数理解析研究所講究録
第 874 巻 1994 年 20-62

Boson-Fermion Fock 空間上の無限次元解析

北海道大学理学部数学教室　新井朝雄 (Asao Arai)

目次

1 はじめに
2 Fock 空間
　2.1 Boson Fock 空間
　2.2 Fermion Fock 空間
3 De Rham 型作用素，ラプラシアン，de Rham-Hodge-Kodaira 型分解
4 Dirac-Kähler 型作用素
5 摂動
6 汎関数積分表示による指数定理
7 超対称的場の量子論への応用
付録 超対称的量子論について
文献

1 はじめに

この論文では，筆者が[7,11,13,15]等で展開してきた新しい型の無限次元解析の概要について報告する．この解析は，一言でいえば，Boson-Fermion Fock 空間上の解析であり，有限次元多様体上の de Rham 理論や Dirac 型

作用素の理論のひとつの無限次元版の構築をめざすものである．筆者がとくに興味をもっている点のひとつは，有限次元解析における Atiyah-Singer 型の指数定理は無限次元解析においてはどのような形をとるか，という点である．Boson-Fermion Fock 空間上のあるクラスの Dirac 型作用素に対しては，汎関数積分（径路積分）表示による指数定理を確立することができた[7,13,15].

上述の研究には実は物理的な背景と動機づけがある．これを以下簡単に説明しておこう．よく知られているように，物質を構成する究極的な要素は“素粒子”とよばれる．素粒子は，粒子とはいっても，古典力学的な意味での粒子ではなく，“波動ー粒子の 2 重性”を有し，生成したり，消滅したりすることが可能である．このような，古典物理学ではとらえられない，素粒子の世界の法則を記述するためのひとつの理論として構想されたのが**場の量子論**であった．この理論では，各素粒子に付随する“量子場”なる概念を用いて，素粒子の諸々の特性が記述される．素粒子間の相互作用は量子場どうしの相互作用として表現される．

各素粒子は，ある内部自由度をもち，この自由度に関する“回転”の角運動量として“スピン”とよばれる特性量を担っている．スピンの値は整数 $(0,1,2,\cdots)$ または半整数 $(1/2,3/2,\cdots)$ のいずれかである．スピンが整数の素粒子は**ボソン** (boson)，半整数 $(1/2,3/2,\cdots)$ の素粒子は**フェルミオン** (fermion) とよばれる．ボソンとフェルミオンは互いに異なる性質をもち，このことは理論的にも異なる形式となって現われる．このため，場の量子論における種々の対称性を考察するにあたって，ボソンとフェルミオンを別々に取り扱うのが普通である．しかし，ボソンとフェルミオンを相互に関連づける対称性を考えることは可能であり，そのような対称性のひとつが**超対称性** (supersymmetry) である．超対称性をもつ場の量子論，すなわち，**超対称的場の量子論** (supersymmetric quantum field theory, SSQFT) の構築可能性は，1974 年，Wess と Zumino によって，はじめて示された [68,69]．超対称性は，ひらたく言えば，ボソンとフェルミオンを対等に扱う

対称性である[1]．さらに，SSQFT のいくつかのモデルにおいては，場の量子論に特有の“発散の困難”が軽減するという好ましい事実がある[2]．こうした理由から，超対称性は，素粒子間に働く4種の力（重力，電磁気力、強い力、弱い力）を統一する理論の建設において，重要な役割を演じるはずである，という信念がゆきわたった．いま言及した，Wess と Zumino の仕事以来，SSQFT は，物理理論として盛んに研究され，超重力理論や超弦理論など，素粒子の統一理論の試みへと発展していった[53,67,33].

SSQFT は無限自由度の量子論であるが，これをある種の仕方により単純化すると有限自由度の量子力学が得られる．この量子力学を**超対称的量子力学** (supersymmetric quantum mechanics, SSQM) とよぶ[70–72,29,1]. SSQM の一特に関数解析学（作用素論）の観点からの一数学的研究は，1980 年代なかばから開始され，超対称性に付随する興味ある数学的側面が明らかにされた[2–6,8–10, 21,26–28,34–37,42,46]（[30]も参照）．SSQFT に対する，構成的場の量子論[31,32,38]の観点からの研究は Jaffe ら[47–51]によって展開された．筆者は，無限次元解析学の立場から，SSQFT の数学的解析を行い，Boson-Fermion Fock 空間上の解析へと導かれた[7,8,11–13,15–17,20,22,23]. したがって，筆者の理論は具体的実例として SSQFT のいくつかのモデルを含むものであり，それにとどまらず，これらのモデルに対して数学的な観点からの統一的な認識をもたらすのである．

---

[1] 代数的にいうならば，超対称性の生成子は，超 Lie 代数をなす[33,67].

[2] “発散の困難”というのは，場の量子論において，摂動論とよばれる，ある種の“近似的”計算法で物理量を計算すると無限大に発散する量があらわれて意味のある値が得られないことをいう．この困難は，朝永，Schwinger，Feynman らによる“くりこみ理論”(renormalization theory) の創始により，回避され，これによって，物理理論としての場の量子論は成功を収めた．しかし，4次元時空上の相対論的場の量子論に関するくりこみ理論の非摂動論的で数学的に厳密な基礎づけはなおもできていない．この問題は4次元時空における相対論的場の量子論のモデルの数学的存在を証明する問題ーこれも未解決の問題ーと深く関連している．こうした意味も含めて，“無限大のくりこみ”を必要としない場の量子論が望まれる．SSQFT はそうした理論のひとつの候補でもある．場の量子論の数学的理論の現状に関しては[24,31,32,38,43]等を参照．

2　Fock 空間

この節では，Fock 空間の理論の基本的部分を復習する．

2.1 Boson Fock 空間

$\mathcal{H}$を可分な実 Hilbert 空間とし, $\mathcal{H}$によって指定される Gauss 確率過程を $\{\phi(f)|f \in \mathcal{H}\}$ とする．すなわち, $\phi(f)$ は, ある確率空間$< E, \mu >$上の確率変数（実数値可測関数）で, $\phi(af+bg) = a\phi(f)+b\phi(g), a, b \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{H}$ をみたし，その特性汎関数が

$$\int_E e^{i\phi(f)} d\mu = e^{-\|f\|^2_{\mathcal{H}}/2}, \quad f \in \mathcal{H}$$

となるものである[31,38,61,63]．Hilbert 空間 $L^2(E, d\mu)$ を $\mathcal{H}$上の **Boson Fock 空間**という[3]．

Boson Fock 空間上の解析において基本となるいくつかの作用素を導入しよう．$\mathbb{P}_n$を $\mathbb{R}^n$上の複素数値多項式の全体からなる集合とする．$\mathcal{H}_c$を $\mathcal{H}$ の複素化とし，Tを $\mathcal{H}_c$に定義域 $D(T)$ をもつ作用素としよう．このとき，$L^2(E, d\mu)$ の部分空間

$$\mathcal{P}_T = \mathcal{L}\{P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))|P \in \mathbb{P}_n, f_j \in D(T) \cap \mathcal{H}, n \geq 0, j = 1, \cdots, n\}$$

が定義される．ここで，$\mathcal{L}\{\cdots\}$ は集合 $\{\cdots\}$ の元が代数的に生成する部分空間を表わす．もし， $D(T) \cap \mathcal{H}$が $\mathcal{H}$で稠密ならば，$\mathcal{P}_T$は $L^2(E, d\mu)$ で稠密である．$T = I$に対して $\mathcal{P}_I = \mathcal{P}$ とおく．

---

[3] 確率空間$< E, \mu >$の Borel 集合体としては, $\{\phi(f)|f \in \mathcal{H}\}$ によって生成されるものをとる．ここであたえる Boson Fock 空間の記述は，**Q 空間表現**とよばれるものである[61,58]．Hilbert 空間の対称テンソル積を用いる, Boson Fock 空間の通常の定義については[31,57,63]等を参照．Eのモデルとしては，無限次元の局所凸線形位相空間を念頭においている．場の量子論のモデルの構成においては，Eとして，たとえば，$\mathbb{R}^n$上の実の緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^n)$ がとられる（7 節を参照）．

Hilbert 空間 $\mathcal{M}$ に値をとる，$< E, \mu >$上の 2 乗可積分関数からなる Hilbert 空間を $L^2(E, d\mu; \mathcal{M})$ と記す．この空間は，$L^2(E, d\mu) \otimes \mathcal{M}$ と同一視される． 二つのベクトル空間 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$の代数的テンソル積を $\mathcal{V}\hat{\otimes}\mathcal{W}$と書く．

$\mathcal{P}$を定義域とする，$L^2(E, d\mu)$ から $L^2(E, d\mu; \mathcal{H}_c)$ への "勾配作用素"∇ を

$$\nabla P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j P)(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) f_j,$$
$$f_j \in \mathcal{H}, j = 1, \cdots, n,$$

によって定義する．$P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$ という形のベクトルの有限一次結合に対しては，線形性により拡張する．記号 ∇ を用いると，測度μに関する部分積分公式は

$$\int_E (f, \nabla\Psi)_{\mathcal{H}_c} \Phi d\mu = -\int_E \Psi(f, \nabla\Phi)_{\mathcal{H}_c} d\mu + \int_E \phi(f)\Psi\Phi d\mu,$$
$$\Psi, \Phi \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{H}, \tag{2.1}$$

と書くことができる[4].

