数理解析研究所講究録
第 875 巻 1994 年 57-71

Gevrey 漸近解析の小史と合流型超幾何関数のみたす D-加群の解複体について

お茶の水女子大学理学部数学科　真島秀行 (Hideyuki Majima)

1　漸近展開小史.

ベキ零幾何と解析ということについて筆者はよく分かっていないが、Gevrey 級数というところで結びついているようなのでその話しをする。はじめに Gevrey 漸近展開について歴史的に少し振り返って見よう。なお、この部分は１９９３年２月1-３日に神戸大学でおこなった研究集会でのはじめの話しを再現することになるが森本徹先生以外ははじめてと思うのでお許しいただきたい。

・階乗についての Stirling の公式.

・ガンマ関数についての Binet-Stirling の公式のある見方.

・虹の過剰虹と Airy 関数.

1.1　階乗についての Stirling の公式.

Stirling は初項が $x+m$ で公差が $2m$ の数列

$$\{x+m,\cdots,z-m\}$$

の各項の対数の和を計算する公式を次のように考えました．ある級数 $F(z)$ を適当にとれば，各項

$$\begin{aligned}\log(z-m) &= \log z+\log(1-\frac{m}{z})\\ &= \log z-\frac{m}{z}-\frac{1}{2}(\frac{m}{z})^2-\frac{1}{3}(\frac{m}{z})^3-\cdots\end{aligned}$$

をその階差

$$\log(z-m) \quad =F(z)-F(z-2m),$$

で表せ，従って，

$$\log(x+m)+\cdots+\log(z-m)=F(z)-F(x)$$

という公式で計算出来るだろう．実際に，$F(x)$ があるかどうか調べると，

$$F(z)=\frac{z\log z}{2m}-\frac{z}{2m}+A_1(\frac{m}{z})+A_2(\frac{m}{z})^3+A_3(\frac{m}{z})^5+\cdots+A_k(\frac{m}{z})^{2k-1}+\cdots,$$

の形にとれるとして形式的に計算してみると，級数の係数 $A_1,\quad A_2,\quad A_3,\cdots$ は,

$$-\frac{1}{3(4)} \quad = \quad \binom{1}{1}A_1,$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{5(8)} &= \binom{3}{3}A_1 + \binom{3}{1}A_2, \\
-\frac{1}{7(12)} &= \binom{5}{5}A_1 + \binom{5}{3}A_2 + \binom{5}{1}A_3, \\
&\vdots \\
-\frac{1}{(2k+1)(4k)} &= \binom{2k-1}{2k-1}A_1 + \binom{2k-1}{3}A_2 + \cdots + \binom{2k-1}{1}A_k, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

で帰納的に決められ,

$$
A_1 = -\frac{1}{12}, \quad A_2 = \frac{7}{360}, \quad A_3 = -\frac{31}{1260}, \cdots, A_k = -\frac{(-1)^k(2^{2k-1}-1)B_k}{(2k-1)(2k)}, \cdots,
$$

となります．ここで、$B_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ は Bernoulli 数です。$n = 1000$, $z = 1000.5$, $x = m = 0.5$ のとき，直接計算して,

$$
\log_{10} n! = 2567.6046442221 \cdots
$$

であるのに対し，$F(1000 + \frac{1}{2})$ の最初の 4 項を用い，常用対数和に直して計算してみると，2567.2055542879$\cdots$ になっており，これに

$$
\frac{1}{2}\log_{10} 2\pi = 0.399089934179 \cdots
$$

を加えると，2.567.6046442221$\cdots$ と計算でき小数第 19 位まで一致していることがわかります.

こうして,

$$
\log n! \approx (n+\frac{1}{2})\log n - (n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{12\cdot 2(n+\frac{1}{2})} + \frac{7}{360\cdot 2^3(n+\frac{1}{2})^3} - \frac{31}{1260\cdot 2^5(n+\frac{1}{2})^5} + \cdots,
$$

という近似公式がで求められました．これは今日 Stirling の公式とよぶ近似式,

$$
\log n! \approx (n+\frac{1}{2})\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \cdots,
$$

と少し形が異なっていますが，上の式から

$$
\log(n+\frac{1}{2}) = \log n + \log(1+\frac{1}{2n}), \qquad (n+\frac{1}{2})^{-1} = n^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{1}{2n})^k), \ldots
$$

