数理解析研究所講究録
第 875 巻 1994 年 30-46

ベルグマン核の不変式論

阪大理　小松　玄　(Gen Komatsu)

よく知られているように，コンパクトなリーマン多様体において熱核を考えると，初期時刻の近傍での漸近展開の係数はリーマン幾何の意味での局所不変量になっている．この事実の類似として強擬凸領域におけるベルグマン核の双正則写像に関する不変式論をつくろうというのが，Fefferman のプログラム [F3] である．ここで，リーマン幾何に対応するのは，強擬凸領域の境界上の CR 幾何である．本稿では，このプログラムに関する最近の進展についてやさしく概説する．

さらに詳しいことを知りたい読者のために，文献を挙げる．きちんと勉強したいときには [F1], [F3], [G1], [G3], [HKN1] を順に読まれたい．手っ取り早く流れを見たいときには [BFG], [G1], [KS] を眺められたい．もっと新しいことについては，本文中で言及する．

1　問題の説明

1.1. 強擬凸領域とはどんなものか？

背景（多変数函数論と微分幾何学）． 本論にはいる前の心理的な準備のために，まず背景について粗く述べる．複素一変数の正則函数が孤立特異点を許すのに対して，複素多変数の正則函数の特異点集合はコンパクトな範囲に収まらない．即ち，領域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$ からコンパクト集合 $\omega \subset\subset \Omega$ を取り除いた残り $\Omega \setminus \omega$ がもし連結ならば，$\Omega \setminus \omega$ における正則函数はすべて Ω における正則函数の制限として実現される．このような**同時解析接続**という現象は，ハルトークスによって発見された．同時解析接続できないような領域は，**正則領域**と呼ばれる．(同時解析接続が一価であるか否かは本質的でない．) 即ち，正則領域は正則函数の本来のすみか（棲息領域）である．ハルトークスは，正則領域には何らかの凸性があるということに気付いていた．凸領域は正則領域であるが，凸であるという性質は正則な座標変換によって不変な概念でない．偏微分方程式論でも有名な E. E. Levi は，正則領域が擬凸という性質を持つことを発見し，擬凸領域は正則領域であろうと予想した（正則領域の特徴付け）．これがレヴィの問題であり，岡潔先生によって肯定的に解かれたことはよく知られている．

強擬凸領域は，C^2 級の境界を持つ generic な擬凸領域である．強擬凸領域の境界が滑らかなときには（C^∞ 級または実解析的としよう），そこで微分幾何をすることができる．ポアンカレは,「正則領域を分類せよ」という正則同値問題に挑戦するために，複素二次元の強擬凸領域の境界の微分幾何をやろうとした．これはその後 Elie Cartan の擬共形幾何（強擬凸領域の境界の CR 幾何）として実現された．高次元化はずっと最近になってのことで，田中昇先生や Chern-Moser によるものである．本稿にも現われる CR 不変量は，Moser の標準形（強擬凸領域の境界の局所的な標準形）を用いて定義される．

強擬凸性の定義． 素朴な定義から始めよう．複素領域が**強擬凸領域**であるとは，各境界点が強擬凸なことである．複素領域の境界点が**強擬凸**であるとは，境界がその点の近傍で正則な座標変換の後に狭義に凸（定義函数のヘッシアンが正定値）になることである．

強擬凸領域は，各境界点の近傍で局所的に球の摂動である．詳しく述べれば，標準的な複素座標を

$$z=(z',z_n)\in\mathbf{C}^n,\quad z_n=u+iv\in\mathbf{C}$$

とかいたとき，参照境界点を原点にうつす正則な座標変換の後に，強擬凸領域 Ω は原点の近傍で局所的に

$$\Omega:\ 2u>|z'|^2+F(z',\overline{z'},v),\qquad F=O^4(|z'|)\quad \Bigl(\text{即ち}\ |F|\le\exists\,\mathrm{const.}\,|z'|^4\Bigr)$$

となる．$F=0$ の領域は球と正則同値である．

球について． 一昔前には，$\mathbf{C}^n\simeq\mathbf{R}^{2n}$ 内の球のことを超球と呼んだ．以下，超球と呼ばずに単に球と呼ぶ．多変数函数論の初歩において単位円板のような基本的な役割を果たすのは球でなく多重円板（円板の直積）であるが，強擬凸領域の解析においては球が最も簡単なモデル領域となる．

複素一変数の場合には，単位円板は上半平面と一次分数変換によって正則同値である．複素多変数の場合には，球はジーゲルの一般化された上半空間 (本質的には $F=0$ の領域) と一次分数変換によって正則同値である．この領域の境界は，最も簡単な非可換リー群であるハイゼンベルグ群と同一視できる．

強擬凸性の intrinsic な定義． 滑らかな境界を持つ複素領域に対して，その境界点が強擬凸であるとはレヴィ形式がその点で正定値なことであり，擬凸であるとはレヴィ形式がその点で半正定値なことである．(すべての境界点が擬凸であるような領域は擬凸領域であり，

境界が滑らかであれば逆も成り立つ.）すぐ後でレヴィ形式の定義も復習するが，その前にレヴィ形式の行列式にあたるレヴィの行列式を説明しよう．定義函数を用いて領域を

$$\Omega=\{z;\ \rho(z)>0\},\quad \partial\Omega=\{z;\ \rho(z)=0\},\quad |\mathrm{grad}\,\rho(z)|>0 \text{ on } \partial\Omega$$

とかいたとき，**レヴィの行列式**は次のように定義される：

$$J[\rho](z)=(-1)^n \det\begin{pmatrix}\rho(z) & \rho_{\overline{k}}(z)\\ \rho_j(z) & \rho_{j\overline{k}}(z)\end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

但しここで，ρ の下添字 $j,\overline{k}$ はそれぞれ変数 $z_j,\overline{z}_k$ に関する偏微分を表わす．境界点 z が強擬凸ならば，$J[\rho](z)>0$ である．