(2.1) を用いると，∇ は，$L^2(E, d\mu)$ から $L^2(E, d\mu; \mathcal{H}_c)$ への作用素として well-defined であることが示される．すなわち，$\Psi, \Phi \in \mathcal{P}$が$\Psi = \Phi$ a.e. をみたすならば，$\nabla\Psi = \nabla\Phi$ a.e. が成り立つ．さらに，作用素 ∇ から，各 $f \in \mathcal{H}_c$に対して, $\mathcal{P}$を定義域とする，$L^2(E, d\mu)$ における作用素$\tilde{\nabla}_f$("f方向への微分") が

$$\tilde{\nabla}_f \Psi = (f, \nabla\Psi)_{\mathcal{H}_c}$$

によって定義される．

$J_{\mathcal{H}}$を $\mathcal{H}_c$上の自然な共役化作用素 (conjugation) とし（すなわち，$f = f_1 + if_2, f_1, f_2 \in \mathcal{H}$に対して，$J_{\mathcal{H}} f := f_1 - if_2$），

$$\bar{f} = J_{\mathcal{H}} f, \quad f \in \mathcal{H}_c,$$

[4] この論文では，複素 Hilbert 空間 $\mathcal{X}$の内積 $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )_{\mathcal{X}}$ は，第 2 変数について線形であるとする．

とおく．(2.1) を用いて，つぎの事実が証明される．

補題 2.1　各 $f \in \mathcal{H}_c$に対して，$\widetilde{\nabla}_f, \nabla$ は可閉であり，すべての$\Psi \in \mathcal{P}$ と $f \in \mathcal{H}_c$に対して

$$
\begin{aligned}
&D(\widetilde{\nabla}_f^*) \supset \mathcal{P}, \quad D(\nabla^*) \supset \mathcal{P}\widehat{\otimes}\mathcal{H}_c, \\
&\widetilde{\nabla}_f^*\Psi = \nabla^*(\Psi f) = -\widetilde{\nabla}_{\bar{f}}\Psi + \phi(f)\Psi
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

以下，$\nabla, \widetilde{\nabla}_f$の閉包もそれぞれ，同じ記号で書くことにする．

確率変数$\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n), f_j \in \mathcal{H}, j = 1, \cdots, n$ に対して，これらの **Wick 積**: $\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)$: がつぎの漸化式によって定義される：

$$
\begin{aligned}
:\phi(f_1): &= \phi(f_1), \\
:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n): &= \phi(f_1):\phi(f_2)\cdots\phi(f_n): \\
&\quad - \sum_{j=2}^{n}(f_1, f_j)_{\mathcal{H}} :\phi(f_2)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n):, \ n \geq 2.
\end{aligned}
$$

ここで，$\widehat{\phi(f_j)}$は$\phi(f_j)$ を除くことを意味する．このとき，$n \neq m$ ならば，任意の $f_j, g_k \in \mathcal{H}, j = 1, \cdots, n, k = 1, \cdots, m$ に対して，$:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):$と $:\phi(g_1)\cdots\phi(g_m):$は，$L^2(E, d\mu)$ のベクトルとして直交する．さらに，$\Gamma_n(\mathcal{H})$ を: $\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):, f_j \in \mathcal{H}, j = 1, \cdots, n$ によって生成される，$L^2(E, d\mu)$ の閉部分空間とすれば

$$
L^2(E, d\mu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(\mathcal{H})
$$

が成り立つ．ただし，$\Gamma_0(\mathcal{H}) = \mathbb{C}$ は定数関数の空間である．閉部分空間 $\Gamma_n(\mathcal{H})$ は，物理的には，n 個のボソンからなる系の状態空間を表わす．

Boson Fock 空間上の作用素の重要なクラスのひとつとして，**第 2 量子化作用素**とよばれるものがある．A を $\mathcal{H}$における任意の自己共役作用素とする． このとき，$L^2(E, d\mu)$ における自己共役作用素 $d\Gamma_b(A)$ で，各$\Gamma_n(\mathcal{H})$ によって約され，$\Gamma_n(\mathcal{H})$ における部分 $d\Gamma_b^{(n)}(A) := d\Gamma_b(A) \upharpoonright \Gamma_n(\mathcal{H})$ がつぎの形になるものがただひとつ存在する：

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_b^{(0)}(A) &= 0, \\
d\Gamma_b^{(n)}(A) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : &:= \sum_{j=1}^{n} : \phi(f_1) \cdots \phi(Af_j) \cdots \phi(f_n) :, \ n \geq 1, \\
& \qquad f_j \in D(A), j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

作用素 $d\Gamma_b(A)$ を A の**第 2 量子化**とよぶ[5]．A が下に有界であれば，$d\Gamma_b(A)$ もそうであり，この逆も成り立つ．

第 2 量子化作用素は，E上のある種の“ラプラシアン”とみなしうる．実際，$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間とし，Tを $\mathcal{H}_c$から $\mathcal{M}$ への線形作用素で $D(T) \cap \mathcal{H}$ が $\mathcal{H}$で稠密であるようなものとすれば，$\mathcal{P}_T$を定義域とする作用素 $T\nabla$: $L^2(E, d\mu) \to L^2(E, d\mu; \mathcal{M})$ は可閉であり（その閉包も同じ記号 $T\nabla$ で表わす）

$$d\Gamma_b(T^*T) = (T\nabla)^*T\nabla$$

となることが証明される．

2.2 Fermion Fock 空間

$\mathcal{K}$を可分な実 Hilbert 空間とし，$\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)$ を $\mathcal{K}_c$の (Hilbert 空間としての) p 重反対称テンソル積とする ($\bigwedge^0(\mathcal{K}_c) := \mathbb{C}$)．ヒルベルト空間$\bigwedge^p(\mathcal{K}_c), p =$

[5]作用素 $d\Gamma_b(A)$ は，物理的には，1 個のボソンの状態の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_c$における物理量 A を，相互作用のない無限ボソン系へもちあげたものを表わす．A が 1 ボソンのハミルトニアンならば，$d\Gamma_b(A)$ は，対応する無限ボソン系の“自由”ハミルトニアンである．

$0, 1, 2, \cdots,$ の無限直和

$$\bigwedge(\mathcal{K}_c) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p(\mathcal{K}_c)$$

を $\mathcal{K}_c$上の **Fermion Fock** 空間という．任意の $u_j \in \mathcal{K}_c, j = 1, \cdots, p$ に対して，外積 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \in \bigwedge^p(\mathcal{K}_c)$ を

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)} = A_p(u_1 \otimes u_2 \cdots \otimes u_p)$$

によって定義する．ここで，$\mathfrak{S}_p$は p 次対称群，$\varepsilon(\sigma)$ は置換$\sigma \in \mathfrak{S}_p$の符号，$A_p$は反対称化作用素を表わす[6]: $A_p = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma)\sigma/p!$.

各 $u \in \mathcal{K}_c$に対して，$\bigwedge(\mathcal{K}_c)$ 上の有界線形作用素 $b(u)$ で

$$b(u)^* u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p = \sqrt{p+1}\, u \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, \quad u_j \in \mathcal{K}_c, \quad j = 1, \cdots, p,$$

をみたすものがただひとつ存在する．作用素 $b(u)$ を**フェルミオン消滅作用素**，$b(u)^*$をフェルミオン生成作用素という．これらの作用素に特徴的なことのひとつは，これらがつぎの正準反交換関係をみたすことである：

$$\{b(u), b(v)^*\} = (u, v)_{\mathcal{K}_c}, \quad \{b(u), b(v)\} = 0 = \{b(u)^*, b(v)^*\}, \quad u, v \in \mathcal{K}_c.$$

ここで，$\{A, B\} := AB + BA$．

Fermion Fock 空間においても第 2 量子化作用素が定義される．$\mathcal{K}_c$における任意の自己共役作用素 Bに対して，$\bigwedge(\mathcal{K}_c)$ における自己共役作用素 $d\Gamma_f(B)$ で，各$\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)$ によって約され，$\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)$ における部分 $d\Gamma_f^{(p)}(B)$ が

$$d\Gamma_f^{(0)}(B) = 0,$$

$$d\Gamma_f^{(p)}(B) = \sum_{j=1}^{p} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{j}{\breve{B}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I, \quad p \geq 1,$$

---

[6] A_pは，$\mathcal{K}_c$の p 重テンソル積$\otimes^p \mathcal{K}_c$上の射影作用素であり，$\bigwedge^p(\mathcal{K}_c) = A_p(\otimes^p \mathcal{K}_c)$（たとえば，[57, §II.4]を参照）．

によってあたえられるものがただひとつ存在する[57, §VIII.10]. この作用素 $d\Gamma_f(B)$ を Bの第２量子化という.

後の使用（５節）のために，ここで，フェルミオン消滅作用素，フェルミオン生成作用素からつくられる“２次の作用素”を導入しておく. $\mathcal{K}_c$上の Hilbert-Schmidt 作用素の全体を $\mathcal{I}_2(\mathcal{K}_c)$ で表わし，$K \in \mathcal{I}_2(\mathcal{K}_c)$ とする. このとき，$\mathcal{K}_c$の２つの正規直交系 $\{u_n\}_{n=1}^N, \{v_n\}_{n=1}^N$ ($N \le +\infty$) と，$\sum_{n=1}^N \lambda_n^2 < \infty$ をみたす正数列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ が存在して，Kは

$$K = \sum_{n=1}^N \lambda_n (u_n, \ \cdot \ )_{\mathcal{K}_c} v_n \tag{2.2}$$

と表わされる（$N = +\infty$ の場合，(2.2) の右辺は$\mathcal{I}_2(\mathcal{K}_c)$ のノルムで収束する[57, Theorem VI.17]）. このとき，$\bigwedge(\mathcal{K}_c)$ で稠密な部分空間

$$\bigwedge\nolimits_f(\mathcal{K}_c) = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(p)}\}_{p=0}^\infty \middle| \Psi^{(p)} \in A_p(\mathcal{K}_c \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \mathcal{K}_c), \text{有限個の } p \text{ を除いて} \Psi^{(p)} = 0 \right\}$$

を定義域として，つぎの作用素が定義される：

$$< b^*|K|b >= \sum_{n=1}^N \lambda_n b(v_n)^* b(u_n), \qquad < b|K|b >= \sum_{n=1}^N \lambda_n b(\bar{v}_n) b(u_n),$$
$$< b^*|K|b^* >= \sum_{n=1}^N \lambda_n b(v_n)^* b(\bar{u}_n)^*.$$

ここで，$N = +\infty$ の場合，右辺は$\bigwedge_f(\mathcal{K}_c)$ 上で強収束し，その極限は，Kを (2.2) のように表わす仕方にはよらない. これら三つの作用素の任意のひとつを表わすのに$< b^\#|K|b^\natural >$という記号を用いる. 作用素$< b^\#|K|b^\natural >$は

$$< b^\#|K|b^\natural >^* \supset < b^{\natural *}|K^*|b^{\# *} >$$

をみたす. したがって，とくに，$< b^\#|K|b^\natural >$は可閉である（閉包も同一記号で表わす）.

つぎの補題を証明するのは困難ではない.

補題 2.2 [15]　各$\psi \in \mathcal{K}_c \otimes \mathcal{K}_c$に対して,

$$(v, K_\psi u)_{\mathcal{K}_c} = (v \otimes \bar{u}, \psi)_{\mathcal{K}_c \otimes \mathcal{K}_c}, \quad u, v \in \mathcal{K}_c,$$

をみたす $K_\psi \in \mathcal{I}_2(\mathcal{K}_c)$ がただひとつ存在し,

$$||K_\psi||_2 = ||\psi||_{\mathcal{K}_c \otimes \mathcal{K}_c}$$

が成り立つ. ただし, $||\cdot||_2$は Hilbert-Schmidt ノルムを表わす. 逆に, 任意の $K \in \mathcal{I}_2(\mathcal{K}_c)$ に対して, $K = K_\psi$となる$\psi \in \mathcal{K}_c \otimes \mathcal{K}_c$がただひとつ存在する.

補題 2.2 によってあたえられる対応$\psi \to K_\psi$をΛによって表わす:

$$\Lambda(\psi) = K_\psi.$$

3　De Rham 型作用素, ラプラシアン, de Rham-Hodge-Kodaira 型分解

E上の$\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)$ 値関数は, 一般化された意味で, E上の p 形式のひとつのクラスであるとみなしうる. 特に Hilbert 空間

$$\bigwedge^p(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = L^2\left(E, d\mu; \bigwedge^p(\mathcal{K}_c)\right)$$

は, $< E, \mu >$上の 2 乗可積分な p 形式の空間とみることができる. この節では, 有限次元多様体上の形式の理論 (de Rham 理論) や指数理論の無限次元版を展開することを念頭において, Hilbert 空間の列 $\{\bigwedge^p(\mathcal{H}, \mathcal{K})\}_{p=0}^{\infty}$ に同伴する基本的な対象を導入する.