などを形式的に代入して変形していけます．もちろん，Stirling の考えにならって，初項が $x + 2m$ で公差が $2m$ の整数列

$$
\{x + 2m, \cdots, z\}
$$

の各項の対数の和を計算する公式を

$$
\log z = G(z) - G(z - 2m),
$$

となるような $G(z)$ を用いて,

$$\log(x+2m)+\cdots+\log z = G(z)-G(x)$$

と計算出来るだろうと考えて,

$$G(z)=\frac{(z+m)\log z}{2m}-\frac{z}{2m}+\frac{B_1}{2\cdot 1}(\frac{2m}{z})-\frac{B_2}{4\cdot 3}(\frac{2m}{z})^3+\frac{B_3}{6\cdot 5}(\frac{2m}{z})^5+\cdots,$$

の形に，実際に，$G(x)$ がとれるかどうか調べると，それが可能なことがわかります．ここでも、$B_k(k=1,2,3,\cdots)$ は Bernoulli 数です。すなわち、

$$\binom{2n+1}{2}B_1-\binom{2n+1}{4}B_2+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n}B_n=n-\frac{1}{2},$$

$$\binom{2n+2}{2}B_1-\binom{2n+2}{4}B_2+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{2n+2}{2n}B_n=n,$$

から求められものです．実際に計算すると，

$$B_1=\tfrac{1}{6},\quad B_2=\tfrac{1}{30},\quad B_3=\tfrac{1}{42},\quad \cdots$$

となります．あるいは、積分を用いて、

$$B_N=4N\int_0^\infty \frac{t^{2N-1}dt}{e^{2\pi t}-1}B_N=\frac{2N(2N-1)}{\pi}\int_0^\infty t^{2N-2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}dt$$

と計算されます．ついでですが、実は、

$$\frac{2\pi z}{e^{2\pi z}-1}=1-\frac{2\pi z}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k B_k}{(2k)!}(2\pi z)^{2k}\quad(|z|<1),$$

なお,

$$n!\approx\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n},$$

という近似式も成立します．これも Stirling の公式とよびます．

上の近似式に現れる無限級数は，ガンマ関数の節でわかるように発散級数です．これが，発散級数を「漸近級数」とするはじめての例でした．

1.2 ガンマ関数についての Binet-Stirling の公式のある見方.

自然数 n の階乗 $n!$ を拡張した関数としてガンマ関数というものがある．Euler(1729 年) によって導入されたもので，正の実数 x に対して，

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}$$

と定義された．これは次のような積分表示をもつ．すなわち,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt$$

が成り立つ．さらに，次の関数等式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1,$$

が成立し，これから，$x = n+1$ のとき $\Gamma(n+1) = n!$ であることがわかる．

ガンマ関数は実部が正の複素数 $z = x + \sqrt{-1}y$ の関数として，同様の積分表現で拡張される．すなわち，

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-\xi)\xi^{z-1}d\xi$$

により，複素平面の実部が正の領域の上の複素関数が定義出来て，正の実数 $z = x$ については前の関数と一致する．この拡張された関数についても，

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1,$$

が成立する．これを用いて，さらに，複素平面全体で定義された有理型関数で，$z = 0, -1, \cdots, -n, \cdots$ に 1 位の極をもつ関数に拡張される．また，新たな関数等式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

をもみたす．また、Weierstrass の標準形といわれる次の表現をもつ。すなわち、

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\exp(\gamma z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})\exp(-\frac{z}{n}).$$

Stirling の公式と同様のことがガンマ関数 $\Gamma(z)$ についても成立するのを最初に示したのは Binet (1820 年) であった．すなわち、

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) &= (z-\frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} \\ &+ \cdots + \frac{(-1)^{N-1}B_N}{2N(2N-1)z^{2N-1}} + E_N(z),\end{aligned}$$

$$|E_N(z)| \le \frac{K_z B_{N+1}}{(2N+2)2N+1|z|^{2N+1}},$$

$$(|z| \to \infty, \quad |\arg z| \le \frac{1}{2}\pi - \epsilon, \quad K_z \le \csc 2\epsilon \quad (0 < \epsilon < \frac{1}{4}\pi))$$

を示した．ここで，B_N は Bernoulli 数である。これは，

$$\lim_{|z|\to\infty}|z^N E_N(z)| = 0,$$

が成り立つことを意味し，そのことは，

$$\log\Gamma(z) - (z-\frac{1}{2})\log z + z - \frac{1}{2}\log 2\pi$$

が級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)z^{2n-1}}$$

を Poincaré の定義による漸近展開にもつことを意味する.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n 2n(2n-1)}{B_{n+1}2(n+1)(2n+1)}=0$$

より, 上の級数は発散級数である. 以上のことは、

$$J(z)=\log\Gamma(z)-\{(z-\frac{1}{2})\log z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi\}$$

