数理解析研究所講究録
第 894 巻 1995 年 9-21

超分布の調和解析について

東大数理科学　栄田厚彦(Atsuhiko Eida)

§0 序

超局所解析とは余接バンドル(シンプレクティック多様体)上において局所的に問題を考えることを言うが, Boutet de Monvel氏はこれを対応する管状領域上のToeplitz作用素と解釈した. これにより超局所解析の初等的理論のための道具を提供することがさらに可能になった. 具体例として球面S^n(コンパクト)およびユークリッド空間$\mathbb{R}^n$(ノンコンパクト)を代表として考察する.

§1 Grauert管状領域

<u>定義1.1</u>　X: n次元複素解析多様体, M: Xの実n次元実解析部分多様体とする. Mが$\mathbb{R}$-多様体であるとは, 任意の$m\in M$に対してXにおけるmの近傍Uとその複素座標系が存在して$M\cap U=\{\mathrm{Im}\, z_1=\mathrm{Im}\, z_2=\cdots=\mathrm{Im}\, z_n=0\}$となることをいう.

命題1.2 [Bruhat − Whitney] 任意の実解析多様体Mはある複素解析多様体Xに$\mathbb{R}$−多様体として埋め込まれる。この埋め込みは正則同型を除いて一意である。

上の命題において$x \in X$をとり，$\rho(x)$をxからMまでの（適当なリーマン計量の意味での）距離とする。$X_\varepsilon = \{x \in X ; \rho(x) < \varepsilon\}$とする。$\varepsilon$を十分小さくとると，$X_\varepsilon$は強擬凸領域になる。

定義1.3 このとき(X_ε, ρ)をMのGrauert管状領域と呼ぼう。

自明な例として，$M = \mathbb{R}^n$，$X = \mathbb{C}^n$のとき，$X_\varepsilon = \{x + iy \in \mathbb{C}^n ; |y| < \varepsilon\}$は任意の$\varepsilon > 0$でGrauert管状領域である。

命題1.4 [Kostant − Sternberg] $\mathfrak{X}$を$2n$次元シンプレクティック多様体，Mを$\mathfrak{X}$のn次元部分多様体とする。αを$d\alpha$が基本2次形式となる$\mathfrak{X}$上の1形式で，M上の全ての点で消えるとする。このとき$\mathfrak{X}$の十分小さい

Mの近傍$\widetilde{X}'$に対し，Mのその余接バンドルT^*Mにおける近傍X'とシンプレクティック変換$\Phi: \widetilde{X}' \longrightarrow X'$が一意に存在し，$\Phi^*\alpha' = \alpha$，$\Phi \circ \iota = \tilde{\iota}$とできる．ただし，$\alpha'$は$T^*M$の基本1形式，$\iota$，$\tilde{\iota}$は$M$の$\widetilde{X}$，$T^*M$への埋め込みとする．

この命題で$\alpha = \mathrm{Im}\,\partial\rho$ととることにより，実解析多様体$M$のGrauert管状領域$(X_\varepsilon, \rho)$の境界$\partial X_\varepsilon$を$M$の余接球バンドル$S^*M$と同一視することができるのである．

§2 球面S^n上での超局所解析

この節ではG. Lebeau [8]の結果を大いに援用する．

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; x^2 = 1\}$$

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} ; z^2 = 0\} = \{z = u + iv ; u^2 = v^2,\ uv = 0\}$$

$$\rho(z) = |z|^2 = u^2 + v^2$$

$DS^n = \{z \in \Gamma ; \rho(z) < 2\}$とおくと，$\partial DS^n$は$S^n$の余接球バンドル$S^*S^n$と同一視される．$S^n$および$S^*S^n$には$\mathbb{R}^{n+1}$および$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$から導入される自然な測度を入れる．$O(n+1)$は$S^n$と

S^*S^nに推移的に作用する。また$U(1)$はS^*S^nに$(e^{i\theta}, z) \longmapsto e^{i\theta}z$で作用する。これらの群の作用で測度は不変である。$L^2(S^n)$における$O(n+1)$のユニタリ表現の既約分解を$L^2(S^n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k$とする。$V_k$の元は$k$次斉次調和多項式である。部分空間$V_k$の正規直交基底を$\{S_{k,j}(x)\}_{j=1,\cdots,\nu_k}$とする。このとき異なる組$(k,j)$に対して$S_{k,j}(z)$は$L^2(S^*S^n)$において互いに直交する。(Schurの補題) $\{S_{k,j}(z)\}$で生成される$\mathcal{B}(S^*S^n)$の部分空間を$H(S^*S^n)$(一種のHardy空間)と書くと，$H(S^*S^n) = \mathcal{O}(DS^n)$である。$\mathcal{B}(S^*S^n)$から$H(S^*S^n)$への射影がSzegö射影である。($\mathcal{B}$は*hyperfunction*の層を表わす。)

球面S^n上のPoisson核は

$$P(z, x) = \frac{1 - z^2}{\omega_n \{(z - x)^2\}^{\frac{n+1}{2}}} = \sum_{j,k} S_{k,j}(z)\overline{S_{k,j}(x)}$$

で表わされる。また，次の核を球面S^n上のHörmander核とよぶことにする。

$$H(z, x) = \sum_{j,k} c_k^{-1} S_{k,j}(z)\overline{S_{k,j}(x)}$$

$$c_k = 2^k \omega_{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + k\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n - 1 + k)}$$

このようにした理由は後に出てくる$\mathbb{R}^n$上のHörmander核とのアナロジーから，

$$S_{k,j}(x)\cdot c_k = \int_{|\omega|=1} S_{k,j}(z)\,d\omega\ , \qquad z = x + i\omega$$