$S : \mathcal{H}_c \to \mathcal{K}_c$を稠密に定義された閉線形作用素で，$S^*S$が $\mathcal{H}$によって約されるものとする．この作用素に付随する部分空間 $\mathfrak{D}_{S,p} \subset \bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K})$ を

$$\mathfrak{D}_{S,p} = \mathcal{L}\left\{ P_n(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \middle| P_n \in \mathbb{P}_n, f_j \in D(S)\cap\mathcal{H}, \right.$$
$$\left. n \geq 0, j = 1,2,\cdots,n, \quad u_k \in \mathcal{K}_c, k = 1,2,\cdots,p \right\}.$$

によって定義する．$D(S^*S)$ は $\mathcal{H}$で稠密であるので，$D(S)\cap\mathcal{H}$も $\mathcal{H}$で稠密になり，したがって $\mathfrak{D}_{S,p}$は$\bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K})$ で稠密である．

各 $p \geq 0$ に対して，$\mathfrak{D}_{S,p}$ を定義域とする線形作用素 $d_{S,p} : \bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K}) \to \bigwedge^{p+1}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ をつぎのように定義する：

$$\Psi = P_n(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \tag{3.1}$$

という形のベクトルに対しては

$$d_{S,p}\Psi = \sqrt{p+1}\sum_{j=1}^{n}(\partial_j P_n)(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))Sf_j \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$$

とし，$\mathfrak{D}_{S,p}$の任意のベクトルに対しては，線形性によって拡張する．$d_{S,p}$は well-defined である (すなわち，$\Psi = \Phi$ a.e. ならば $d_{S,p}\Psi = d_{S,p}\Phi$ a.e.)．

各 $p \geq 0$ に対して，$\bigwedge^{p+1}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ の部分空間 $\mathfrak{D}^*_{S,p}$を．

$$\mathfrak{D}^*_{S,p} = \mathcal{L}\left\{ P_n(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))u_1 \wedge \cdots \wedge u_{p+1} \middle| P_n \in \mathbb{P}_n, f_j \in \mathcal{H}, \right.$$
$$\left. n \geq 0, j = 1,2,\cdots,n,\ u_k \in D(S^*), k = 1,2,\cdots,p+1 \right\}$$

によって定義する．作用素 $d_{S,p}$の基本的性質はつぎの補題であたえられる．

補題 3.1 [13]　(i) すべての $p \geq 0$ に対して

$$d_{S,p}\mathfrak{D}_{S,p} \subset \mathfrak{D}_{S,p+1},$$
$$d_{S,p+1}d_{S,p} = 0, \tag{3.2}$$

が成り立つ．さらに，$d_{S,p}$は可閉である．

(ii) すべての $p \geq 0$ に対して

$$\mathfrak{D}^*_{S,p} \subset D(d^*_{S,p})$$

であり，(3.1) の形のベクトルΨに対して

$$d^*_{S,p-1}\Psi = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\left(\phi(S^*u_k)\widetilde{P}_n - \widetilde{\nabla}_{J_{\mathcal{H}}S^*u_k}\widetilde{P}_n\right)$$
$$\times u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{u}_k \wedge \cdots \wedge u_p$$

が成り立つ．ただし，$\widetilde{P}_n = P_n(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$.

注意．作用素 Sは，ここでは，一種の "パラメーター" とみなされる．このパラメーターの導入は，具体的な実現では異なって現われる種々の場合を統一的に理解することを可能にする．超対称的場の量子論への応用においては，さまざまなモデルを "補間" する役割をはたす．

以後，$d_{S,p}$の閉包も同じ記号で表わす．方程式 (3.2) は $d_{S,p}$の閉包に対しても成り立つので，列 $\{d_{S,p}, D(d_{S,p})\}_{p=0}^{\infty}$はひとつの de Rham 型複体とみなせる．有限次元解析との類推にしたがって，この複体に付随するラプラシアンを

$$\Delta_{S,p} = d^*_{S,p}d_{S,p} + d_{S,p-1}d^*_{S,p-1}$$

によって定義するのは自然である（$d_{S,-1} := 0$）.

定理 3.2 [13]　各 $p \geq 0$ に対して，$\Delta_{S,p}$は非負の自己共役作用素であり，作用素の等式

$$\Delta_{S,p} = d\Gamma_b(S^*S) \otimes I + I \otimes d\Gamma_f^{(p)}(SS^*) \tag{3.3}$$

が成り立つ.

等式 (3.3) は，第 2 量子化作用素とラプラシアンを関係づけるものであり，第 2 量子化作用素に対して，ひとつの新しい数学的観点をあたえる.

de Rham 型作用素 $d_{S,p}$とラプラシアンを用いると$\bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K})$ の "なめらかな" 部分空間

$$\Omega_p(E,\mu) := C^\infty(\Delta_{S,p}) := \cap_{m=1}^{\infty} D(\Delta_{S,p}^m)$$

に対して，de Rham-Hodge-Kodaira 型の分解定理を証明することができる．作用素 S^*Sのスペクトルを$\sigma(S^*S)$ で表わす.

定理 3.3 [13,22]　inf $\sigma(S^*S) \setminus \{0\} > 0$ ならば

$$\begin{aligned}\Omega_p(E,\mu) &= d_{S,p-1}\Omega_{p-1}(E,\mu) \bigoplus d_{S,p}^*\Omega_{p+1}(E,\mu) \bigoplus \ker \Delta_{S,p} \\ &= \Delta_{S,p}\Omega_p(E,\mu) \bigoplus \ker \Delta_{S,p}.\end{aligned}$$

de Rham 型複体 $\{d_{S,p}, D(d_{S,p})\}_{p=0}^{\infty}$のコホモロジーを

$$H_{S,p} = \ker d_{S,p}/\overline{\mathrm{Ran}(d_{S,p-1})}$$

によって定義する．ここで，$\overline{\mathrm{Ran}(d_{S,p-1})}$は $d_{S,p-1}$の値域 $\mathrm{Ran}(d_{S,p-1})$ の閉包を表わす．Hilbert 空間$\bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K})$ の de Rham-Hodge-Kodaira 型分解

$$\bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \overline{\mathrm{Ran}(d_{S,p-1})} \bigoplus \overline{\mathrm{Ran}(d_{S,p}^*)} \bigoplus \ker \Delta_{S,p}$$

を用いることにより

$$H_{S,p} \cong \ker \Delta_{S,p}$$

が証明される[13].

ラプラシアン$\Delta_{S,p}$の核 $\ker \Delta_{S,p}$については，つぎの定理が成り立つ.

定理 3.4 [13] $\Gamma_n(\ker S)$ を: $\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)$:, $f_j \in \ker S, j = 1, \cdots, n,$ によって生成される閉部分空間とすれば ($\Gamma_0(\ker S) := \mathbb{C}$), すべての $p \geq 0$ に対して

$$\ker \Delta_{S,p} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(\ker S) \otimes A_p(\ker S^* \otimes \cdots \otimes \ker S^*).$$

この定理から, $\ker \Delta_{S,p}$の次元は, $\ker S, \ker S^*$の次元に応じて, 有限であったり, 無限であったりすることがわかる（より詳しくは[13]を参照）.

注意. (1) 各 $m = 0, 1, 2, \cdots,$ に対して, 部分空間 $D(\Delta_{S,p}^m)$ は,

$$(\Psi, \Phi)_m = ((I + \Delta_{S,p})^m \Psi, (I + \Delta_{S,p})^m \Phi)_{\bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K})},$$
$$\Psi, \Phi \in D(\Delta_{S,p}^m)$$

によって定義される内積によって Hilbert 空間になり, 部分空間

$$\mathfrak{D}_{S,p}^{\infty} = \mathcal{L}\left\{ P(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \middle| P \in \mathbb{P}_n, f_j \in C^{\infty}(S^*S), \right.$$
$$\left. u_k \in C^{\infty}(SS^*), n \geq 0, j = 1, \cdots, n, k = 1, \cdots, p \right\}$$

は Hilbert 空間$< D(\Delta_{S,p}^m), ||\cdot||_m >$で稠密である. 空間$\Omega_p(E, \mu)$ はノルムの族 $\{||\cdot||_m\}_{m=0}^{\infty}$に関して可算 Hilbert 空間になる.

(2) 記号の混用であるが, Eの点もϕで表わす. 各 $r \in (1, \infty), m = 0, 1, 2,$ に対して, $\mathfrak{D}_{S,p}^{\infty}$上にノルム $||\cdot||_{r,m}$を

$$||\Psi||_{r,m} = \left[\int_E ||(I + \Delta_{S,p})^m \Psi(\phi)||^r_{\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)} d\mu(\phi) \right]^{1/r}$$
$$= ||(I + \Delta_{S,p})^m \Psi||_{L^r(E, d\mu; \bigwedge^p(\mathcal{K}_c))},$$

によって定義し，$\|\cdot\|_{r,m}$による，$\mathfrak{D}^{\infty}_{S,p}$の完備化を $W_{r,m}\left(\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)\right)$ とする(注意 (1) により，$W_{2,m}\left(\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)\right) =< D(\Delta^m_{S,p}), \|\cdot\|_m >$)．このとき，$p$ 形式の "なめらかな" 空間の候補として

$$W^{\infty}\left(\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)\right) = \bigcap_{1<r<\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} W_{r,m}\left(\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)\right)$$

をとることができる．この空間に対しても，定理 3.3 と同様の分解定理が成り立つ[55]．$\mathcal{H} = \mathcal{K}, S = I$という特殊な場合の分解定理は，[62]においてあたえられた．

(3) われわれの無限次元解析は，p 形式値（$\bigwedge^p(\mathcal{K}_c)$ 値）の汎関数を取り扱う．この枠組みにおいてもスカラー値の関数を扱うホワイトノイズ解析[44]における基礎空間に対応し，その p 形式値汎関数への一般化とみられる基礎空間を定義することができ，この基礎空間に対しても de Rham-Hodge-Kodaira 型の分解定理を示すことができる[22,23,55]．

(4) この節の数学的枠組みは，μが Gauss 型測度ではない場合にも拡張されうる[22,16,17]．

4 Dirac-Kähler 型作用素

de Rham 型複体 $\{d_{S,p}, D(d_{S,p})\}_{p=0}^{\infty}$ から，Hilbert 空間$\bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K}), p = 0,1,2,\cdots$，の無限直和

$$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p(\mathcal{H},\mathcal{K})$$

における作用素 d_Sがつぎのように定義される：

$$D(d_S) = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(p)}\}_{p=0}^{\infty} \in \bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) \middle| \Psi^{(p)} \in D(d_{S,p}), \right.$$
$$\left. \sum_{p=0}^{\infty} \|d_{S,p}\Psi^{(p)}\|^2_{\bigwedge^{p+1}(\mathcal{H},\mathcal{K})} < \infty \right\},$$

$$(d_S\Psi)^{(0)} = 0, \quad (d_S\Psi)^{(p)} = d_{S,p-1}\Psi^{(p-1)}, \quad p \geq 1, \Psi \in D(d_S).$$

部分空間の列 $\{\mathfrak{D}_{S,p}\}_{p=0}^{\infty}$は，$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ における稠密な部分空間

$$\mathfrak{D}_S = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(p)}\}_{p=0}^{\infty} \in \bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) \middle| \Psi^{(p)} \in \mathfrak{D}_{S,p} \cap \mathfrak{D}^*_{S,p-1}, \right.$$
$$\left. \text{有限個の } p \text{ を除いて} \Psi^{(p)} = 0 \right\}$$

をあたえる.