とおくとき, 今日, Binet の積分公式とよばれる

$$J(z)=2\int_0^\infty\frac{\arctan\frac{t}{z}dt}{e^{2\pi t}-1}\quad(\Re z>0),$$

$$J(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{z}{t^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}dt\quad(\Re z>0),$$

$$J(z)=\int_0^\infty e^{-zt}(\frac{t}{2}-1+\frac{t}{e^t-1})\frac{dt}{t^2}\quad(\Re z>0),$$

$$J(z)=-\int_0^\infty e^{-zt}(\frac{t}{2}+1-\frac{t}{1-e^{-t}})\frac{dt}{t^2}\quad(\Re z>0),$$

などを用いてなされる。例えば Whittaker & Watson では一番上 (Binet の第 2 公式) を用いて

$$E_n(z)=\frac{2(-1)^n}{z^{2n-1}}\int_0^\infty\{\int_0^t\frac{u^{2n}du}{u^2+z^2}\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1},$$

から上の評価を出している。さて、ここでは最後の 2 つの表現 (Binet の第 1 公式) に注目する。それより、

Watson の補題 $q(t)$ に N 階微分が存在し、

$$|q^{(k)}(t)|\le Me^{\sigma t}\quad(k=0,\quad 1,\cdots,N)$$

ならば、

$$\int_0^\infty e^{-zt}q(t)dt=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{q^{(k)}(0)}{z^{k+1}}+\frac{M}{|z|^N(\Re z-\sigma)}$$

$$(|z|\to\infty,\quad|\arg z|\le\frac{1}{2}\pi-\epsilon,\quad(0<\epsilon<\frac{1}{4}\pi)).$$

を用いれば直ちに Binet-Stirling の公式が導ける。なお、Binet の積分公式は、

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z)$$

が

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\int_0^\infty\frac{4tz}{(z^2+t^2)^2}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}te^{-t(z+n)}dt=\frac{1}{z^2}+\int_0^{\infty}e^{-zt}\frac{t}{e^t-1}dt$$

であることから導ける。ところで、

$$2\pi=(\limsup\sqrt[2n]{\frac{|B_n|}{(2n)!}})^{-1}$$

であるから、

$$|\frac{(-1)^{N-1}B_N}{2N(2N-1)}|\le K((2N-2)!)^1(\frac{1}{2\pi})^{2N-2},$$

$$|E_N(z)|\le K(2N)!^1(\frac{1}{2\pi})^{2N}|z|^{-2N},$$

$$(|z|\to\infty,\quad |\arg z|\le\frac{1}{2}\pi-\epsilon,\quad (0<\epsilon<\frac{1}{4}\pi))$$

が成立していることに注目しよう。このようなことが成立するとき Gevrey 漸近展開可能であるということにするのである。また、

$$J(z+1)-J(z)=-1-(z+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{z})$$

という方程式が、形式ベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)z^{2n-1}}$$

を形式解として持ち、その Borel 変換または和が

$$(\frac{t}{2}-1+\frac{t}{e^t-1})\frac{1}{t^2}=-(\frac{t}{2}+1-\frac{t}{1-e^{-t}})\frac{1}{t^2}$$

であり、その Laplace 変換として、

$$J(z)=\log\Gamma(z)-\{(z-\frac{1}{2})\log z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi\}$$

を得たことになっているのに注目しよう。このようなとき、総和可能であるという。

1.3 Poincaré の漸近展開と Gevrey 漸近展開.

無限遠点を頂点とする角領域 S で定義された関数 $f(z)$ が $|z|\to\infty$ のとき級数 $\hat{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^{-k}$ に Poincaré の意味で漸近展開されるとは，任意の正の自然数 N と任意の部分角領域 S' に対して，

$$|f(z)-\sum_{k=0}^{N-1}a_kz^{-k}|\le constant|z|^{-N}$$

が成り立つときことをいう．このとき $\hat{f}(z)$ を漸近級数という。無限遠点を頂点とする角領域 S で定義された関数 $f(z)$ が $|z| \to \infty$ のとき Gevrey 次数 $s = \sigma - 1$ の漸近展開をもつとは、上の意味で漸近展開で、その漸近級数 $\hat{f}(z)$ の係数について

$$|a_k| \leq C(k!)^s A^k \quad (k = 0, \quad 1, \quad 2, \cdots)$$

さらに、任意の正の自然数 N と任意の部分角領域 S' に対して K, B があり、

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}| \leq K(N!)^s B^N |z|^{-N}$$

が成り立つことをいう。

1.4 虹の過剰虹と Airy 関数.