レヴィ形式の定義． 複素領域の定義函数 ρ が与えられたとき，領域の境界点 z における**レヴィ形式**とは，次を極化して得られる $n-1$ 次元エルミート形式のことである：

$$\sum_{j,k=1}^{n}\rho_{j\overline{k}}(z)\,\xi_j\,\overline{\xi}_k \qquad \text{for } \xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n \text{ satisfying } \sum_{j=1}^{n}\rho_j(z)\,\xi_j=0.$$

もう少し幾何学的に述べるために，ファイバー次元が $n-1$ の $\partial\Omega$ 上の複素ベクトル・バンドル $T^{1,0}(\partial\Omega)=\mathbf{C}T(\partial\Omega)\cap T^{1,0}(\mathbf{C}^n)|_{\partial\Omega}$ を考える．このとき，上のような $\xi\in\mathbf{C}^n$ は境界点 z 上のファイバーの元であり，レヴィ形式は次のエルミート形式によって与えられる：

$$\langle\partial\overline{\partial}\rho, Z\wedge\overline{W}\rangle \qquad \text{for } Z,W\in T^{1,0}(\partial\Omega).$$

よって，レヴィ形式の符号は定義函数 ρ の選び方に依存しない．ベクトルをセクションに拡張すれば，$\langle\partial\overline{\partial}\rho, Z\wedge\overline{W}\rangle=-\langle\overline{\partial}\rho,[Z,\overline{W}]\rangle$ ともかける．ここで（強擬凸な場合のうちで）交換関係が最も簡単になるのが，ハイゼンベルグ群のリー環である．この意味でも，球は最も簡単な強擬凸領域（モデル領域）である．

1.2. ベルグマン核とはどんなものか？

ベルグマン核の定義． 複素領域 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ に付随するベルグマン核は，ヒルベルト空間 $H^{\mathrm{B}}(\Omega)=L^2(\Omega)\cap\mathcal{O}(\Omega)$ の完全正規直交系 $\{h_j\}_j$ を使って

$$K^{\mathrm{B}}(z,w)=\sum_j h_j(z)\,\overline{h_j(w)} \qquad \text{for } z,w\in\Omega \tag{1.2}$$

によって定義される．これは完全正規直交系の選び方に依存しない．ヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ からその閉部分空間 $H^{\mathrm{B}}(\Omega)$ の上への直交射影子を $\mathbf{K}^{\mathrm{B}}$ とかいたとき，

$$\mathbf{K}^{\mathrm{B}}u(z)=\int_\Omega K^{\mathrm{B}}(z,w)\,u(w)\,dV(w)\quad \text{for } u\in L^2(\Omega)$$

が成り立つ．あるいは，むしろこれをベルグマン核の定義と思ってもよい．対角集合への制限 $K^{\mathrm{B}}(z) = K^{\mathrm{B}}(z,z)$ をもベルグマン核と呼ぶ．対角集合以外での値 $K^{\mathrm{B}}(z,w)$ は，対角集合への制限 $K^{\mathrm{B}}(z)$ から複素化（解析接続）によって復元できる．

予備的な注意． ベルグマン核の定義式 (1.2) の右辺の級数は，直積集合 $\Omega \times \Omega$ において広義一様収束する．そのことは，次の不等式を用いて示される：

$$\sup_{z \in \omega} |h(z)| \le C_\omega \|h\|_{L^2} \qquad \text{for } h \in H^{\mathrm{B}}(\Omega), \quad \omega \subset\subset \Omega.$$

ここで $C_\omega > 0$ は ω を与えるごとに存在する定数である．この不等式は，空間 $H^{\mathrm{B}}(\Omega)$ が完備であることの証明にも使われる．

領域 Ω が単位球の場合には，定義 (1.2) を使ってベルグマン核が計算される：

$$K^{\mathrm{B}}(z,w) = \frac{n!/\pi^n}{(1 - z \cdot \overline{w})^{n+1}} \qquad \text{when} \quad \Omega = \{z \in \mathbf{C}^n;\ |z| < 1\}.$$

ベルグマン核は，双正則写像 $\Phi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ による変換則をみたす：

$$K^{\mathrm{B}}(z) = \widetilde{K}^{\mathrm{B}}(\Phi(z))\,|\det \Phi'(z)|^2 \qquad \text{for } z \in \Omega.$$

ここで $\widetilde{K}^{\mathrm{B}}$ は，領域 $\widetilde{\Omega}$ に付随するベルグマン核である．(以後，紛らわしくないときには，同様の記法をいちいち断らずに用いる．)

$n = 1$ の場合． 領域が複素一次元の場合には，グリーン函数 $G(z,w)$ を使ってベルグマン核を表わすことができる（Schiffer による）：

$$K^{\mathrm{B}}(z,w) = \text{const.}\,\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \overline{w}}(z,w) \qquad \text{for } z, w \in \Omega. \tag{1.3}$$

右辺に現れる定数は実数で，グリーン函数の正規化の仕方に応じて決まる．

この式 (1.3) について少し説明を補足しよう．右辺はエルミート対称でかつ z に関しても $\overline{w}$ に関しても正則であるから，この等式はまことにもっともらしい．ただ，グリーン函数の特異性 $\log|z - w|$ がどこに行ったのか気になるが，それは微分 $\partial_z \partial_{\overline{w}}$ の作用で消されているのである（但し境界には特異性が残る）．微分を超函数の意味で取れば何か残るが，積分核の関係式 (1.3) を作用素の関係式に書き直せば，仕組がよくわかる：

$$\mathbf{K}^{\mathrm{B}} = \text{恒等作用素} - \text{const.}\,\overline{\partial}^{*}\,\mathbf{G}\,\overline{\partial} \qquad (\mathbf{G}\ \text{はグリーン作用素}).$$

この等式の証明は，「特異点のまわりをくりぬいて，部分積分してから穴をつぶす」という例の奴である．高次元の場合にも，この等式は（適当な仮定の下で）成り立つ．但し，グリーン作用素を $\overline{\partial}$ ノイマン作用素で置き換える．