補題 4.1 [13]　(i) 作用素 d_Sは稠密に定義された閉作用素であり

$$\mathfrak{D}_S \subset D(d_S),$$
$$d_S^2 = 0,$$

が成り立つ.

(ii) d_Sの共役作用素 d_S^*はつぎのようにあたえられる：

$$D(d_S^*) = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(p)}\}_{p=0}^{\infty} \in \bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) \middle| \Psi^{(p+1)} \in D(d^*_{S,p}), \right.$$
$$\left. \sum_{p=0}^{\infty} \|d^*_{S,p}\Psi^{(p+1)}\|^2_{\bigwedge^p(\mathcal{K},\mathcal{H})} < \infty \right\},$$

$$(d_S^*\Psi)^{(p)} = d^*_{S,p}\Psi^{(p+1)}, \quad p \geq 0, \quad \Psi \in D(d_S^*).$$

Hilbert 空間$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ は

$$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) = L^2\left(E, d\mu; \bigwedge(\mathcal{K}_c)\right) = L^2(E, d\mu) \otimes \bigwedge(\mathcal{K}_c)$$

というふうに同一視される．この意味で$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ を **Boson-Fermion Fock 空間**とよぶ．

de Rham 型作用素 d_Sに付随するラプラシアンを

$$\Delta_S = d_S^* d_S + d_S d_S^*$$

によって定義する．定理 3.2 はつぎの結果を導く．

定理 4.2 [13]　Δ_Sは非負の自己共役作用素であり，作用素の等式

$$\Delta_S = d\Gamma_b(S^*S) \otimes I + I \otimes d\Gamma_f(SS^*)$$

が成り立つ．

Boson-Fermion Fock 空間は直和分解

$$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \bigwedge\nolimits_+(\mathcal{H},\mathcal{K}) \oplus \bigwedge\nolimits_-(\mathcal{H},\mathcal{K}) \tag{4.1}$$

をもつ．ただし

$$\bigwedge\nolimits_+(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits^{2p}(\mathcal{H},\mathcal{K}), \quad \bigwedge\nolimits_-(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits^{2p+1}(\mathcal{H},\mathcal{K}),$$

であり，それぞれ，L^2の意味での “偶形式”， “奇形式” の空間とみなされる．閉部分空間$\bigwedge_\pm(\mathcal{H},\mathcal{K})$ への射影作用素を $P_\pm$とし

$$\mathit{\Gamma} = P_+ - P_-$$

とおけば， $\mathit{\Gamma}$ は分解 (4.1) に対する grading 作用素である[7]．

[7]一般に，Hilbert 空間 $\mathcal{X}$における有界な自己共役作用素γは，$\gamma^2 = I, \gamma \neq \pm I$, をみたすとき，**grading** 作用素であるいう．この場合，γのスペクトルは $\{\pm 1\}$ で，固有値± 1 に属する固有空間を $\mathcal{X}_\pm$とすれば，$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \oplus \mathcal{X}_-$となる．逆に，直和分解 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \oplus \mathcal{X}_-$ ($\mathcal{X}_\pm \neq \{0\}$) があたえられたとき，$p_\pm$を $\mathcal{X}_\pm$への射影作用素とし，$\gamma = p_+ - p_-$ とすれば，γは grading 作用素である．

Boson-Fermion Fock 空間$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ における作用素 L に対して，Γが $D(L)$ を不変にし，$D(L)$ 上で $\{\Gamma, L\}=0$ が成り立つとき，L は grading 作用素Γに関して奇であるという．Γに関して奇の作用素Lは，$D(L)\cap\bigwedge_{\pm}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ を$\bigwedge_{\mp}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ へうつす．つぎの補題は容易に証明される．

補題 4.3　d_S, d_S^*はΓに関して奇である．

de Rham 型作用素 d_Sから，対称作用素

$$Q_S = d_S + d_S^*$$

が定義される．Sを iSで置き換えると

$$Q_{iS} = i(d_S - d_S^*)$$

となる．作用素 Q_Sを “自由な”**Dirac-Kähler** 型作用素とよぶ[8]．補題 4.3 からつぎを得る．

命題 4.4 [13]　Q_SはΓに関して奇である．

一般に，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$における二つの自己共役作用素 A, Bは，すべての $f\in D(B)$ と $t\in\mathbb{R}$ に対して $\exp(itA)f\in D(B)$ かつ

$$Be^{itA}f = e^{-itA}Bf$$

をみたすとき，**強反可換**であるという[9]．

[8]有限次元多様体上の外微分作用素を d とするとき，作用素 $i(d-d^*)$ は Kähler 作用素とよばれる[52]．“自由な”という語句は，対応する超対称的場の量子論が相互作用をもたないことを表わす（この節のおわりの注意を参照）．Q_Sを単に自由な Dirac 型作用素ともよぶ[11,13]．
[9]この定義は，アプリオリには，A と Bに関して非対称的に見えるが，アポステオ

自由な Dirac-Kähler 型作用素 Q_Sの基本的性質はつぎの定理によってあたえられる.

定理 4.5 [13]　(i) Q_Sは自己共役であり，Δ_Sの任意の芯上で本質的に自己共役である．さらに，作用素の等式

$$\Delta_S = Q_S^2 = Q_{iS}^2$$

が成り立つ.

(ii) Q_Sと Q_{iS}は強反可換である.

有限次元解析における Dirac 型作用素の指数は幾何学的あるいは位相的な不変量と結びつくことが知られている[10]. そこで，われわれの Dirac-Kähler 型作用素についてもその指数を考察することは自然であり，興味がある.

一般に，Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$から Hilbert 空間 $\mathcal{H}_2$への作用素 A に対する指数 index A は

$$\text{index } A = \dim\ker A - \dim\ker A^*$$

によって定義される．ただし，$\dim\ker A$，$\dim\ker A^*$の少なくとも一方は有限であるとする．作用素の指数を考える上でとくに重要な作用のクラスとし

りには，対称的であることが示される[56]．A, Bが有界作用素のときは，A と B が強反可換であることは，素朴な意味での反可換性，すなわち，$AB + BA = 0$ と同値になる．しかし，A, Bが非有界の場合は，素朴な意味での反可換性の概念はもはや有効ではなく，いま定義した強反可換性の概念が自然であり，適切であることが示される[66,56,60]．A と Bが強反可換であれば，たとえば，つぎの事柄が成り立つ：(i) $(Af, Bg)_{\mathcal{H}} + (Bf, Ag)_{\mathcal{H}} = 0, f, g \in D(A) \cap D(B)$ (この逆は成立しない);(ii) A と $|B|$ は強可換（すなわち，対応するスペクトル射影作用素が可換）;(iii)$A + B$は自己共役である[66]．強反可換な自己共役作用素の理論の最近の発展については[14,18,19]を参照.

[10]たとえば，Atiyah-Singer の指数定理.

て Fredholm 作用素とよばれるものがある．A を $\mathcal{H}_1$において稠密な定義域をもつ，$\mathcal{H}_1$から $\mathcal{H}_2$への閉線形作用素としよう．このとき，$\mathrm{Ran}(A)$ が閉集合であり，$\dim\ker A < \infty, \dim\ker A^* < \infty$ ならば，A は **Fredholm** であるという．また，$\mathrm{Ran}(A)$ が閉集合であり，$\dim\ker A$, $\dim\ker A^*$の少なくとも一方が有限のとき，A は**半 Fredholm** であるという[39,54]. Fredholm 作用素の指数はある種の安定性をもつ．たとえば，A が（半）Fredholm で，Bが A-コンパクトな作用素であれば $A+B$も（半）Fredholm であり，$\mathrm{index}\,(A+B) = \mathrm{index}\,A$ が成り立つ[39,54]. それゆえ，ある作用素が（半）Fredholm であるか否かを判定する条件を考察することが重要になる．ひとつの判定条件はつぎの補題によってあたえられる．

補題 4.6[7,15]　$A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$を閉線形作用素で $D(A)$ が $\mathcal{H}_1$で稠密であるとする．このとき，A が Fredholm であるための必要十分条件は

$$\dim\ker A^*A < \infty, \quad \dim\ker AA^* < \infty,$$
$$\inf\ \sigma(A^*A) \setminus \{0\} > 0,$$

が成り立つことである．

注意．Deift[30]の定理により，$\sigma(A^*A) \setminus \{0\} = \sigma(AA^*) \setminus \{0\}$ である．上の補題の利点は，作用素 A 自体よりも，非負自己作用素 A^*A や AA^*のほうが解析しやすい場合があるということにある．

さて，命題 4.4 と Q_Sの自己共役性により

$$Q_S = \begin{pmatrix} 0 & Q_{S,+}^* \\ Q_{S,+} & 0 \end{pmatrix}$$

となる閉作用素 $Q_{S,+} : \bigwedge_+(\mathcal{H},\mathcal{K}) \to \bigwedge_-(\mathcal{H},\mathcal{K})$ がただひとつ存在する．ここで問題にしたいのは，$Q_{S,+}$の Fredholm 性とその指数がどのようにあた

定理 4.7 [13]　(i) Sが Fredholm で $\dim\ker S = 0$ ならば，$Q_{S,+}$ は Fredholm で

$$\text{index } Q_{S,+} = \delta_{0,-\text{index } S}$$

が成り立つ．

(ii) Sが半 Fredholm で $\dim\ker S \geq 1$ かつ $\dim\ker S^* = 0$ ならば，$Q_{S,+}$ は半 Fredholm であり

$$\text{index } Q_{S,+} = \dim\ker Q_{S,+} = +\infty$$

が成り立つ．

注意．この節で述べた結果から，四つ組 $\{\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}), \Delta_S, \{Q_S, Q_{iS}\}, \varGamma\}$ は超対称的量子論であることが結論される（超対称的量子論については付録を参照）．こうして，この節で展開した，Boson-Fermion Fock 空間上の解析のひとつの結果として，超対称的な場の量子論の抽象的なモデルが構成される．このモデルは，具体的な実現においては，相互作用のない，自由な超対称的量子場のモデルをあたえる（7 節を参照）．