雨上りの一瞬，虹が見えることがあります．通常は主虹といわれるもの一つしか見えませんが，ときには，色の配列が逆になった副虹とよばれるもう一つのものがみえることがあります．さらに，主虹，副虹と並んでそれぞれと色の配列が同じ過剰虹といわれるものが見えることがあるのです．主虹や副虹が見えるのは光の反射を，色の順序が青，緑，赤となるのは光の分散を，幾何光学的に考えることにより説明できます．

しかし，過剰虹が見えることは，幾何光学では説明できず，光の干渉を考えた波動光学による回折の計算をして説明できるようになるのです．この計算をはじめてしたのは，Airy という人でした．かれは 1838 年に，今日 Airy 関数とよばれる積分で定義された関数

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(t^3 - xt)dt$$

を導入し，この関数でほぼ光の強度が記述できるということを理論的に示しました．従って，これの実数上での振る舞いから，過剰虹を説明できることになります．

上の積分は，関数の定数倍や変数の定数倍を適当にすることにより，

$$\int_0^\infty \cos(t^3 - 3xt)dt,$$

$$\int_0^\infty \cos(t^3 + 3xt)dt,$$

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp i(xs + \frac{s^3}{3})ds,$$

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(xt - \frac{t^3}{3})dt,$$

となり，現在の文献では最後の形が多いのですが，Airy 自身は，この関数の $x = 0$ における Taylor 展開

$$Ai(x) = \frac{1}{3^{2/3}}\Gamma(\frac{2}{3})[1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^9}{2\cdot 3\cdots 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots]$$

$$-\frac{1}{3^{1/3}}\Gamma(\frac{1}{3})[1+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}+\cdots],$$

を求め，これを用いて数値計算をして，説明しようとしたらしいのですが，うまくいかなかったようです．というのは，$x=0$ での Taylor 展開というのは，それに十分近いところでは，収束が速く計算できたでしょうが，すこしはなれると収束が遅くなり計算しきれなかったようです．

現在は，処理速度の速い計算機があって，すばやくグラフを描いてくれるのですが，当時はほとんど不可能だったようです．実際に計算機にやらせてみると，$x>0$ で指数関数的に減少し，$x<0$ では，正弦関数のように振動することを教えてくれます．計算機に頼れない当時，関数のこのような性質を導くのにどういう解析をしたのでしょうか．

1856 年前後から，Stokes は Airy 関数を研究し上のような性質を導くことに成功しました．かれの成功の鍵は Airy 関数のみたす微分方程式を解析したことにありました．Airy 関数は，

$$\frac{d^2}{dz^2}u-zu=0,$$

という 2 階線型常微分方程式をみたします．Stokes は $|z|>>0$ のところの解の振る舞いを調べるために，無限遠 $z=\infty$ における解をまず計算してみたのでした．解の形は

$$\hat{u}_1=z^{-\frac{1}{4}}\exp(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})}{(2n)!}(\frac{i}{3z^{\frac{3}{4}}})^{2n},$$

$$\hat{u}_2=z^{-\frac{1}{4}}\exp(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})}{(2n)!}(\frac{1}{3z^{\frac{3}{4}}})^{2n},$$

の線型結合で，無限級数部分は発散級数になっており，形式的な解でしかありません．しかし，彼はこの第 n 項までの和$\tilde{u}$ を考えると，

$$\frac{d^2}{dz^2}\tilde{u}-z\tilde{u}=g(z),\quad g(z)=o((|z|^{\frac{3}{2}})^{-n}),$$

となっており，$|z|$ が十分大きいとき，g は無視できるほど小さく近似解を表す，と考えたのでした．

さて，ここで Stokes は大きな発見をすることになるのです．近似解は，負べきが入っていることから，明らかに，$z=0$ の付近では意味をなさない．だから，正の実軸上の近似解が，単純に実軸に沿って $z=0$ を通過して負の実軸上にもっていったとき近似解になっていると期待できないと考え，$|z|$ を十分大きくとって，複素平面内で，$\arg z$ を 0 から π まで変化させてみる，すなわち，解析接続をしてみようとしのでした．$z=0$ の収束級数解は，$\arg z$ を 0 から π まで変化させても変わらないが，近似解のほうは

$$z^{-\frac{1}{4}}\longrightarrow e^{-\frac{\pi i}{4}}z^{-\frac{1}{4}},\cdots$$

などと形が変わるから，やはり，$z=0$ での収束級数解を，$\arg z=0$ で近似する解はそのまま，$\arg z=\pi$ で近似する解にはならない，すなわち，$\arg z$ を 0 から π まで変化させるとき，どこかで形式解の線型結合の係数が不連続に変わる，と考えたのでした．これが，今