関係式 (1.3) とグリーン函数の性質により，ベルグマン核が境界点の近傍に局所化できることがわかる．よって，リーマンの写像函数の境界まで込めての平滑性を使えば，ベルグマン核の特異性の形が単位円板の場合からわかる．即ち，特異点集合は（$\overline{\Omega}$ の直積集合の中で）$\partial\Omega \times \partial\Omega$ の対角集合であり，特異性の強さは主値積分核やデルタ函数と同じレベルである．対角集合に制限すると，境界に近づいたときの増大度は

$$0 < C_- \le K^{\mathrm{B}}(z) \cdot \mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega)^2 \le C_+ < +\infty \qquad (C_\pm > 0 \text{ は定数})$$

である．

強擬凸領域の場合． Ω が強擬凸領域のときにも，ベルグマン核の特異点集合の形は複素一次元の場合と同じである：ベルグマン核は $\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right) \setminus (\text{diagonal of } \partial\Omega \times \partial\Omega)$ において滑らかである（Kerzman による）．特異性の強さも同様で，Hörmander によれば，

$$0 < C_- \le K^{\mathrm{B}}(z) \cdot \mathrm{dist}\,(z, \partial\Omega)^{n+1} \le C_+ < +\infty \qquad (C_\pm > 0 \text{ は定数})$$

である．しかし，特異性の形は複素一次元の場合と少し違う．領域 Ω の定義函数 ρ を一つ指定したときに,［ρ の負べき］＋［ρ の対数］という超幾何函数の形の特異性をしている．正確に述べよう．

Fefferman の基本定理 [F1]. C^∞ 級の境界を持つ有界な強擬凸領域 Ω に付随するベルグマン核の特異性は，

$$\frac{\pi^n}{n!}\,K^{\mathrm{B}}(z) = \frac{\varphi^{\mathrm{B}}(z)}{\rho(z)^{n+1}} + \psi^{\mathrm{B}}(z)\,\log\rho(z) \tag{1.4}$$

という形をしている．但しここで $\varphi^{\mathrm{B}}, \psi^{\mathrm{B}} \in C^\infty$ up to $\partial\Omega$ であり，式 (1.1) によって定義されたレヴィの行列式に対して$\varphi^{\mathrm{B}} = J[\rho]$ on $\partial\Omega$ が成り立つ．

注意． この定理に関する注意を少し補足する．

(a) 特異性を境界点の近傍に局所化することができる．即ち，二つの強擬凸領域がある境界点の近傍を共有すれば，ベルグマン核の差はその点の近傍で滑らかである．

(b) 実解析的な枠でも定理が成り立つ（柏原正樹先生による）．即ち，境界がある境界点の近傍で実解析的ならば，φ^{B} と ψ^{B} もその点の近傍で実解析的である．

(c) Boutet de Monvel-Sjöstrand [BS] によれば，ベルグマン核の特異性をラプラス積分（複素相函数のフーリエ積分作用素）で書くことができ，それにより上の定理を対角集合以外に複素化できる．即ち，定義函数 ρ の複素化（の類似物）を使って，

$$K^{\mathrm{B}}(z, w) \sim \int_0^\infty \exp[-\,t\rho(z, w)]\,p^{\mathrm{B}}(z, w, t)\,dt \quad \mathrm{mod}\ \ C^\infty,$$

$$p^{\mathrm{B}}(z,w,t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} t^{n-j}\, p_j^{\mathrm{B}}(z,w) \qquad \text{(表象の漸近展開)}$$

とかくことができる．但しここで，$\rho(z)$ の複素化の類似物 $\rho(z,w)$ というのは almost analytic extension と呼ばれるもので，

$$\rho(z,z)=\rho(z), \qquad \overline{\rho(z,w)}=\rho(w,z), \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\overline{z}}(z,w)\sim 0$$

をみたす．最後の式に現れる波 $\sim$ は，$z=w\in\partial\Omega$ におけるテイラー係数がすべて消えるという意味である．ここでラプラス積分（アダマールの有限部分）の復習をしておくと：

$$\int_0^\infty t^m\, e^{-pt}\, dt = \frac{\Gamma(m+1)}{p^{m+1}} \qquad (m=0,1,2,\ldots),$$

$$\mathrm{pf}\int_0^\infty t^{-m}\, e^{-pt}\, dt = \frac{(-1)^m p^{m-1}}{(m-1)!}\,(\log p + \exists\, C_m) \qquad (m=1,2,\ldots).$$

1.3. どんな不変式論を考えるのか？

双正則変換則． ベルグマン核のように，領域を与えると決まる領域上の函数のことを，領域汎函数と呼ぶ．領域汎函数 K がウェイト w の**内部変換則**をみたすとは，任意の双正則写像 $\Phi:\Omega\to\widetilde{\Omega}$ に対して

$$K(z)=\widetilde{K}(\Phi(z))\,|\det\Phi'(z)|^{2w/(n+1)} \qquad \text{for}\ \ z\in\Omega$$

が成り立つことである．このとき $\mathrm{w}(K)=w$ とかく．ここで内部変換則と呼んだのは，後で「境界汎函数に対する境界変換則」を考えるので，それとの区別を明確にするためである．ベルグマン核は，ウェイト $n+1$ の内部変換則をみたす．

定義函数の選び方（もくろみ）． 領域の定義函数 ρ の選び方には任意性がある．ウェイト -1 の内部変換則をみたすものを取りたい．もしそうできれば，(1.4) において

$$\mathrm{w}\left(\varphi^{\mathrm{B}}\right)=0 \mod O^{n+1}(\rho), \qquad \mathrm{w}\left(\psi^{\mathrm{B}}\right)=n+1 \mod O^{\infty}(\rho)$$

となって都合がよい．詳しくは，$T=|\det\Phi'|^{2/(n+1)}$ とおくと，

$$\varphi^{\mathrm{B}}-\widetilde{\varphi}^{\mathrm{B}}\circ\Phi=O^{n+1}(\rho), \qquad \psi^{\mathrm{B}}-\widetilde{\psi}^{\mathrm{B}}\circ\Phi\cdot T^{n+1}=O^{N}(\rho) \quad (\forall N\in\mathrm{N}).$$