5　摂動

つぎに作用素 Q_Sに対する摂動を考察する．これは，対応する超対称的場の量子論のことばでいえば，場どうしの相互作用を導入することにほかならない（前節のおわりの注意を参照）．

$F \in L^q(E, d\mu; \mathcal{K}_c)$ $(q > 2)$ に対して，$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ではたらく作用素$\widetilde{b}(F)$ をつぎのように定義する：

$$D(\widetilde{b}(F)) = \left\{\Psi \in \bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) \,\middle|\, \int_E \|b(F(\phi))\Psi(\phi)\|^2_{\bigwedge(\mathcal{K}_c)} d\mu(\phi) < \infty\right\},$$

$$(\widetilde{b}(F)\Psi)(\phi) = b(F(\phi))\Psi(\phi), \quad \text{a.e.}\phi \in E.$$

注意．ボソン フェルミオン Fock 空間$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ は，フェルミオン Fock 空間をファイバーとする直積分と考えることができる：

$$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \int_E^{\oplus} \bigwedge(\mathcal{K}_c)d\mu(\phi).$$

作用素$\widetilde{b}(F)$ は，$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ をこのようにみたとき，分解可能 (decomposable) な作用素であり，記号的には

$$\widetilde{b}(F) = \int_E^{\oplus} b(F(\phi))d\mu(\phi)$$

と表わされる[11]．

補題 5.1 [13,20]　$D(\widetilde{b}(F))$ は$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ で稠密であり，$\mathfrak{D}_S \subset D(\widetilde{b}(F)) \cap D(\widetilde{b}(F)^*)$ が成り立つ．

de Rham 型作用素 d_Sの摂動を

$$d_S(F) = d_S + \widetilde{b}(F)^*$$

によって定義しよう．補題 5.1 によって，$\mathfrak{D}_S \subset D(d_S(F)) \cap D(d_S(F)^*)$ であり，$d_S(F)^* \restriction \mathcal{D}_S = d_S^* + \widetilde{b}(F)$ が成り立つ．$d_S(F)$ はΓに関して奇である[12]．

作用素

$$Q_S(F) = d_S(F) + d_S(F)^*$$

は，Q_Sのひとつの摂動をあたえる．$Q_S(F)$ は対称作用素であり，$\mathfrak{D}_S \subset D(Q_S(F))$ が成り立つ．以下，つぎを仮定する．

---

[11] ファイバーが一定の直積分と分解可能な作用素の理論については，たとえば，[59, §XIII. 16]を参照．

[12] ただし，$d_S(F)^2 = 0$ とは限らないことに注意．以下の命題 5.6 を参照．

仮定 I． $Q_S(F)$ は $\mathfrak{D}_S$上で本質的に自己共役である（その閉包も同じ記号 $Q_S(F)$ で表わす）．

注意．$Q_S(F) \restriction \mathfrak{D}_S$はつねに自己共役拡大をもつ[20]．$F$のあるクラスに対しては，仮定 I は成立する[20]．しかし，もっと一般の Fに対して仮定 I が成立するかどうかは未解決の問題である．

$b^{\#}(\cdot)$ がΓに関して奇であることと命題 4.4 を使えば，つぎの補題を得る．

補題 5.2 [13]　$Q_S(F)$ はΓに関して奇である．

補題 5.2 により

$$Q_S(F) = \begin{pmatrix} 0 & Q_S(F)_+^* \\ Q_S(F)_+ & 0 \end{pmatrix}$$

となる閉作用素 $Q_S(F)_+ : \bigwedge_+(\mathcal{H},\mathcal{K}) \to \bigwedge_-(\mathcal{H},\mathcal{K})$ がただひとつ存在する．われわれは作用素 $Q_S(F)_+$の Fredholm 性とその指数を計算することに興味がある．

ここで，作用素の指数を計算する公式をひとつあげておこう．A を補題 4.6 のものとすれば，

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

は，Hilbert 空間 $\mathcal{X} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$で自己共役である．したがって，$Q^2$は自己共役であり，しかも非負である．

$$\gamma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

とすれば，これは $\mathcal{X}$の grading 作用素である．

命題 5.3 [7,50]　A, Q を上のものとする．このとき，ある$\beta > 0$ に対して，$\exp(-\beta Q^2)$ が $\mathcal{X}$上のトレース型作用素ならば，A は Fredholm であり，

$$\text{index } A = \mathrm{Tr}\left(\gamma e^{-\beta Q^2}\right) \tag{5.1}$$

が成り立つ．ここで，Tr はトレースを表わす．

注意．トレースクラス上の線形汎関数 $\mathrm{Tr}(\gamma\cdot)$ は超トレースとよばれる．公式 (5.1) の重要性は，この右辺が，具体的な例では，計算可能な解析的表示をもちうるということ，したがって，その場合には，これによって，当該の作用素 A に対する指数定理が得られる，という点にある．

われわれは，命題 5.3 を利用して，$Q_S(F)_+$の指数を計算することを考える．しかし，そのためには，いまの場合のラプラシアン

$$\Delta_S(F) := Q_S(F)^2$$

のあらわな形を知る必要がある．

$L^2(E, d\mu; \mathcal{K}_c)$ の部分空間 $\mathcal{P}_S\widehat{\otimes}D(S^*)$ にノルム $||\cdot||_{q,r}$ $(1 \leq q, r < \infty)$ を

$$\begin{aligned}||\Phi||_{q,r} = ||\Phi||_{L^q(E,d\mu;\mathcal{K}_c)} + ||S\nabla \otimes I\Phi||_{L^r(E,d\mu;\mathcal{K}_c)\otimes\mathcal{K}_c}\\ + ||SJ_{\mathcal{H}}\nabla \otimes J_{\mathcal{K}}\Phi||_{L^r(E,d\mu;\mathcal{K}_c)\otimes\mathcal{K}_c}\end{aligned}$$

によって定義し，このノルムによる $\mathcal{P}_S\widehat{\otimes}D(S^*)$ の完備化を $\mathcal{W}_S^{q,r}(\mathcal{K}_c)$ によって表わす．

定義 5.4　$< E, \mu >$上の $\mathcal{K}_c$値関数Φでつぎの条件 (i),(ii) をみたすものの全体を $\mathbb{F}_S^{q,r}$ とする：(i)$\Phi \in D((S\nabla)^*) \cap \mathcal{W}_S^{q,r}(\mathcal{K}_c)$;(ii) すべての $f \in D(S) \cap \mathcal{H}$に対して，$(\Phi, Sf)_{\mathcal{K}_c}$は実数．

Gを$< E, \mu >$上の $\mathcal{K}_c\otimes\mathcal{K}_c$値関数とすれば，2.2 節の結果により，a.e.$\phi \in E$に対して，Fermion Fock 空間$\bigwedge(\mathcal{K}_c)$ における作用素$< b^{\#}|\Lambda(G(\phi))|b^{\natural} >$

が定義される．これらの作用素は，$\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K})$ における分解可能な作用素

$$<\widetilde{b}^{\#}|\Lambda(G)|\widetilde{b}^{\natural}>=\int_E^{\oplus}<b^{\#}|\Lambda(G(\phi))|b^{\natural}>d\mu(\phi)$$

をあたえる．部分空間

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_S^{(2)}=\mathcal{L}\{&P_n(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))u_1\wedge\cdots\wedge u_p|P_n\in\mathbb{P}_n,f_j\in D(S^*S)\cap\mathcal{H},\\&n,p\geq 0,j=1,2,\cdots,n,\quad u_k\in D(SS^*),k=1,2,\cdots,p\}\end{aligned}$$

を導入する．

定理 5.5 [13,20]　$q>4,r>2$ を任意に固定し，$F\in\mathbb{F}_S^{q,r}$ とする．

$$L_{S,F}(\phi)=\Lambda(SJ_{\mathcal{H}}\nabla\otimes J_{\mathcal{K}}F(\phi))+\Lambda(SJ_{\mathcal{H}}\nabla\otimes J_{\mathcal{K}}F(\phi))^*$$

とおく．このとき，$\mathfrak{D}_S^{(2)}\subset D(Q_S(F)^2)$ であり，$\mathfrak{D}_S^{(2)}$上で

$$\begin{aligned}\Delta_S(F)=&Q_S(F)^2\\=&\Delta_S+(S\nabla)^*F+||F||_{\mathcal{K}_c}^2+<\widetilde{b}^*|L_{S,F}|\widetilde{b}>\\&+<\widetilde{b}^*|\Lambda(S\nabla\otimes I\ F)|\widetilde{b}^*>+<\widetilde{b}|\Lambda(S\nabla\otimes I\ F)^*|\widetilde{b}>\end{aligned}$$

が成り立つ．

定理 5.5 の証明[20]からつぎのこともわかる．

命題 5.6 [20]　$\mathfrak{D}_S$上で $d_S(F)^2=0$ であるための必要十分条件は

$$S\nabla\otimes IF(\phi)\in\bigwedge^2(\mathcal{K}_c)^{\perp}\quad\text{a.e.}\phi \tag{5.1}$$

となることである．

注意． 四つ組 $\{\bigwedge(\mathcal{H},\mathcal{K}),\Delta_S(F),Q_S(F),\Gamma\}$ は超対称的量子論である．この場合，具体的実現においては，相互作用のはいった超対称的場の量子論が対応する．

6 汎関数積分表示による指数定理

この節では，前節の仮定 I に加えて，つぎを仮定する．

仮定 II. $\inf\sigma(S^*S)>0,\inf\sigma(SS^*)>0$ であり，ある$\gamma>0$ に対して $(S^*S)^{-\gamma}$は $\mathcal{H}$上のトレース型作用素である．

各$\delta>0$ に対して，$\mathcal{H}$上のノルム $||\cdot||_{-\delta}$ を $||f||_{-\delta}=||(S^*S)^{-\delta/2}f||_{\mathcal{H}}$によって定義する．ノルム $||\cdot||_{-\delta}$による，$\mathcal{H}$の完備化を $\mathcal{H}_{-\delta}$ とする．$\mathcal{H}_{-\delta}$の双対空間は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\delta :=< D((S^*S)^{\delta/2}),||(S^*S)^{\delta/2}\cdot||_{\mathcal{H}} >$ と同一視される．仮定 II と Minlos-Sazonov-Gross の定理[40]によって，任意の$\delta>\gamma$ に対して，

$$E=\mathcal{H}_{-\delta}(S^*S)$$

ととれる．$\beta>0$ に対して

$$E_\beta=C([0,\beta];E)$$

を$[0,\beta]$上の E値連続関数の空間とする．E_βの要素Φの t における値を$\Phi_t\in E$ で表わす．

命題 6.1 [13] E_β上の Gauss 型確率測度μ_βで，すべての $f,g\in\mathcal{H}_\delta$に対して

$$\int_{E_\beta} <\Phi_t,f><\Phi_s,g> d\mu_\beta(\Phi)$$
$$=(f,(1-e^{-\beta S^*S})^{-1}(e^{-|t-s|S^*S}+e^{-(\beta-|t-s|)S^*S})g)_{\mathcal{H}},\quad t,s\in[0,\beta],$$