日 Stokes 現象とよぶものの発見であったわけです．この後かれはこの現象，すなわち，不連続に係数が変わることがなぜおこるか解明しようとしました．Stokes は，1857 年 3 月 19 日付けの婚約者への手紙で次のように書いています．

> "When the cat's away the mice may play. You are the cat and I am the mouse. I have been doing what I guess you won't let me do when we are married, sitting up 3 o'clock in the morning fighting hard againist a mathematical difficulty. Some years ago, I attacked an integral of Airy's, and after a severe trial reduced it to a readily calculable form. But there was one difficulty about it which, though I tried till I almost made myself ill, I could not get over, and at last I had to give it up and profess myself unable to master it. I took it up again a few days ago, and after a two or three days' fight,the last of which I sat up till 3, I at last mastered it. I don't say you won't let me work at such things, but you will keep me to more regular hours. A little out of the way now and then does not signify, but there should not be too much of it. It is not the mere sitting up but the hard thinking combined with it ..."

ここで，かれはマスターしたといっていますが，後からみるとそうではなっかたようです．しかし，とにかく彼は，

$$Ai(z) \approx \frac{1}{2\pi} z^{-\frac{1}{4}} \exp(-\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})}{(2n)!} (\frac{i}{3z^{\frac{3}{4}}})^{2n} \quad (|\arg z| < \frac{\pi}{3}),$$

$$Ai(z) \approx \frac{1}{2\pi} z^{-\frac{1}{4}} \exp(-\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})}{(2n)!} (\frac{i}{3z^{\frac{3}{4}}})^{2n}$$

$$+\frac{i}{2\pi} z^{-\frac{1}{4}} \exp(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2})}{(2n)!} (\frac{1}{3z^{\frac{3}{4}}})^{2n} \quad (|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{3}),$$

とくに，負の実軸上で，

$$Ai(-x) \approx \frac{1}{\pi} z^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2}) \sin(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2})}{(2n)!} (\frac{i}{3x^{\frac{3}{4}}})^{2n} \quad (x > 0)$$

というように，近似解の係数が $\arg z$ を 0 から π まで変化させていくとき，$\arg z = \frac{2\pi}{3}$ を境として不連続に変わることを示しました．数値的にも，$2\sqrt{\pi}3^{1/6}Ai(z)$ について，$|z| = (72)^{\frac{1}{3}}$ で $\arg z = \frac{\pi}{2}$ の点 P_1 と，$|z| = (72)^{\frac{1}{3}}$ で $\arg z = \frac{5\pi}{6}$ の点 P_2 で計算し，確かに 2 番目の形式解の寄与のあることを確かめています．

計算法	P_1	P_2
収束解	-14.98520 +i43.81047	-45.44882-i8.92867
発散解$\hat{u}_1$	-14.98520 +i43.81046	-45.43360-i8.92767
発散解$\hat{u}_2$		-0.01524-i0.00100
合計	-14.98520 +i43.81046	-45.44884-i8.92867

以上のようにして，Stokes は Airy 関数が $x>0$ で指数関数的に減少し，$x<0$ では，正弦関数のように振動する関数であることを数学的に示したのでした．

2　常微分作用素の指数定理と不確定度

１９６０年代の Atiyah-Singer の指数定理を受けて、常微分方程式が楕円型であることから指数をもつことはあきらかであったので、１９７０年前後に常微分作用素の指数が何人か (Malgrange, Komatsu, Kashiwara) の研究者によって計算された．原点の近傍で正則な関数を係数とする線型常微分作用素

$$Pu = (\sum_{i=0}^{m} a_i(x)(d/dx)^i)u$$

を考える．$\mathcal{O}$ を収束べき級数環とし、$\hat{\mathcal{O}}$を形式べき級数環とする．$\mathcal{K}$ を収束負べき有限 Laurent 級数環とし、$\hat{\mathcal{K}}$を形式負べき Laurent 級数環とする．$\mathcal{E}$ を収束 Laurent 級数環とする．

$M=\mathcal{O},\hat{\mathcal{O}},\mathcal{K},\hat{\mathcal{K}},\mathcal{E}$, とする．$P$ を M からそれ自身への作用素とみなすとき、$\mathrm{Ker}(P;M)$, $\mathrm{Coker}(P;M)$ は有限次元で、指数$\chi(P;M)=\dim_C \mathrm{Ker}(P;M)-\dim_C \mathrm{Coker}(P;M)$ をもつ．それらは実際、以下のように計算できる．

$\chi(P;\mathcal{O})=m-v(a_m)$, $\chi(P;\hat{\mathcal{O}})=\sup\{i-v(a_i):i=1,...,m\}$,
$\chi(P;\mathcal{K})=m-v(a_m)-\sup\{i-v(a_i):i=1,...,m\}$, $\chi(P;\hat{\mathcal{K}})=0$,
$\chi(P;\mathcal{E})=0$.