仮に $\mathrm{w}(\rho)=-1$ をみたす定義函数 ρ があったとして，そのべきで φ^{B} と ψ^{B} を展開する：

$$\varphi^{\mathrm{B}}=\sum_{j=0}^{n}\varphi_j^{\mathrm{B}}\,\rho^j+O^{n+1}(\rho), \qquad \psi^{\mathrm{B}}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k^{\mathrm{B}}\,\rho^k \mod O^{\infty}(\rho). \tag{1.5}$$

但しここで $\varphi_j^{\mathrm{B}}, \psi_k^{\mathrm{B}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ であり，これらは境界 $\partial\Omega$ 上の函数でないから，上の展開 (1.5) はテイラー展開でない.（また，φ^{B} の右辺の $O^{n+1}(\rho)$ はベルグマン核の特異性には関係ない部分である.）このとき，

$$\mathrm{w}\left(\varphi_j^{\mathrm{B}}\right) = j \mod O^{n+1-j}(\rho) \qquad (0 \le j \le n),$$
$$\mathrm{w}\left(\psi_k^{\mathrm{B}}\right) = n+1+k \mod O^{\infty}(\rho) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

となって都合がよい.

さて，ベルグマン核の特異性は境界点の近傍に局所化できるのであるから，それに合わせて内部変換則も局所化して考える．また，定義函数も局所化できるものを取りたい.

現実. 以上，虫がいいもくろみを説明したが，それに対する現実（知られていること）をここで粗く述べる．正確なことは後で述べる.

複素モンジュ・アンペール境界値問題の解 u^{MA} が一意的に存在し，それはウェイト -1 の変換則をみたす定義函数であるが，境界まで込めて有限階の微分可能性しか持たない. u^{MA} は漸近展開を許し，さらに漸近展開はある意味で局所化できる.

u^{MA} の滑らかな近似解を局所的に構成することができるが，それを使って上のもくろみのようにベルグマン核を漸近展開しようとすると，変換則が誤差を含んでボケることによって展開が途中で止まる（φ^{B} の展開を表わすことはできる）．この難点は，u^{MA} の漸近展開を使うことによって，2 次元の場合には克服できる（ψ^{B} の展開を表わすこともできる）.

熱核との比較. 熱方程式に対する初期値問題の基本解は，熱核と呼ばれる．復習しよう. M をコンパクトなリーマン多様体とするとき，熱方程式に対する初期値問題

$$(\partial/\partial t - \Delta_x)u(t,x) = 0 \quad (t > 0,\ x \in M), \qquad u(+0,x) = u_0(x) \quad (x \in M)$$

は一意的な解を持ち，

$$u(t,x) = \int_M H(t,x,y)\, u_0(y)\, dV_M(y)$$

という形をしている．この $H(t,x,y)$ が熱核である．あるいは，ラプラシアンの固有値と固有函数（の完全正規直交系）を用いて

$$H(t,x,y) = \sum_j e^{-\lambda_j t}\, \varphi_j(x)\, \varphi_j(y) \qquad (-\Delta\varphi_j = \lambda_j \varphi_j)$$

とかくこともできる.

熱核は $t>0$ において滑らかであるが，$t=+0$ のとき $H(+0,x,y)=\delta_x(y)$ という形の特異性を持つ．また，$t\downarrow 0$ のとき，次の漸近展開を許す：

$$H(t,x,y)\sim\frac{\exp[-\mathrm{dist}(x,y)^2/4t]}{(4\pi t)^{n/2}}\sum_{j=0}^{\infty}H_j(x,y)\,t^j,$$

$$H(t,x,x)\sim\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\sum_{j=0}^{\infty}H_j(x,x)\,t^j$$

ここで $H_j(x,x)$ はすべてリーマン幾何の意味での局所不変量である．

熱核とベルグマン核の類似点と相違点を粗く見よう．特異性の形については，熱核における時間変数の役割を，ベルグマン核においては領域の定義函数が果たしている．但し，熱核の定義域が時間変数と空間変数に (t,x) と変数分離されているのに対して，ベルグマン核の定義域を領域の定義函数と境界の座標に自然に変数分離することはできない．だから (1.5) がテイラー展開でない．

微分幾何学的に同値問題を考えるときには，等長変換を双正則変換（の境界値）で置き換える．局所的に考えるときには，イソトロピー（参照境界点を固定する局所自己同型）による作用で割っておく必要がある．最も簡単なモデル領域である球のイソトロピーの形を反映して，不変式論の代数的な構造も熱核とベルグマン核とでは異なる．熱核からベルグマン核にうつるときには，直交群を特殊ユニタリー群の放物型部分群で置き換える．

2 不変量

2.1. CR 不変量 (境界不変量).

CR 不変量の定義． 用語の説明を後回しにして，まず定義を述べる．**CR 不変量**とは，

(1) 境界変換則をみたす境界汎函数であり， (2) Moser の標準形の係数の多項式である．

条件 (1) と (2) について説明する前に，条件 (2) に関して次のことを注意しておく．CR 不変量は，境界の形から局所的に決まる．また，Moser の標準形は境界の形から一意的には定まらないが，CR 不変量を与える多項式の形は標準形の選び方に依存しない．

双正則変換則． 条件 (1) について説明する．領域を与えると決まる境界上の函数のことを**境界汎函数**と呼び，領域汎函数に対する内部変換則に対応して，境界汎函数に対する境界変換則を考える．境界汎函数 K がウェイト w の**境界変換則**をみたすとは，(境界まで込めて滑らかな) 任意の双正則写像 $\Phi:\Omega\to\widetilde{\Omega}$ に対して，

$$K(z)=\widetilde{K}(\Phi(z))\,|\det\Phi'(z)|^{2w/(n+1)}\qquad\text{for }\ z\in\partial\Omega$$

