

## 葉層化多様体の接 de Rham cohomology に対する

### 消滅定理とその応用

慶応義塾大学 理工学部 金井 雅彦 (MASAHIKO KANAI)

離散群  $\Gamma$  が vector 束  $F \rightarrow N$  に vector 束同型として滑らかに作用しているという状況を考える。もちろんこのとき  $\Gamma$  の底空間  $N$  への作用が誘導される。さてここで次の2つの問題を考えたい。

問題 1.  $F$  上の affine 接続で、とくに群  $\Gamma$  の作用で不変なものが存在するか。

問題 2. またかような affine 接続が存在したとき、それはいつ平坦になるか。

まずこれら問題の意図を説明するために、それらがともに肯定的に解ける場合を想定してみよう。さらに底空間  $N$  が単連結であると仮定するならば、vector 束  $F$  上の平坦接続は  $F$  の自明化  $F = N \times \mathbf{R}^k$  を引き起こす。しかもその接続が群  $\Gamma$  の作用で不変であることより、この自明化が群作用と次の仕方で関連していることが判る： $\gamma \cdot (y, v) = (\gamma y, \rho(\gamma)v)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $(y, v) \in N \times \mathbf{R}^n = F$ , ただしここで  $\rho$  は群  $\Gamma$  の Lie 群  $GL_k \mathbf{R}$  の中への準同型である。これらの結論を言い換えれば、まず第一に vector 束  $F$  が自明であること、さらにそれに加え群  $\Gamma$  の vector 束  $F$  への作用が、群  $\Gamma$  の Lie 群  $GL_k \mathbf{R}$  への表現から上の仕方で作られる極めて特殊なものであること、となろう。

次にこの考え方の力学系への応用をひとつ述べたい。そのためにまず Lie 群  $SL_{n+1} \mathbf{R}$  の  $n$ -次元球面への標準的な作用を考える。さらに Lie 群  $SL_{n+1} \mathbf{R}$  の余 compact な格子  $\Gamma$  をと

り、先程の  $SL_n\mathbf{R}$  の作用をこの格子に制限して得られる作用を記号  $A^0$  で表す。この作用  $A^0$  は言ってみれば群  $\Gamma$  の  $n$ -次元球面への作用のモデルとでも言うべきものである。そしてこのとき、前述の問題が適当な設定の下肯定的に解ける、という事実を本質的に用いることにより次の定理が証明できる：

定理.  $n \geq 2$  ならば作用  $A^0$  は次の意味で剛性的である：すなわち、 $A$  を群  $\Gamma$  の  $n$ -次元球面  $S^n$  への任意の作用としたとき、もしそれが適当な topology に関し標準的作用  $A^0$  に十分近ければ  $A$  は  $A^0$  と微分可能的に共役である。

この定理において、作用  $A$  は標準作用  $A^0$  を摂動することにより得られる、と考えることが出来る。従ってこの定理は、摂動の大きさがあまり大きくないときには、その摂動は群作用を本質的には変え得ない、ということを実証しているわけである。その意味でこの定理に現れる群作用の剛性という概念は、古典的な力学系に対する構造安定性の概念に極めて類似のものであるといえる。

さて、前述の問題に話を戻そう。実は、 $F$  上に  $\Gamma$ -不変な affine 接続が存在するための十分条件、およびその接続が平坦であるための十分条件は、次のように述べることができる。まず  $C^\infty(N, F)$  で、vector 束  $F \rightarrow N$  の滑らかな切断全体を表すことにしよう。もちろん  $\Gamma$  の  $F \rightarrow N$  への作用は  $C^\infty(N, F)$  に  $\Gamma$ -module の構造を与えるので、その結果それを係数とする Eilenberg-MacLane cohomology  $H^*(\Gamma; C^\infty(N, F))$  が定義される。このとき、次のふたつの主張が成立つことが極めて容易に判る。

主張 1.  $H^1(\Gamma; C^\infty(N, T^*N \otimes F^* \otimes F)) = 0$  ならば、vector 束  $F$  は  $\Gamma$ -不変な affine 接続を有する。

主張 2. もし  $H^0(\Gamma; C^\infty(N; T^*N \otimes T^*N \otimes F^* \otimes F)) = 0$  が成立つならば,  $F$  上の任意の  $\Gamma$ -不変 affine 接続は平坦でなければならない.