P の原点 0 において以下は同じで、不確定度 $\mathrm{Irr}(P)_0$ という．

$\chi(P;\hat{\mathcal{O}})-\chi(P;\mathcal{O})$, $\chi(P;\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$,
$\chi(P;\hat{\mathcal{K}})-\chi(\mathcal{K})$, $-\chi(P;\mathcal{K})$, $\chi(P;\hat{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$,
$\chi(P;\mathcal{E})-\chi(P;\mathcal{K})$, $\chi(P;\mathcal{E}/\mathcal{K})$,
$\chi(P;\mathcal{E}/\mathcal{O})-\chi(P;\mathcal{K}/\mathcal{O})$,
$\dim_C \mathrm{Ker}(P;\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$,
$\dim_C \mathrm{Ker}(P;\hat{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$,
$\dim_C \mathrm{Ker}(P;\mathcal{E}/\mathcal{K})$,
$\dim_C \mathrm{Ker}(P;(\mathcal{E}/\mathcal{O})/(\mathcal{K}/\mathcal{O}))$.

確定特異点の、Fuchs による係数関数についての特徴付け、Deligne による比較定理の成立による特徴付けに注目し、Malrange は以下の特徴付けを得た．

P が原点 0 で確定特異点であるとは、$\sup\{i-v(a_i):i+1,...,m\}-\{m-v(a_m)\}=0$（Fuchs の判定条件）であることである．これは以下の条件と同値である．

不確定度 $\mathrm{Irr}(P)_0$=0,
（形式べき級数と収束べき級数との間の比較定理の成立）
$\mathrm{Ker}(P;\hat{\mathcal{O}})\simeq\mathrm{Ker}(P;\mathcal{O})$, $\mathrm{Coker}(P;\hat{\mathcal{O}})\simeq\mathrm{Coker}(P;\mathcal{O})$,

（形式負べき有限 Laurent 級数と収束負べき有限 Laurent 級数との間の比較定理の成立）
$\mathrm{Ker}(P;\hat{\mathcal{K}}) \simeq \mathrm{Ker}(P;\mathcal{K})$, $\mathrm{Coker}(P;\hat{\mathcal{K}}) \simeq \mathrm{Coker}(P;\mathcal{K})$,
（収束 Laurent 級数と収束負べき有限 Laurent 級数との間の比較定理の成立、Deligne）
$\mathrm{Ker}(P;\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Ker}(P;\mathcal{K})$, $\mathrm{Coker}(P;\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Coker}(P;\mathcal{K})$.

$\mathcal{D}_0$ を原点で正則な関数を係数とする線型微分作用素の芽の全体の環とし、$\mathcal{M} = \mathcal{D}_0/\mathcal{D}_0 P$ とおくと、$\mathcal{M}$ は射影分解

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}_0 \xleftarrow{P} \mathcal{D}_0 \leftarrow 0$$

を持ち、これに $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_0}(\cdot,\mathcal{F}_0)$ を作用させることにより $\mathcal{F}$ に値をもつ解複体

$$\mathcal{S}ol(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_0) : \mathcal{F}_0 \xrightarrow{P} \mathcal{F}_0 \to 0$$

を得る．この複体のコホモロジー群については明らかに次のような同型がある．

$$\mathrm{Ext}^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_0) \simeq \mathrm{Ker}(\mathcal{F}_0;P), \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_0) \simeq \mathrm{Coker}(\mathcal{F}_0;P).$$

従って、 D-加群としてみたとき

$$\chi(\mathcal{M};\mathcal{F})_0 = \dim_C \mathrm{Ext}^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_0) - \dim_C \mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}_0,\mathcal{F}_0)$$

とおくとき、

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{M})_0 = \chi(\mathcal{M}_0;\hat{\mathcal{O}}) - \chi(\mathcal{M}_0;\mathcal{O}),$$
$$\mathrm{Irr}(\mathcal{M})_0 = \chi(\mathcal{M}_0;\hat{\mathcal{K}}) - \chi(\mathcal{M}_0;\mathcal{K}),$$
$$\mathrm{Irr}(\mathcal{M})_0 = \chi(\mathcal{M}_0;\mathcal{E}) - \chi(\mathcal{M}_0;\mathcal{K}),$$
$$\mathrm{Irr}(\mathcal{M})_0 = \chi(\mathcal{M}_0;\mathcal{E}/\mathcal{O}) - \chi(\mathcal{M}_0;\mathcal{K}/\mathcal{O}),$$