が成り立つことである．内部変換則の場合と同様に，境界変換則も参照境界点の近傍に局所化して考える．

Moser の標準形． 条件 (2) について説明する．予備的な注意から始める．Moser の標準形は，境界が実解析的なときには存在するが，境界が C^∞ のときには存在するとは限らない．そこで，境界が C^∞ のときには，収束べき級数を形式的べき級数で置き換えたものを考え，それで標準形の代用とする．以下，境界は実解析的であると仮定する．

まず，プレ標準形の定義をする．標準的な複素座標を

$$z=(z',z_n)\in\mathbf{C}^n,\quad z_n=u+iv\in\mathbf{C}$$

とかく．正則な座標変換の後に，原点の近傍で局所的に

$$\Omega:\ 2u>|z'|^2+F(z',\overline{z'},v),\qquad F=O^4(|z'|) \tag{2.1}$$

とすることができる．但し F は実解析的な函数であって，次の形にテイラー展開される：

$$F(z',\overline{z'},v)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\ge 2}A_{\alpha\overline{\beta}}(v)\,z'_\alpha\,\overline{z'_\beta}\,,\qquad A_{\alpha\overline{\beta}}(v)=\sum_{\ell=0}^{\infty}A^{\ell}_{\alpha\overline{\beta}}\,v^{\ell}. \tag{2.2}$$

ここで通常とは少し違う多重添数の記法を用いた．即ち，

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_a)\qquad(1\le\alpha_j\le n-1,\ a\in\mathbf{N})$$

に対して，$z'_\alpha=z_{\alpha_1}\cdots z_{\alpha_a}$ および $|\alpha|=a$ とかいた．特に $n=2$ の場合には

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_a=1,\qquad z'_\alpha=z_1^a\qquad(\text{但し } z'=z_1,\ |\alpha|=a)$$

となるが，このときには通常通りに

$$F(z_1,\overline{z}_1,v)=\sum_{a,b\ge 2}A_{a\overline{b}}(v)\,z_1^a\,\overline{z}_1^b\,,\qquad A_{a\overline{b}}(v)=\sum_{\ell=0}^{\infty}A^{\ell}_{a\overline{b}}\,v^{\ell}$$

とかく．次のように正規化することができる：中間的な展開の係数 $A_{\alpha\overline{\beta}}(v)$ は，エルミート対称であり，さらに α,β それぞれの置換に関して不変である．このような Ω の局所的な表示 (2.1) または級数 (2.2) をここで仮に**プレ標準形**と呼ぶ．

プレ標準形が次の三つのトレース条件をみたすとき，**Moser の標準形**と呼ばれる：

$$\operatorname{tr}A_{2\overline{2}}(v)=0,\quad(\operatorname{tr})^2A_{2\overline{3}}(v)=0,\quad(\operatorname{tr})^3A_{3\overline{3}}(v)=0.$$

但しここで，tr はトレースの略で，クロネッカーのデルタ $\delta^{j\overline{k}}$ を用いて $A_{\alpha\overline{\beta}}(v)$ の添字 α,β に関して縮約をすることを表わす．（詳しく書かなかったが，三つのトレース条件の各々において $(|\alpha|,|\beta|)=(2,2),(2,3),(3,3)$ である．）

注意. Moser の標準形に関する注意を少し補足する.

(a) プレ標準形を標準形にうつす写像は, 恒等写像に近いという条件の下で一意的である. その条件についてはここでは述べない (例えば [BFG] をみられたい).

(b) 標準形は, 境界が球面と局所的に正則同値な場合に限って一意的である. 非一意性の度合は, イソトロピー (即ち, 参照点を固定する局所自己同型群) によって測られる. 球面のイソトロピーは, 一次分数変換によって与えられる.

(c) 領域が 2 次元の場合には, 初めの若干項が消えて表示が簡単になる. 具体的には

$$F(z_1, \overline{z}_1, v) = 2\,\mathrm{Re}\left(A^0_{2\overline{4}}\, z_1^2\, \overline{z}_1^4\right) + \cdots$$

であって, $\cdots$ は $a, b \geq 2$ および $a + b \geq 7$ をみたす $A_{a\overline{b}}(v)\, z_1^a\, \overline{z}_1^b$ の和である.

CR 不変量の具体的な形. ウェイト w の CR 不変量全体の成すベクトル空間を I^{CR}_w とおき, その次元を d^{CR}_w とかく. 明らかに, I^{CR}_0 は定数から成る. 次のことが知られている. (次元 $n = 2$ の場合の I^{CR}_5 については [HKN2] を見られたい. それ以外の結果は Robin Graham [G1] による.)

次元 $n \geq 3$ の場合には $d^{\mathrm{CR}}_1 = 0$, $d^{\mathrm{CR}}_2 = 1$ であって, I^{CR}_2 は

$$\left\|A^0_{2\overline{2}}\right\|^2 = \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} \left|A^0_{\alpha\overline{\beta}}\right|^2$$

によって生成される.

次元 $n = 2$ の場合には $d^{\mathrm{CR}}_1 = d^{\mathrm{CR}}_2 = 0$, $d^{\mathrm{CR}}_3 = d^{\mathrm{CR}}_4 = 1$, $d^{\mathrm{CR}}_5 = 2$ である. I^{CR}_3 と I^{CR}_4 はそれぞれ $A^0_{4\overline{4}}$ および $|A^0_{2\overline{4}}|^2$ によって生成される. また,

$$P(a, b, c, d) = a\,\mathrm{Im}\left(A^0_{2\overline{4}}\, A^1_{4\overline{2}}\right) + b\,\mathrm{Re}\left(A^0_{2\overline{4}}\, A^0_{5\overline{3}}\right) + c\left|A^0_{3\overline{4}}\right|^2 + d\left|A^0_{2\overline{5}}\right|^2$$

とおくと,

$$I^{\mathrm{CR}}_5 = \left\{P(a, b, c, d);\ c = \frac{9a}{2} + \frac{9b}{4},\ d = \frac{5a}{2} + \frac{3b}{4}\right\}.$$

以上の結果をベルグマン核の不変式論に使うときには, CR 不変量の領域内部への拡張が問題になる. (局所的な内部変換則を近似的にみたすように拡張する.) また, CR 不変量の定義における条件 (2) については, 話が細かくなるのを避けるため, 以後, 正確には注意しない. (第 3 節において「CR 不変量の形から」という表現を使うが, 厳密にいえばこの条件 (2) を考慮する必要がある.)