となるものが存在する．ただし，$<\cdot,\cdot>$は$\mathcal{H}_{-\delta}$と$\mathcal{H}_{\delta}$との双対性をあたえる自然な双線形形式である．

注意. (i) 測度μ_βに関して，$\Phi_0=\Phi_\beta$ a.e. が成立する．すなわち，a.e.$\Phi\in E_\beta$はEのループである．したがって，μ_βは，実際には，Eのループ空間上の Gauss 型確率測度とみることができる．

(ii) 仮定 II のもとでは，すべての$\beta>0$に対して，$\exp(-\beta S^*S)$はトレース型作用素になる．これから，$\exp(-\beta d\Gamma_b(S^*S))$はトレース型作用素になり，

$$Z_{S,\beta}:=\mathrm{Tr}\ e^{-\beta d\Gamma_b(S^*S)}=\frac{1}{\det(I-e^{-\beta S^*S})}$$

が成り立つ[13]．さらにつぎのトレース公式が導かれる[7,13]: $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\beta, f_j\in\mathcal{H}_\delta, j=1,\cdots,n$ に対して

$$\frac{\mathrm{Tr}\ \left(e^{-t_1 d\Gamma_b(S^*S)}\phi(f_1)e^{-(t_2-t_1)d\Gamma_b(S^*S)}\cdots\phi(f_n)e^{-(\beta-t_n)d\Gamma_b(S^*S)}\right)}{Z_{S,\beta}}$$
$$=\int_{E_\beta}<\Phi_{t_1},f_1>\cdots<\Phi_{t_n},f_n>d\mu_\beta(\Phi). \tag{6.1}$$

2.1 節で述べたように，$d\Gamma_b(S^*S)$を，ボソンからなる系の自由ハミルトニアンとみなし，この量子系をΣと書くことにすれば，$Z_{S,\beta}$は，物理的には，有限温度$1/\beta$における，系Σの分配関数を表わす．作用素$\phi(t_j,f_j):=\exp(-t_jd\Gamma_b(S^*S))\phi(f_j)\exp(t_jd\Gamma_b(S^*S)), j=1,\cdots,n,$ は，系Σにおける，場$\phi(f)$の，虚数時間$s_j=it_j$での時間発展をあたえる．上式の左辺は，場の積$\phi(t_1,f_1)\cdots\phi(t_n,f_n)$の統計力学的平均（相関関数）にほかならない．一方，(6.1) の右辺は，測度μ_βに関する，確率変数$\Phi_t(f):=<\Phi_t,f>$のn次のモーメントである．Euclid 場の量子論[63,31]との類推からすれば，$\Phi_t(f)$は，物理的には，有限温度$1/\beta$における，自由な Euclid 場を表わすと考え

[13] Tを Hilbert 空間上のトレース型作用素とするとき，$I+T$の行列式$\det(I+T)$は，$\det(I+T)=\prod_{n=1}^N(I+\lambda_n)$によって定義される[64,65]．ここで，$\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ $(N\leq+\infty)$はTの（多重度もこめて数えた）固有値である．

られる．測度空間$< E_\beta, \mu_\beta >$は，[45]において議論された測度空間の抽象化である（温度が 0 ($\beta = +\infty$) の場合については[41]を参照）．

$F \in \mathbb{F}_S^{q,r}$ ($q > 4, r > 2$) とし，a.e. $\Phi \in E_\beta$に対して，$L^2([0,\beta];\mathcal{K}_c)$ 上の作用素

$$K^{\pm}_{S,F}(\Phi) = L_{S,F}(\Phi_t)((\partial_t)_\pm + SS^*)^{-1}.$$

を導入する．ここで，$(\partial_t)_+((\partial_t)_-)$ は（反）周期的境界条件つきの微分作用素$\partial/\partial t$ を表わす．

補題 6.2 [13]

$$\int_0^\beta ||L_{S,F}(\Phi_t)||_2^2 dt < \infty \tag{6.2}$$

ならば，$K^{\pm}_{S,F}(\Phi) \in \mathcal{I}_2(L^2([0,\beta];\mathcal{K}_c))$ a.e. Φであり，

$$(K^{\pm}_{S,F}(\Phi)f)(t) = \int_0^\beta K^{\pm}_{S,F}(\Phi;t,s)f(s)ds, \quad f \in L^2([0,\beta];\mathcal{K}_c),$$

となる有界線形作用素 $K^{\pm}_{S,F}(\Phi;t,s) : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}_c$ で 写像 $s \to K^{\pm}_{S,F}(\Phi;t,s)$ ($s \neq t$) が強連続であるものが存在する．さらに$K^{\pm}_{S,F}(\Phi;t) := K^F_{\pm}(\Phi;t,t+0)$ は$\mathcal{K}_c$上のトレース型作用素であり，

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\ K^{\pm}_{S,F}(\Phi) := \int_0^\beta \mathrm{Tr}\ K^{\pm}_{S,F}(\Phi;t)dt$$

は，E_β上のほとんどいたるところ有限な実数値関数である．

一般に，任意の Hilbert 空間上の Hilbert-Schmidt 作用素 Tに対して，正則化された行列式 $\det_2(I+T)$ が

$$\det_2(I+T) = \prod_{n=1}^N (1+\lambda_n)e^{-\lambda_n}$$

によって定義される．ここで，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ $(N \leq +\infty)$ は，Tの（多重度もこめて数えた）固有値である[64,65].

作用素 $Q_S(F)_+$に対するひとつの指数公式がつぎの定理によってあたえられる．

定理 6.3 [13,15]　$F \in \mathbb{F}_S^{q,r}$ $(q > 4, r > 2)$ とし，(5.1),(6.2) および

$$\int_{E_\beta} d\mu_\beta(\Phi) \exp\left(- \int_0^\beta \left((S\nabla)^* F(\Phi_t) + ||F(\Phi_t)||^2_{\mathcal{K}_c}\right) dt \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}||K^{\pm}_{S,F}(\Phi)||_2^2 + |\widetilde{\mathrm{Tr}} K^{\pm}_{S,F}(\Phi)| \right) < \infty$$

を仮定する．このとき， $Q_S(F)_+$ は Fredholm であり

$$\begin{aligned} &\text{index } Q_S(F)_+ \\ &= \int_{E_\beta} d\mu_\beta(\Phi) \det{}_2 \left(I + K^+_{S,F}(\Phi) \right) \\ &\quad \times \exp\left(- \int_0^\beta \left((S\nabla)^* F(\Phi_t) + ||F(\Phi_t)||^2_{\mathcal{K}_c}\right) dt + \widetilde{\mathrm{Tr}}\ K^+_{S,F}(\Phi) \right). \end{aligned} \tag{6.3}$$

右辺は$\beta > 0$ によらない．

この定理の証明の基本的アイデアはつぎの通り：定理 6.3 の仮定のもとで，まず，$\exp(-\beta\Delta_S(F))$ がトレース型作用素であることが示す．このとき，命題 5.3 によって，index $Q_S(F)_+ = \mathrm{Tr}(\Gamma \exp(-\beta\Delta_S(F))$ となる．この式の右辺は，Boson Fock 空間および Fermon Fock 空間における第 2 量子化作用素に対するトレース公式[7,13]（そのひとつは (6.1) ）を用いることにより，(6.3) の右辺に等しくなることが示される（この場合，いくつかの段階にわけて，近似議論をおこなう必要がある）．

注意．条件 (5.1) は$< \tilde{b}^* | \Lambda(S\nabla \otimes IF) | \tilde{b}^* >= 0$ を意味する：このおかげで，ラプラシアン$\Delta_S(F)$ は，より解析しやすい形になる．(5.1) が成立し

ない場合も，$Q_S(F)_+$の指数に対して，汎関数積分表示を導くことは可能であるが，その導出はもっと困難で複雑になる[13]．この場合，Hilbert 空間上の Hilbert-Schmidt 作用素に対してファフィアン (Pfaffian) の概念を導入する必要がある．

7　超対称的場の量子論への応用

これまでに概略を述べた無限次元解析の枠組みは六つ組 $(E, \mu, \mathcal{H}, \mathcal{K}, S, F)$ から構成されている．これらの対象を具体的に指定することにより，超対称的場の量子論の種々のモデル[67–73]を実現することができる．この意味で，この論文で叙述した理論形式は，最初にも少しふれたように，超対称的場の量子論のいくつかのモデルに対して，数学的に統一された観点を提供するのである．ここでは，2 次元時空における “$N = 1$ Wess-Zumino (WZ) モデル” とよばれるモデルについてだけ簡単にふれる．

$\mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の無限回微分可能な実数値急減少関数からなる Schwartz の試料関数の空間とし，その双対空間，すなわち，$\mathbb{R}$ 上の実緩増加超関数の空間を $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$ とする．$m > 0$ を定数とし

$$\omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

とする（これは，物理的には，質量 m の自由粒子が運動量 p をもつときの相対論的エネルギーを表わす）．実 Hilbert 空間 $H_{-1/2}(\mathbb{R})$ を

$$H_{-1/2}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}) \middle| \|f\|^2_{-1/2} := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{f}(p)|^2}{\omega(p)} dp < \infty \right\}$$

によって定義する（$\hat{f}$は fのフーリエ変換を表わす）．つぎの場合を考える：

$$E = \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}), \quad \mathcal{H} = H_{-1/2}(\mathbb{R}),$$
$$\mathcal{K} = L^2_r(\mathbb{R})(\text{実の } L^2(\mathbb{R})\text{-関数全体}), \quad \mu = \mu_m.$$

ここで，μ_mは

$$\int_{\mathcal{S}'_r(\mathbb{R})} e^{i\phi(f)} d\mu_m(\phi) = e^{-\|f\|^2_{-1/2}/2}, \quad f \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$$

となる，$\mathcal{S}'_r(\mathbb{R})$ 上の Gauss 型確率測度であり，$\phi(f) :=< \phi, f >$ は $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_r(\mathbb{R})$ の自然な双線形形式である．いまの場合，作用素 $S : H_{-1/2}(\mathbb{R})_c \to L^2(\mathbb{R})$ の選び方には任意性がある．ひとつの選び方はつぎのようなものである：

$$S = S_1 + iS_2,$$
$$(\widehat{S_1 f})(p) = \frac{\nu(p)}{2\sqrt{\omega(p)}}\hat{f}(p), \quad (\widehat{S_2 f})(p) = \frac{\nu(-p)}{2\sqrt{\omega(p)}}\hat{f}(p).$$