により与えられることになる．

3 holonomic D-加群の指数と不確定度

$\mathcal{D}$ を多様体 M 上の正則な関数を係数とする線型微分作用素の芽の層とし、$\mathcal{M}$ を holonomic $\mathcal{D}$-加群とすると、$\mathcal{M}$ は射影分解

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}^{m_0} \xleftarrow{P_0} \mathcal{D}^{m_1} \xleftarrow{P_1} \mathcal{D}^{m_2} \xleftarrow{P_2} \cdots \xleftarrow{P_{2n-1}} \mathcal{D}^{m_{2n}} \leftarrow 0$$

を持ち、これに $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\cdot,\mathcal{F})$ を作用させることにより $\mathcal{F}$ に値をもつ解複体

$$\mathcal{S}ol(\mathcal{M},\mathcal{F}) : \mathcal{F}^{m_0} \xrightarrow{P_0^t} \mathcal{F}^{m_1} \xrightarrow{P_1^t} \cdots \xrightarrow{P_{2n-1}^t} \mathcal{F}^{m_{2n}} \to 0$$

を得る．点 p における holonomic $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ の $\mathcal{F}$ での指数を

$$\chi(\mathcal{M};\mathcal{F})_p = \sum_{i=0}^{2n} \dim_C (-1)^i \mathcal{E}xt^i(\mathcal{M},\mathcal{F})_p$$

とおく．点 p における holonomic $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ の不確定度は、

$$Irr(\mathcal{M})_p = \chi(\mathcal{M}; \mathcal{O}_{\widehat{M|H}}))_p - \chi(\mathcal{M}; \mathcal{O}_{M|H})_p,$$

により与えられることになる．ここで、$\mathcal{O}$は M上の正則関数の芽の層、Hを $\mathcal{M}$ の特異点の集合とし、$\mathcal{O}_{M|H}$は Hで $\mathcal{O}$と一致しその外へ零拡張した層、$\mathcal{O}_{\widehat{M|H}}$は $\mathcal{O}$の H に沿っての Zariski 形式完備化とする．

4 合流型超幾何微分方程式Φ_2の定義する holonomic D-加群について

以下で合流型超幾何微分方程式Φ_2の定義する holonomic D-加群の解複体を考え、各次のコホモロジー群を計算した結果を述べる。これらは、石塚寿美子（お茶の水女子大学修士課程）との共同研究である。

$M = P^1_C \times P^1_C$とし，$H = \{(\infty, y); y \in P^1_C\} \cup \{(x, \infty); x \in P^1_C\}$ とおく．
$\{(\infty, y); y \in P^1_C\}$ に含まれる領域Uに対して

$$\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A}(\infty, U) = \left\{ \sum_{j\geq 0} f_j(y)x^{-j}; \exists C > 0, \forall n, s.t. \sup_{y\in U}|f_n(y)| < CA^n\{(n-1)!\}^{s-1} \right\}$$

$\{(x, \infty); x \in P^1_C\}$ に含まれる領域Vに対して

$$\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A}(V, \infty) = \left\{ \sum_{j\geq 0} f_j(x)y^{-j}; \exists C' > 0, \forall n, s.t. \sup_{x\in V}|f_n(x)| < C'A^n\{(n-1)!\}^{s-1} \right\}$$

と定義する．
$p \in H\backslash(\infty, \infty)$ に対して，
$p \in \{(\infty, y); y \in P^1_C\}$ ならば

$$(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A})_p = \operatorname*{Ind\,lim}_{p\in U\subset H} \mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A}(\infty, U)$$

$p \in \{(x, \infty); x \in P^1_C\}$ ならば

$$(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A})_p = \operatorname*{Ind\,lim}_{p\in V\subset H} \mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A}(V, \infty)$$

と定義し, これをもとに以下の定義をする．

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s})_p &= \operatorname*{Ind\,lim}_{A>0}(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A})_p\ , \\
(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s)})_p &= \operatorname*{Proj\,lim}_{A>0}(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A})_p\ , \\
(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A-})_p &= \operatorname*{Ind\,lim}_{0<B<A}(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,B})_p\ , \\
(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s,A+)})_p &= \operatorname*{Proj\,lim}_{B>A}(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,B})_p\ .
\end{aligned}$$

合流型超幾何微分方程式Φ_2とは次の方程式系である．

$$\Phi_2:\begin{cases} x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(c-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}-bu=0 & (L_1u=0\text{ と書く}) \\ y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(c-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-b_pu=0 & (L_2u=0\text{ と書く}) \end{cases}$$

