 数理解析研究所講究録 795 (1992), 122–152.

[8] ________, Tokyo Metropolitan University Mathematics Preprint Series 16 (1993).

[9] ________, In preparation.

[10] T. Motai, Tsukuba J. Math., 15 (1991), 151–160.

[11] M. Nakao, Funkcialaj Ekvacioj, 26 (1983), 237–250.

[12] W. A. Strauss, <u>The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations</u>, Brasil Inst. Math. Pure e Aplicada. 1969.