ただし，$\nu(p) = \sqrt{p + \omega(p)}$. ω_b, ω_fをそれぞれ，$H_{-1/2}(\mathbb{R}), L_r(\mathbb{R})$ において働く自己共役作用素で

$$\widehat{\omega_b f}(p) = \omega(p)\hat{f}(p),\ f \in D(\omega_b), \quad \widehat{\omega_f u}(p) = \omega(p)\hat{u}(p),\ u \in D(\omega_f),$$

となるものとする．このとき，

$$S^* S = \omega_b, \quad SS^* = \omega_f.$$

が成り立つ．したがって，いまの場合，自由なラプラシアン（ハミルトニアン）Δ_Sは

$$\Delta_S = d\Gamma_b(\omega_b) \otimes I + I \otimes d\Gamma_f(\omega_f)$$

という形になる．

超対称性電荷 Q_Sの具体的な表示を求めるために，$L^2(\mathbb{R})$ 上のフェルミオン Fock 空間 $\bigwedge(L^2(\mathbb{R}))$ で働く消滅作用素，生成作用素の超関数核をそれぞれ，$b(x), b(x)^*$としよう[25,38]：

$$b(f) = \int b(x) f(x)^* dx, \quad b(f)^* = \int b(x)^* f(x) dx.$$

ボソン フェルミオン Fock 空間$\bigwedge(H_{-1/2}(\mathbb{R}), L^2_r(\mathbb{R}))$ において稠密な部分空間

$$\mathfrak{F} = \mathcal{L}\{P(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))u_1\wedge\cdots\wedge u_p | f_j \in \mathcal{S}_r(\mathbb{R}), u_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$
$$n,p\geq 0, j=1,\cdots,n, k=1,\cdots,p, P\in\mathbb{P}_n\},$$

を導入する．このとき， $D(d_S)\supset\mathfrak{F}$ であり，$\mathfrak{F}$ 上で

$$d_S = \int dx b(x)^* S \frac{\delta}{\delta\phi(x)}$$

が成り立つ．ここで，$\delta/\delta\phi(x)$ は 1 階の汎関数微分作用素を表わす[14]．また

$$\gamma_1(x) = i(b(x)-b(x)^*), \quad \gamma_2(x) = b(x)+b(x)^*.$$

とすれば

$$\{\gamma_j(x),\gamma_k(y)\} = 2\delta_{jk}\delta(x-y)$$

となるので， $\{\gamma_j(x)\}$ は無限次元の Clifford 代数の（超関数的）生成子とみなせる．d_Sに対する上の表示を用いると，いまの場合の Dirac-Kähler 型作用素 Q_Sは，$\mathfrak{F}$ 上で

$$Q_S = i\sum_{j=1}^{2}\int dx\gamma_j(x)S_j\frac{\delta}{\delta\phi(x)} + \int dx\phi(x)S^*b(x)$$

となることがわかる．これは，Q_Sが，有限次元の場合の Dirac あるいは Kähler 型作用素の自然な無限次元版であることを示す．ラプラシアンΔ_Sは

[14]たとえば，

$$\frac{\delta P(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))}{\delta\phi(x)} = \sum_{j=1}^{n}(\partial_j P)(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))f_j(x).$$

2 階の汎関数微分作用素して表わされる[15]. このようにして構成される超対称的場の量子論 $\{\bigwedge(H_{-1/2}(\mathbb{R}), L^2_r(\mathbb{R})), \Delta_S, Q_S, \varGamma\}$ は，自由な，$N = 1$ WZ モデルとよばれる.

相互作用のはいった，$N = 1$ WZ モデルをつくるには, 5 節で導入した，$\mathcal{K}_c$値関数 Fをいまの場合に具体的にあたえればよい. このモデルや他のモデルについてのさらに詳しい記述については[13,15,50]等を参照.

付録　超対称的量子論について

この論文で解説した主題が超対称的場の量子論と深い関わりをもつこと，およびこの分野に詳しくない読者の便宜を考えて，ここで超対称的量子論の抽象的な（数学的）定義といくつかの基本的事実を述べておく．

定義 A.1 $N \geq 1$ を自然数とする．Hilbert 空間 $\mathcal{X}$とそこで働く自己共役作用素 H, N_F, Q_j $(j = 1, \cdots, N)$ からつくられる４つ組 $\{\mathcal{X}, H, \{Q_j\}_{j=1}^N, N_F\}$ が以下の条件をみたすとき，これを N-**超対称性をもつ超対称的量子論**という：

(S.1)　$\mathcal{X}$は二つの閉部分空間 $\mathcal{X}_\pm$の直和

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \bigoplus \mathcal{X}_- \tag{A.1}$$

に分解され，$N_F \restriction \mathcal{X}_\pm = \pm I$が成り立つ．ここで，$I$は恒等作用素を表わす．

(S.2)

$$H = Q_1^2 = Q_2^2 = \cdots = Q_N^2.$$

(S.3)　N_Fは各 Q_jの定義域 $D(Q_j)$ を不変にし，$D(Q_j)$ 上で，反交換関係

$$\{N_F, Q_j\} = 0, \quad j = 1, \cdots, N,$$

が成り立つ．ここで，$\{A, B\} = AB + BA$.

(S.4)　任意の $j, k = 1, \cdots, N, j \neq k$に対して，$Q_j$と Q_kは $D(Q_j) \cap D(Q_k)$ 上の準双線形形式の意味で反可換である：

$$(Q_j\psi, Q_k\phi)_{\mathcal{X}} + (Q_k\psi, Q_j\phi)_{\mathcal{X}} = 0,$$
$$\psi, \phi \in D(Q_j) \cap D(Q_k), j, k = 1, \cdots, j \neq k.$$

Q_jを**超対称電荷** (supercharge)，Hを**超対称的ハミルトニアン**，N_Fを**フェルミオン数作用素**とよぶ．部分空間 $\mathcal{X}_+$ ($\mathcal{X}_-$) のベクトルは**ボソン的**（**フェルミオン的**）**状態**とよばれる．

注意．定義 A.1 は非相対論的な超対称的量子論のひとつの抽象的な定式化である．相対論的な場合には，条件 (S.2) は少し変更を要する（たとえば，[67–72,33,12]等を参照）．

超対称的量子論 $\{\mathcal{X}, H, \{Q_j\}_{j=1}^N, N_F\}$ があたえられたとしよう．このとき，(S.1) によって，$\mathcal{X}$の任意のベクトルψは 2 成分の縦ベクトル

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \psi_\pm \in \mathcal{X}_\pm,$$

で表わされる．この表示に対応して，$\mathcal{X}$における任意の線形作用素は，線形作用素を成分とする 2 行 2 列の行列で表わされる．たとえば，

$$N_F = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

超対称電荷 Q_jの自己共役性と (S.3) により，各 $j = 1, \cdots, N$ に対して

$$Q_j = \begin{pmatrix} 0 & Q_{j,+}^* \\ Q_{j,+} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

となる閉線形作用素 $Q_{j,+} : \mathcal{X}_+ \to \mathcal{X}_-$ ががただひとつ存在する．作用素 $Q_{j,+}$ は Q_jのボソン的状態空間 $\mathcal{X}_+$への制限にほかならない．(A.3) と (S.2) から

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix},$$
$$H_+ = Q_{j,+}^* Q_{j,+}, \quad H_- = Q_{j,+} Q_{j,+}^*, \tag{A.4}$$

を得る ($Q^*_{j,+}$は $Q_{j,+}$の共役作用素を表わす)．したがって，Hは $\mathcal{X}_\pm$によって約される[15]．作用素 H_+, H_-をそれぞれ，Hの**ボソン的部分**，**フェルミオン的部分**とよぶ.

超対称的量子論において特に興味があるのは，零エネルギー状態，つまり，Hの固有値 0 に属する固有ベクトルである．超対称的ハミルトニアン Hが零エネルギー状態をもたないとき，すなわち，$\ker H = \{0\}$ のとき，超対称性は破れているという[16]．超対称性の破れを測るひとつの尺度として

$$I_W = \dim\ker H_+ - \dim\ker H_-$$

によって定義される Witten **指数**がある[70–72][17]．これは，物理的には，ボソン的零エネルギー状態の数とフェルミオン的零エネルギー状態の数の差を表わす．超対称性が破れていれば，明らかに $I_W = 0$ である．したがって，$I_W = 0$ は超対称性が破れるための必要条件をあたえる（しかし，十分条件ではない）.

Witten 指数 I_Wを計算するには (A.4) に注目すればよい．実際，

$$\ker Q^*_{j,+} Q_{j,+} = \ker Q_{j,+}$$

であるから，

$$I_W = \dim\ker Q_{j,+} - \dim\ker Q^*_{j,+}$$

---

[15] この事実は，行列表現を用いなくても証明される[2]．$H_\pm$は jによらないことに注意．ここまでの議論からわかるように，超対称的量子論は，二つの Hilbert 空間 $\mathcal{X}_\pm$と稠密に定義された閉線形作用素 $Q_{j,+} : \mathcal{X}_+ \to \mathcal{X}_-, j = 1, \cdots, N$, を用いても定義されうる．すなわち，この場合，$\mathcal{X}$を (A.1) によって定め，$N_F, Q_j$をそれぞれ，(A.2), (A.3) によって定義し，(S.2),(S.4) が成り立つように $Q_{j,+}$に条件をつければよい.

[16] Q_jを生成子とする超対称変換で不変となる状態ψは，$Q_j\psi = 0$ をみたすものだけであり，これは $H\psi = 0$ と同値である．現実に観測される素粒子の質量スペクトルは，ボソンとフェルミオンでは非対称的であるので，物理的に意味のある超対称的量子論のモデルの候補は超対称性の破れをもつことが要請される.

[17] もちろん，この場合，$\dim\ker H_+$，$\dim\ker H_-$のすくなくとも一方は有限であると仮定しておく.

となる．ところで，この右辺は，$Q_{j,+}$の指数 index $Q_{j,+}$にほかならない:

$$I_W = \text{index } Q_{j,+}.$$

こうして，超対称性と作用素の指数理論が関連してくる．補題 4.6 を $A = Q_{j,+}$として応用すれば，つぎの結果を得る．

命題 A.2 [7,15]　作用素 $Q_{j,+}$が Fredholm であるための必要十分条件は

$$\dim\ker H < \infty, \quad \inf\ \sigma(H) \setminus \{0\} > 0$$

が成り立つことである．

補題 5.3 を応用することにより，つぎの結果が得られる．

命題 A.3 [7,50]　ある$\beta > 0$ に対して，$\exp(-\beta H)$ が $\mathcal{X}$上のトレース型作用素ならば，$Q_{j,+}$は Fredholm であり，

$$\text{index } Q_{j,+} = \operatorname{Tr}\left(N_F e^{-\beta H}\right) \tag{A.5}$$

が成り立つ．

これまでは，超対称的量子論の定義 A.1 における条件 (S.4) の意味についてふれなかったが，これに対しては反可換な自己共役作用素の理論[66,56,60,14,18,19]から光をあてることができる．つまり，(S.2)，(S.4) をみたす自己共役作用素 $Q_j, j = 1, \cdots, N,$ は互いに強反可換であることが示される[17]（強反可換性の定義については 4 節を参照）．

この付録では詳しく述べる余裕はないが，超対称的量子論は多様な数学的側面をもっている[2–6,10,21,26–28,34–37,42,46]．たとえば，超対称的構造を利用して，摂動論が破綻するような作用素のクラスで物理的に興味のあるものを構成できるし[2]，KdV 方程式などへの応用もある[35,36]．ま

た，“アノーマリー”や Krein のスペクトルシフト関数との関連も議論されている[26,34]. 超対称的量子論の具体的な多くのモデルでは，超対称性電荷は Dirac 型作用素であたえられ，これは，たとえば，有限次元解析における指数定理への従来とは別のアプローチを可能にする[1,37, 27,28].