ここで，b,b_p,c は 0 及び正整数ではないと仮定しておく．
$\mathcal{M}_2$を微分方程式Φ_2で定義される $\mathcal{D}$-加群，即ち

$$\mathcal{M}_2=\mathcal{D}/(\mathcal{D}L_1+\mathcal{D}L_2)$$

とする．

定理 1 ．$M=P^1_C\times P^1_C$ ，$H=\{(\infty,y);y\in P^1_C\}\cup\{(x,\infty);x\in P^1_C\}$ とする．$p\in H\backslash(\infty,\infty)$ とするとき微分方程式Φ_2で定義される $\mathcal{D}$-加群の解複体の第 j 次コホモロジーは次のようになる．

(1) $1\le s<2$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s,A+)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s}$ に対して，

$$\dim_C \mathrm{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=\begin{cases} 0, & (j=0,2) \\ 1, & (j=1) \end{cases}$$

である．

(2) $s>2$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s,A+)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s}$ に対して，

$$\dim_C \mathrm{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=0,\quad (j=0,1,2)$$

である．

(3) $s=2$ のとき

(i) $A>1$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2,A+)}$ に対して，

$$\dim_C \mathrm{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=0,\quad (j=0,1,2)$$

である．

(ii) $0<A<1$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2,A+)}$ に対して，

$$\dim_C \mathrm{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=\begin{cases} 0, & (j=0,2) \\ 1, & (j=1) \end{cases}$$

である．

(iii) $A=1$ のとき

$$\dim_C \operatorname{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2,1-})_p)=\begin{cases}0, & (j=0,2)\\ 1, & (j=1)\end{cases}.$$

$$\dim_C \operatorname{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2,1+)})_p)=0, \quad (j=0,1,2).$$

(iv) $\dim_C \operatorname{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2)})_p)=\begin{cases}0, & (j=0,2)\\ 1, & (j=1)\end{cases}.$

$\dim_C \operatorname{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2})_p)=0, \quad (j=0,1,2).$

(4) $\dim_C \operatorname{Ext}^j((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H}})_p)=0, \quad (j=0,1,2).$

系 1．微分方程式Φ_2で定義される$\mathcal{D}$-加群の指数は次のとおりである．

(1) $1\leq s<2$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s,A+)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s}$ に対して，

$$\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=-1$$

である．

(2) $s>2$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(s,A+)},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},s}$ に対して，

$$\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=0$$

である．

(3) $s=2$ のとき

(i) $A>1$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2,A+)}$ に対して，

$$\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=0$$

である．

(ii) $0<A<1$ のとき

$\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2,A-},\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2,A+)}$ に対して，

$$\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,\mathcal{F}_p)=-1$$

である．

(iii) $A=1$ のとき

$$\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2,1-})_p)=-1.$$

$$\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2,1+)})_p)=0.$$

(iv) $\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},(2)})_p)=-1.$

$\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H},2})_p)=0.$

(4) $\mathcal{X}((\mathcal{M}_2)_p,(\mathcal{O}_{\widehat{M|H}})_p)=0.$

系 2 不確定度 $\mathrm{Irr}((\mathcal{M}_2)_p) = 1$.

合流型超幾何微分方程式Φ_3についても同様の結果を得た.

参考文献

[1] Deligne, P., Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math., **163**, Springer-Verlag, 1970 and Correction to Lecture Note 163, Warwick University, April 1971.

[2] 柏原正樹, 偏微分方程式系の代数的研究, 東京大学修士論文, 1971.

[3] Komatsu, H., On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **18**(1971), 379-398.

[4] Komatsu, H., On the regularity of hyperfunction solutions of linear ordinary differential equations with real analytic coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **20**(1973), 107-119.

[5] 小松彦三郎, 超関数論入門, 基礎数学講座 岩波書店, 1978.

[6] 真島秀行, 漸近解析における消滅定理とその微分方程式への応用, 数学, 第 37 巻第 3 号 (1985), 225-244

[7] Majima. H., On the irregularity of D_X-Module, in the Proceedings of "Equations Différentielles dans le Champ Complexe(Colloque Franco-Japonais 1985)", vol.3, Univ.Strasbourg, (1988), 93-104

[8] Malgrange, B., Sur les points singuliers des équations différentielles, l'Enseignment Math.,**20**(1974), 147-176.

[9] Ramis, J.-P., Devissage Gevery, Astérisque, **59-60**(1978),173-204.

[10] Ramis, J.-P., Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Memoires, A.M.S.,**296**(1984).

[11] Takayama. N., Kan virtual-machine 入門 (A system for computational algebraic analysis), Kobe university, (1992)