2.2. 複素モンジュ・アンペール境界値問題.

境界値問題 (MA). Find $u = u^{\mathrm{MA}}$ in Ω such that

$$J[u] = 1 \quad (\text{and } u > 0) \quad in\ \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

この境界値問題 (MA) の幾何学的な意味については後にワイル不変量の項目で述べることにして，知られている結果を挙げよう.

大域的な結果. 境界まで込めて有限階の微分可能性をもつ解の一意存在が，Cheng-Yau [CY] によって示されている：

$$u^{\mathrm{MA}} \in C^\infty(\Omega) \cap C^{n+3/2-\varepsilon}(\overline{\Omega}) \qquad (\forall \varepsilon > 0). \tag{2.3}$$

この解の漸近展開が，Lee-Melrose [LM] によって得られている．即ち，領域の定義函数 ρ を一つ指定すると，

$$u^{\mathrm{MA}} \sim \rho \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \cdot \left(\rho^{n+1} \log \rho\right)^k, \qquad \eta_k \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{2.4}$$

よって特に，(2.3) より詳しく $u^{\mathrm{MA}} \in C^\infty(\Omega) \cap C^{n+2-\varepsilon}(\overline{\Omega})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ が成り立つ.

局所的な結果. 上に述べた大域的な結果に先立って，Fefferman [F2] は滑らかな近似解を境界点の近傍で局所的に構成した．その方法は，解析的な常微分方程式の級数解の構成法にならったもので，境界値問題を初期値問題のように考えて，行けるところまで行くのである．このようなやり方でかなりよい近似解が得られるのは，モンジュ・アンペール方程式の特殊性によるもので，ある意味では非線形だからやさしいのである.

Fefferman の結果を正確に述べよう．$0 \in \partial\Omega$ と仮定し，原点の近傍で局所的に考える．定義函数 ρ を一つ任意に取っておく．このとき，

Fefferman の定理 [F2]．原点の近傍で，領域 Ω の局所的な定義函数 $r = r^{\mathrm{F}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ が $O^{n+2}(\rho)$ の誤差で一意的に存在して，次の条件をみたす：

$$J\left[r^{\mathrm{F}}\right] = 1 + O^{n+1}(\rho), \qquad \mathrm{w}\left(r^{\mathrm{F}}\right) = -1 \mod O^{n+2}(\rho).$$

即ち，r^{F} は境界まで込めて滑らかな問題 (MA) の局所的な近似解であり，ウェイト -1 の内部変換則を近似的にみたす近似的な領域汎函数である.

さて，Lee-Melrose による漸近展開 (2.4) は局所化できる．Robin Graham [G1], [G2] は，上の Fefferman のアイディアを推し進めて，漸近展開 (2.4) に対応する形式的な漸近解の

構造を調べた．二階の偏微分方程式に対する零ディリクレ境界値問題を初期値問題的に考えるのであるから，初期値が一つ足りない．そこで境界上の函数を一つ任意に与えて足りない初期値のかわりとして，その函数を決めるごとに漸近解を構成するのである．正確に述べよう．

Robin Graham の定理 ([G1], [G2])． $r = r^{\mathrm{F}}$ とし，$a \in C^\infty(\partial\Omega)$ を任意に一つ指定しておくと，原点の近傍で局所的に決まる形式的な級数

$$u^{\mathrm{G}} = r \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^{\mathrm{G}} \cdot \left(r^{n+1} \log r\right)^k, \qquad \eta_k^{\mathrm{G}} \in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{2.5}$$

が一意的に存在して，次をみたす：

$$J\left[u^{\mathrm{G}}\right] = 1 \quad (\text{形式的に}), \qquad \eta_0^{\mathrm{G}} = 1 + a\, r^{n+1} + O^{n+2}(r).$$

Robin Graham の定理を補足する．漸近級数 (2.5) の係数 η_k^{G} を $O^{n+1}(\rho)$ の誤差で考えたものは，a の選び方に依存せず，$\mathrm{w}\left(\eta_k^{\mathrm{G}}\right) = k(n+1) \bmod O^{n+1}(\rho)$ をみたす．また，η_k^{G} の境界値は（ウェイト $k(n+1)$ の）CR 不変量である．特に $n = 2$ のときには，η_1^{G} の境界値は $4\, A^0_{4\bar{4}}$ である．

2.3. ワイル不変量.

変換則を記述するバンドル. Fefferman [F2], [F3] は，Ω 上の $\mathbf{C}^*$ バンドルの上に Kähler-Lorentz 計量を与え，その曲率テンソルの微分多項式としてワイル不変量を定義した．このバンドルは，双正則変換則を記述するもので，成木勇夫先生のアイディアにヒントを得ている．具体的に述べよう．まず

$$E = \mathbf{C}^* \times \Omega \ni (z_0, z), \qquad \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

とおき，双正則写像 $\Phi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ をバンドル写像 $\Phi^\# : E \to \widetilde{E}$ にリフトする規則を

$$\widetilde{z}_0 = z_0 \left[\det \Phi'(z)\right]^{1/(n+1)}, \quad \widetilde{z} = z \qquad (\text{但し } (\widetilde{z}_0, \widetilde{z}\,) = \Phi^\#(z_0, z))$$

によって定める．この操作を局所的に行なって変換函数を決めれば，Ω 上の $\mathbf{C}^*$ バンドル E が定義される．(実際に使うのは Ω 全体でなく与えられた境界点の近くだけである．)