文献

[1] L. Alvarez-Gaume, *Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem*, Commun.Math.Phys. **90** (1983), 161–173.

[2] A. Arai, *Supersymmetry and singular perturbations*, J.Funct.Anal. **60** (1985), 378–393.

[3] A. Arai, *Some remarks on scattering theory in supersymmetric quantum systems*, J. Math. Phys. **28** (1987), 472–476.

[4] A. Arai, *Formal aspects of supersymmetric embedding of Hamiltonians in quantum field theories*, Lett.Math.Phys. **15** (1988), 275–279.

[5] A. Arai, *Existence of infinitely many zero-energy states in a model of supersymmetric quantum mechanics*, J.Math.Phys. **30** (1989), 1164–1170.

[6] A. Arai, *On the degeneracy in the ground state of the $N = 2$ Wess-Zumino supersymmetric quantum mechanics*, J.Math.Phys. **30** (1989), 2973–2977.

[7] A. Arai, *Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold*, J.Funct.Anal. **82** (1989), 330–369.

[8] A. Arai, *Supersymmetric embedding of a model of a quantum harmonic oscillator interacting with infinitely many bosons*, J.Math.Phys. **30** (1989), 512–520.

[9] A. Arai, *A criterion for the boundedness from below with a class of symmetric operators and its applications*, J.Math.Anal.Appl. **145** (1990), 539–554.

[10] A. Arai, *Exactly solvable supersymmetric quantum mechanics*, J. Math.Anal.Appl. **158** (1991), 63–79.

[11] A. Arai, *A general class of infinite dimensional Dirac operators and related aspects*, in "Functional Analysis and Related Topics," (Ed. S. Koshi), World Scientific, Singapore, 1991.

[12] A. Arai, *Fock-space representation of the relativistic supersymmetry algebra in the two-dimensional space-time*, Hokkaido Univ. Preprint Series in Math. No.123 (1991).

[13] A. Arai, *A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index*, J.Funct.Anal. **105** (1992), 342–408.

[14] A. Arai, *Commutation properties of anticommuting self-adjoint operators, spin representation and Dirac operators*, Integr. Equat. Oper. Th. **16** (1993), 39–63.

[15] A. Arai, *Dirac operators in Boson-Fermion Fock spaces and supersymmetric quantum field theory*, in "the Proceedings of the XXVIIIth Karpacz Winter School of Theoretical Physics –Infinite Dimensional Geometry in Physics (Karpacz, Poland, 17–29 February, 1992)." to appear in Journal of Geometry and Physics **11**(1993).

[16] A. Arai, *Supersymmetric extension of quantum scalar field theories*, to appear in the Proceedings of the Oji International Seminar on Quantum Analysis (Kyoto, June, 1992) (Kluwer Academic Publishers).

[17] A. Arai, *Analysis on an infinite dimensional exterior bundle and supersymmetric extension of quantum scalar fields*, in preparation.

[18] A. Arai, *Characterization of anticommutativity of self-adjoint operators in connection with Clifford algebra and applications*, Integr. Equat. Oper.Th (to appear).

[19] A. Arai, *Analysis on anticommuting self-adjoint operators*, to appear in the Proceedings of the International Conference on Spectral and Scattering Theory (Tokyo, June 30–July 3, 1992).

[20] A. Arai, *On self-adjointness of Dirac operators in Boson-Fermion Fock spaces*, preprint, 1993.

[21] A. Arai and O. Ogurisu, *Meromorphic $N = 2$ Wess-Zumino supersymmetric quantum mechanics*, J.Math.Phys. **32** (1991), 2427–2434.

[22] A. Arai and I. Mitoma, *De Rham-Hodge-Kodaira decomposition in ∞-dimensions*, Math.Ann. **291** (1991), 51–73.

[23] A. Arai and I. Mitoma, *Comparison and nuclearity of spaces of differential forms on topological vector spaces*, J.Funct.Anal. **111** (1993), 278–294.

[24] 新井朝雄, 場の量子論の数理,「応用数理」(日本応用数理学会誌) 掲載予定.

[25] F.A. Berezin, "The Method of Second Quantization," Academic, New York, 1966.

[26] D. Bollé, F. Gesztesy, H. Grosse, W. Schweiger, and B. Simon, *Witten index, axial anomaly and Krein's spectral shift function in supersymmetric quantum mechanics*, J. Math. Phys. **28** (1987), 1512-1525.

[27] N.V. Borisov, W. Müller and R. Schrader, *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Commun.Math.Phys. **114** (1988), 475–513.

[28] U. Bunke, *Relative index theory*, J.Funct.Anal. **105** (1992), 63–76.

[29] M. de Crombrugghe and V. Rittenberg, *Supersymmetric quantum mechanics*, Ann. Phys. (NY) **151** (1983), 99–126.

[30] P.A. Deift, *Applications of a commutation formula*, Duke Math.J. **45** (1978), 267–310.

[31] 江沢　洋・新井朝雄,『場の量子論と統計力学』, 日本評論社, 東京, 1988.

[32] R. Fernández, J. Fröhlich, and A. Sokal, "Radom Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory," Springer, Berlin, Heidelberg, 1992.

[33] P.G.O. Freund, "Introduction to Supersymmetry," Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[34] F. Gesztesy and B. Simon, *Topological invariance of the Witten index*, J.Funct.Anal. **79** (1988), 91–102.

[35] F. Gesztesy and B. Simon, *Constructing solutions of the mKdV-equations*, J.Funct.Anal. **89** (1990), 53–60.

[36] F. Gesztesy, W. Schweiger and B. Simon, *Commutation methods applied to the mKdV-equation*, Trans.Amer.Math.Soc. **324** (1991), 465–525.

[37] E. Getzler, *Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Commun.Math.Phys. **92** (1983), 163–178.

[38] J. Glimm and A. Jaffe, "Quantum Physics (Second Ed.)," Springer, New York, 1987.

[39] I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek, "Classes of Linear Operators Vol.I," Birkhäuser, Basel, 1990.

[40] L. Gross, *Abstract Wiener spaces*, in "Proceedings of the Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability, Vol.II, Part 1," Univ. of California Press, Berkely, 1967.

[41] L. Gross, *On the formula of Mathews and Salam*, J.Funct.Anal. **25** (1977), 162–209.

[42] H. Grosse and L. Pittner, *Supersymmetric quantum mechanics defined as sesquilinear forms*, J.Phys.A:Math.Gen. **20** (1987), 4265-4284.

[43] R. Haag, "Local Quantum Physics," Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1992.

[44] T. Hida, J. Potthoff and L. Streit, *Dirichlet forms and white noise analysis*, Commun.Math.Phys. **116** (1988), 235–245.

[45] R. Hoegh-Krohn, *Relativistic quantum statistical mechanics in two-dimensional space-time*, Commun.Math.Phys. **38** (1974), 195–224.

[46] A. Jaffe, A. Lesniewski and M. Lewenstein, *Ground state structure in supersymmetric quantum mechanics*, Ann.Phys. (N.Y.) **178** (1987), 313–329.

[47] A. Jaffe, A. Lesniewski, and J. Weitsman, *Index of a family of Dirac operators on loop space*, Commun. Math. Phys. **112** (1987), 75-88.

[48] A. Jaffe, A. Lesniewski, and J. Weitsman, *The two-dimensional, $N = 2$ Wess-Zumino model on a cylinder*, Commun. Math. Phys. **114** (1988), 147-165.

[49] A. Jaffe, A. Lesniewski, *A priori estimates for the $N = 2$ Wess-Zumino model on a cylinder*, Commun. Math. Phys. **114** (1988), 553-575.

[50] A. Jaffe and A. Lesniewski, *Supersymmetric quantum fields and infinite dimensional analysis*, in "Nonperturbative Quantum Field Theory," (Ed. by G.'t Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P.K. Mitter and R. Stora), Plenum Press, New York, 1988.

[51] A. Jaffe, A. Lesniewski and J. Weitsman, *The loop space $S^1 \to \mathbb{R}$ and supersymmetric quantum fields*, Ann. Phys. (N.Y.) **183** (1988), 337-351.

[52] E. Kähler, *Der innere Differentialkalkül*, Rend.Mat. **21** (1962), 425-523.

[53] ミチオ　カク,『超弦理論』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 1989.

[54] T. Kato, "Perturbation Theory for Linear Operators," Second ed., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1976.

[55] I. Mitoma, *De Rham-Kodaira decomposition and fundamental spaces of Wiener functionals*, in "Gaussain Random Fields," World Scientific, Singapore, 1991, pp. 285–297.

[56] S. Pedersen, *Anticommuting self-adjoint operators*, J.Funct.Anal. **89** (1990), 428–443.

[57] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physicsss I: Functional Analysis," Academic Press, New York, 1972.

[58] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-adjointness," Academic Press, New York, 1975.

[59] M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators," Academic Press, New York, 1978.

[60] Yu.S. Samoilenko, "Spectral Theory of Families of Self-Adjoint Operators," Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[61] I. Segal, *Tensor algebra over Hilbert spaces I*, Trans.Amer.Soc. **81** (1956), 106– 134.

[62] I. Shigekawa, *De Rham-Hodge-Kodaira's decomposition on an abstract Wiener space*, J.Math.Kyoto Univ. **26** (1986), 191–202.

[63] B. Simon, "The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974.

[64] B. Simon, *Notes on infinite determinants of Hilbert space operators*, Adv. in Math. **24** (1977), 244-273.

[65] B. Simon, "Trace Ideals and Their Applications," London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol. 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.

[66] F.-H. Vasilescu, *Anticommuting self-adjoint operators*, Rev.Roum. Math.Pures et Appl. **28** (1983), 77–91.

[67] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity," Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.

[68] J. Wess and B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimensions*, Nucl.Phys. **B 70** (1974), 39-50.

[69] J. Wess and B. Zumino, *A Lagrangian model invariant under supergauge transformations*, Phys. Lett. **49B** (1974), 52-54.

[70] E. Witten, *Dynamical breaking of supersymetry*, Nuclear Phys. **B 185** (1981), 513–554.

[71] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nuclear Phys. **B 202** (1982), 253–316.

[72] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geometry **17** (1982), 661-692.

[73] E. Witten, *Topological quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), 353-386.