従って, 問題は Eilenberg-MacLane cohomology に対する消滅をいかにして証明するかということに帰着される. そしてそのために, Eilenberg-MacLane cohomology と形式的には同等である, 葉層化多様体に対するいわゆる接 de Rham cohomology を考えることにする.

以降, 群  $\Gamma$  はある compact 多様体  $M$  の基本群であると仮定する. その多様体  $M$  の普遍被覆を  $\widetilde{M}$  とすれば, それと vector 束  $F \rightarrow N$  との積をとることにより新たに vector 束  $\widetilde{M} \times F \rightarrow \widetilde{M} \times N$  を作ることができ, しかも群  $\Gamma$  がその上に vector 束同型として対角的に作用する. そこでその対角作用による商空間を考える. その結果得られるのが, 多様体  $M$  上の  $N$ -束  $N^\times = \Gamma \backslash (\widetilde{M} \times N)$  と, その上の vector 束  $F^\times = \Gamma \backslash (\widetilde{M} \times F)$  である. さらに, 商をとる以前の積多様体  $\widetilde{M} \times N$  の“水平”な部分多様体  $\widetilde{M} \times \{y\}$  ( $y \in N$ ) による葉層構造は, 商空間  $N^\times = \Gamma \backslash (\widetilde{M} \times N)$  の葉層構造  $\mathcal{H}$  を定義する. もちろんこの  $N^\times$  上の葉層構造は  $N^\times \rightarrow M$  にいわゆる葉層化束の構造を与える. 一方,  $N^\times$  上の vector 束  $\wedge^* T^* \mathcal{H} \otimes F^\times$  の切片は, いってみれば  $F^\times$  に値を取る  $(N^\times, \mathcal{H})$  上の接微分形式と考えることが出来る. さらに vector 束  $F^\times \rightarrow N^\times$  が  $\mathcal{H}$  の各葉に沿って自然な自明化を有することより,  $F^\times$ -値接微分形式の葉層構造  $\mathcal{H}$  の各葉に沿っての外微分, すなわち接外微分  $d$  を,  $d^2 = 0$  を満たすよう定義することが出来る.  $C^\infty$  級の  $F^\times$ -値接微分形式に作用するこの接外微分  $d$  に付随した cohomology を接 de Rham cohomology と言い, 記号  $H^*(\mathcal{H}; F^\times)$  で表す. すると, 先程の Eilenberg-MacLane cohomology との間に,  $H^*(\Gamma; C^\infty(N, F)) \cong H^*(\mathcal{H}; F^\times)$  ( $* = 0, 1$ ) が成

り立つことが極めて初等的に判る。これにより問題は接 de Rham cohomology の消滅に還元されたわけである。

なにかしらの cohomology が与えられたとき、その消滅を示すための手法のうちもっとも有効なものの一つに Bochner trick がある。ところで Bochner trick を適用するにあたっては、まず第一に適当な Laplacian を導入しなければならない。とくに葉層化多様体の接 de Rham cohomology に対する消滅定理を証明するためには、その葉層構造の各葉に沿った Laplacian、すなわち接 Laplacian を取り扱う必要が生じる。ところが、この接 Laplacian は各葉に制限したときには楕円型微分作用素であるが、多様体全体上でみたときには葉層構造の横断方向に退化した係数を持ち、従って通常の楕円型微分作用素の理論をこの接 Laplacian に直接適用することは出来ない。例えば、この接 Laplacian に対しては Hodge の分解定理がいつも成り立つとは限らない。さらに困難なのは、この接 Laplacian を主項として持つ偏微分方程式の解に対しては横断方向の連続性・微分可能性が一般には期待し得ない、という点である。これらが Bochner trick により葉層化多様体の接 de Rham cohomology の消滅を証明しようとしたときに直面するもっとも深刻な問題である。しかしながら、確率解析 - より具体的に言えば、接 Laplacian により生成される接 Brown 運動 - を用いることにより、適当な設定の下（例えば前述の剛性定理を証明するためには十分な設定の下）接 de Rham cohomology の消滅が証明できる。