次に，ウェイト w の内部変換則をみたす Ω 上の函数 K を E にリフトする．$(\widetilde{z}_0, \widetilde{z})$ の定義と内部変換則より $K(z)\,|z_0|^{2w} = \widetilde{K}(\widetilde{z})\,|\widetilde{z}_0|^{2w}$ であるから，

$$K^\#(z_0, z) = K(z)\,|z_0|^{2w} \quad \text{とおけば，} \quad K^\#(z_0, z) = \widetilde{K}^\#(\widetilde{z}_0, \widetilde{z}).$$

即ち，$K^{\#}$ は E 上の函数として well-defined である．よって，ウェイト w の変換則をみたす Ω 上の函数は，E 上の函数で $|z_0|^2$ に関して w 次斉次なものと同一視される．

境界変換則をみたす函数についても同様である．(まず $\partial\Omega$ 上の $\mathbf{C}^*$ バンドルを上の操作で定義して，それから境界変換則をみたす函数をそのバンドルにリフトする．)

複素モンジュ・アンペール境界値問題の意味． Ω 上に完備な Einstein-Kähler 計量が（正規化の後に）一意的に存在し，そのポテンシャル函数を v とすると $u^{\mathrm{MA}} = \exp[-v]$ が成り立つ（Cheng-Yau [CY] による）．

さて $-|z_0|^2\, u^{\mathrm{MA}}$ はバンドル E 上で well-defined であるが，これをポテンシャル函数として E 上に Lorentz-Kähler 計量を定める．この計量は Ricci 平坦である．

ワイル不変量の定義． 上の Lorentz-Kähler 計量の曲率テンソル R を共変微分したもののテンソル積をつくり，それをスカラーになるまで縮約して

$$W^{\#}(z_0, z) = \mathrm{trace}\left(\nabla^p \overline{\nabla}^q R \otimes \cdots \otimes \nabla^r \overline{\nabla}^s R\right)$$

という形のものをつくると，これは内部変換則をみたし，

$$W^{\#}(z_0, z) = W(z)\, |z_0|^{-2w}$$

という形をしている．このとき，E 上の $W^{\#}(z_0, z)$ とΩ上の $W(z)$ を共に，ウェイト w の**ワイル不変量**と呼ぶ．u^{MA} は境界まで込めて $n+1$ 階しか微分可能でないから，ワイル不変量としては $n+1$ 階以下の微分しか含まないものだけを考える．u^{MA}を滑らかな近似解 r^{F} で置き換えたときにも同様にする．(微分可能性はあるが，かわりに変換則が誤差を含んでボケる．ボケても意味のある範囲でのみ考える．)

ワイル不変量の境界値． ウェイト $\leq n$ のワイル不変量が well-defined であり，それらの境界値は CR 不変量である．逆に，ウェイト $\leq n$ の CR 不変量は，ワイル不変量の境界値の線形結合である．以上の結果は Fefferman [F3] と Bailey-Eastwood-Graham [BEG] による．(但し [BEG] のプレプリントは未入手；[G3] を見られたい．) これで (1.4) における φ^{B} を表わすためには充分である（$\rho = r^{\mathrm{F}}$ と取る）．

2次元の場合． $n = 2$ のときには Moser の標準形において次数の低い部分が簡単になるので，ウェイト ≤ 5 のワイル不変量が well-defined であり，それらの境界値は CR 不変量である．逆に，ウェイト ≤ 5（かつウェイト $\neq 3$）の CR 不変量は，ワイル不変量の境界値の線形結合である．(以上，[HKN2] を見られたい．)

ウェイトが 3 の CR 不変量（$A^0_{44\bar{}}$ の定数倍）は，η^{G}_0 の境界値の定数倍である（前節 2.2 の最後に述べた）．従って，ワイル不変量の定義を拡張して

$$\mathrm{trace}\left(\nabla^p\overline{\nabla}^q R\otimes\cdots\otimes\nabla^r\overline{\nabla}^s R\otimes\nabla^a\overline{\nabla}^b(\eta^{\mathrm{G}}_j)^{\#}\otimes\cdots\otimes\nabla^c\overline{\nabla}^d(\eta^{\mathrm{G}}_k)^{\#}\right)$$

という形のものも許せば，ウェイト ≤ 5 の CR 不変量は一般化されたワイル不変量の境界値の線形結合である．

少し工夫をすると，ウェイト ≥ 6 のワイル不変量を定義することもできる（3.2 節「完全な展開」の項を見られたい）．

3　ベルグマン核の不変式論.

3.1. 高次元の結果.

$n\geq 3$ と仮定する．表示式 (1.4) における φ^{B} と ψ^{B} のうちで，まず φ^{B} に関する結果を述べる．

φ^{B} に関する一般論. 問題は，Fefferman の近似解 $r=r^{\mathrm{F}}$ を用いて φ^{B} を局所的に

$$\varphi^{\mathrm{B}}=\sum_{j=0}^{n}\varphi^{\mathrm{B}}_j r^j+O^{n+1}(r),\qquad \varphi^{\mathrm{B}}_j\in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{3.1}$$

と展開したとき，展開の係数φ^{B}_j がウェイト j のワイル不変量であることを示すことである．Fefferman [F3] によれば，$j\leq n-20$ まではＯＫ（答は肯定的）である．また [BEG] によれば，$j\leq n$ まですべてについてＯＫである．

具体的な形. 展開 (3.1) の具体的な形についても，CR 不変量の形から，ウェイト ≤ 2 まではわかる：

$$\varphi^{\mathrm{B}}=1+c^{\mathrm{B}}_2\,\|A^0_{22}\|^2\,r^2+O^3(r),\qquad c^{\mathrm{B}}_2=\frac{2/3}{n\,(n-1)}\neq 0.$$

普遍定数 c^{B}_2 の決定は [HKN1] による．

ψ^{B} に関する結果. ψ^{B} に関する高次元の一般論はまだない．領域が実エリプソイドの場合には，平地 [H1] がベルグマン核の領域変分を第 2 変分まで計算して，その結果から直ちにわかる応用として，実エリプソイドの族における球の infinitesimal な特徴付けを得ている．

3.2. 二次元の結果.

$n=2$ と仮定する.

ウェイト ≤ 4 までの展開. Robin Graham [G1] による. Fefferman の近似解 $r=r^{\mathrm{F}}$ を用いる. φ^{B} については, CR 不変量の形から完全にわかる:

$$\varphi^{\mathrm{B}}=1+O^3(r).$$

ψ^{B} についても, CR 不変量の形と複素モンジュ・アンペール境界値問題 (MA) の漸近解 (2.5) の係数 η_1^{G} に関する結果を用いて

$$\psi^{\mathrm{B}}=k_3^{\mathrm{B}}\,\eta_1^{\mathrm{G}}+k_4^{\mathrm{B}}\left|A_{2\bar{4}}^{0}\right|^2 r+O^2(r),\qquad k_3^{\mathrm{B}}=-3,\qquad k_4^{\mathrm{B}}=\frac{24}{5}$$

がわかる. 但し, 普遍定数 k_3^{B}, k_4^{B} を決定するには具体的な計算が必要である (それぞれ [G1] と [HKN1] で実行されている).

ウェイト ≤ 5 までの展開. ウェイト ≤ 4 までの展開に関する Robin Graham のアイディアで, もう一つ先までいくことができる ([HKN2]). まず

$$\mathrm{w}\left(r^{\mathrm{F}}\right)=-1 \mod O^4(r),\qquad \mathrm{w}\left(\eta_1^{\mathrm{G}}\right)=3 \mod O^3(r)$$

に注意すれば, 希望が出てくる. 問題は, $|A_{2\bar{4}}^{0}|^2$ を近似的に不変に領域内部に拡張することだけである. 即ち,

$$\mathrm{w}\left(W_4\right)=4 \mod O^2(r),\qquad W_4|_{\partial\Omega}=\left|A_{2\bar{4}}^{0}\right|^2$$

をみたす (近似的な) 領域汎函数 W_4 が求まれば, $r=r^{\mathrm{F}}$ に対して

$$\psi^{\mathrm{B}}=-3\,\eta_1^{\mathrm{G}}+\frac{24}{5}W_4\,r+W_5\,r^2+O^3(r),\qquad W_5|_{\partial\Omega}=k_{51}^{\mathrm{B}}\,e_{51}^{\mathrm{CR}}+k_{52}^{\mathrm{B}}\,e_{52}^{\mathrm{CR}}\tag{3.2}$$

という展開が得られるはずである. 但しここで, e_{51}^{CR} と e_{52}^{CR} はウェイト 5 の CR 不変量の基底であって, k_{51}^{B} と k_{52}^{B} は普遍定数である. [HKN2] において, 次のことが示されている:

結果. 展開 (3.2) が成り立つ. W_4 はワイル不変量によって実現され, ウェイト 5 の CR 不変量 $W_5|_{\partial\Omega}$ の形も具体的に決まる (W_5 もワイル不変量である).

完全な展開. 平地 [H2] による. Fefferman の近似解 $r = r^{\mathrm{F}}$ のかわりに，境界値問題 (MA) の漸近解 (2.5) の滑らかな部分を使う：

$$r^{\mathrm{G}} = r^{\mathrm{F}}\,\eta_0^{\mathrm{G}}, \qquad \eta_0^{\mathrm{G}} = 1 + a\cdot(r^{\mathrm{F}})^3 + O^4(r).$$

少し細工しておくと， r^{G} は誤差なく変換則をみたす. ここで復習しておくと，境界上の函数 a を決めれば漸近解 u^{G} が完全に決まるのであった. 結果を述べると：

結果. $r = r^{\mathrm{G}}$ に関して ψ^{B} の完全な展開が得られる. 具体的には，

$$\psi^{\mathrm{B}} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^{\mathrm{B}}\, r^k \mod O^{\infty}(r), \qquad \psi_k^{\mathrm{B}} \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \tag{3.3}$$

という漸近展開が成り立ち，展開の係数 ψ_k^{B} はすべて $r = r^{\mathrm{G}}$ に関するワイル不変量である. さらに，展開 (3.3) を任意有限項で打ち切って第 N 項までの和を取ると，それは $O^{N+1}(r)$ の誤差で函数 a に依存しない（打ち消しあう）.

参考文献

[BEG] T. Bailey, M. Eastwood and C. Robin Graham, *Invariant theory for conformal and CR geometry*, to appear in Ann. of Math.

[BFG] M. Beals, C. Fefferman and R. Grossman, *Strictly pseudoconvex domains in* $\mathbf{C}^n$, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **8** (1983), 125–322; also in Proc. Symp. Pure Math. **39,1** (1983), 189–386.

[BS] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand, *Sur la singularité de noyaux des Bergman et de Szegö*, Soc. Math. France, Astérisque **34–35** (1976), 123–164.

[CY] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), 507–544.

[F1] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[F2] C. Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), 395–416; *Correction*, ibid. **104** (1976), 393–394.

[F3] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[G1] C. Robin Graham, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel*, in "Complex Analysis II" (C. A. Berenstein, ed.), Lect. Notes in Math. 1276, pp. 108–135, Springer, 1987.

[G2] C. Robin Graham, *Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation*, Compositio Math. **64** (1987), 133–155.

[G3] C. Robin Graham, *Invariant theory of parabolic geometries*, in ref. [KS], pp. 53–66.

[H1] K. Hirachi, *The second variation of the Bergman kernel of ellipsoids*, Osaka J. Math. **30** (1993), 457–473.

[H2] K. Hirachi, *Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel*, preprint.

[HKN1] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *Two methods of determining local invariants in the Szegö kernel*, in ref. [KS], pp. 77–96.

[HKN2] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *CR invariants of weight five in the Bergman kernel* (tentative title), in preparation.

[KS] G. Komatsu and Y. Sakane (eds.), "Complex Geometry," Lecture Notes in Pure Appl. Math. 143, Marcel Dekker, 1993.

[LM] J. Lee and R. Melrose, *Boundary behaviour of the complex Monge-Ampère equation*, Acta Math. **148** (1982), 159–192.