を要請したがためである．

これらの核に対応してPoisson作用素P，逆作用素P′，Hörmander作用素H，逆作用素H′が定義される．ただし，これらの核をどう作用させるかは，[8]を参照のこと．

$$P : \mathcal{B}(S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^*S^n)$$
$$P' : \mathcal{B}(S^*S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^n)$$
$$H : \mathcal{B}(S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^*S^n)$$
$$H' : \mathcal{B}(S^*S^n) \longrightarrow \mathcal{B}(S^n)$$

さらに次のことがわかる．

<u>命題 2.1</u>

$$P : \mathcal{B}(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(DS^n)$$
$$H : \mathcal{B}(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(DS^n)$$

<u>命題 2.2</u>

$$P : W^s(S^n) \xrightarrow{\sim} W^{s+\frac{n-1}{4}}(S^*S^n)\cap\mathcal{O}(DS^n)$$
$$H : W^s(S^n) \xrightarrow{\sim} W^{s-\frac{n-1}{4}}(S^*S^n)\cap\mathcal{O}(DS^n)$$

ここで W^s は s 次のソボレフ空間を表わし，その定義は S^n, S^*S^n 上の場合球面調和展開による重みを自然な仕方で与えたものである。
証明は P の場合は [8] で与えられているが，H の場合も同様にやればよい。

以後 $K = P$(または H), $K' = P'$(または H') とする。

<u>命題2.3</u>　$u \in \mathcal{B}(S^n)$ とする。

$(x_0, \xi_0) \notin SS(u) \iff Ku$ は $z_0 = x_0 - i\xi_0 \in S^*S^n$ の近傍で解析的である。

これも [8] の援用である。

次に，実解析多様体 M 上の Gevrey 族の超可微分関数の層を $\mathcal{E}^*_M$，超分布の層を $\mathcal{D}^{*\prime}_M$ で表わす。(ただし $* = \phi$, (s) または $\{s\}$, $s>1$) $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{D}^{*\prime}$ が soft であること，$\mathcal{B}$ が flabby であることは既知とする。また，microfunction の層を $\mathcal{C}_M$ として $\mathcal{E}^*_M$, $\mathcal{D}^{*\prime}_M$ に対応する $\mathcal{C}$ の部分層をそれぞれ，$\mathcal{C}^{d,*}_M$ $(= \mathrm{Im}(sp : \pi^{-1}\mathcal{E}^*_M \to \mathcal{C}_M))$, $\mathcal{C}^*_M$ $(= \mathrm{Im}(sp : \pi^{-1}\mathcal{D}^{*\prime}_M \to \mathcal{C}_M))$ としよう $(\pi : S^*M \to M)$.

このとき

<u>命題2.4</u>　$\mathcal{C}^{d,*}_{S^n}$，$\mathcal{C}^*_{S^n}$ は soft，$\mathcal{C}_{S^n}$ は flabby である。

<u>証明</u>　$\mathcal{C}^*_{S^n}$ のときは次の可換図式を使えば $\mathcal{D}^{*\prime}$ の softness に帰着できる。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}^{*\prime}(S^*S^n) \arrow[dl, bend left, "p'"] \arrow[d] & \\
\mathcal{D}^{*\prime}(S^n) \arrow[ur, "p"] \arrow[r, shift left, "\sim p"] \arrow[dr, "sp"'] & \mathcal{D}^{*\prime}(S^*S^n)\cap\mathcal{O}(DS^n) \arrow[l, shift left, "p'"] \arrow[d] & \\
 & \mathcal{C}^*(S^*S^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

他の場合も同様である。

§3 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上での超局所解析

$D\mathbb{R}^n = \{z\in\mathbb{C}^n;\ |\mathrm{Im}\, z|<1\}$ とおくと，$\partial D\mathbb{R}^n$ は $S^*\mathbb{R}^n$ と同一視される。

$\mathbb{R}^n$ 上の Poisson 核を

$$P(z,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|+i(z-x)\xi}\,d\xi,$$

$\mathbb{R}^n$ 上の Hörmander 核を

$$H(z,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} I(\xi)^{-1} e^{i(z-x)\xi}\,d\xi$$

で定義する。ただし，

$$I(\zeta)=\int_{|\omega|=1} e^{-\omega\zeta}\,d\omega=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}e^{|\zeta|}|\zeta|^{-\frac{n-1}{2}}(1+O(|\zeta|^{-1}))$$
$$(|\zeta|\to\infty)$$

である。これらの核に対応して Poisson 作用素 P，逆作用素 P'，Hörmander 作用素 H，逆作用素 H' が定義される。

$$Pu=\int_{\mathbb{R}^n}P(z,x)u(x)\,dx,$$

$$P'u=\int_{|\omega|=1}u(z)\,d\omega \underset{x}{*}\int_{\mathbb{R}^n}e^{|\zeta|}I(\zeta)^{-1}e^{ix\zeta}\,d\zeta,$$
$$(z=x+i\omega)$$

$$Hu=\int_{\mathbb{R}^n}H(z,x)u(x)\,dx,$$

$$H'u=\int_{|\omega|=1}u(z)\,d\omega \quad (z=x+i\omega).$$

$I(\zeta)$ の評価を使うと次の命題が導ける。

<u>命題 3.1</u>

$$P:W^s(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\sim}W^{s+\frac{n-1}{4}}(S^*\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{O}(D\mathbb{R}^n)$$
$$H:W^s(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\sim}W^{s-\frac{n-1}{4}}(S^*\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{O}(D\mathbb{R}^n)$$

以後 $K=P$（または H），$K'=P'$（または H'）とする。

次に，S. Pilipović 氏による関数空間を導入する．

$$\mathcal{S}^{s,h}_{L^r}(\mathbb{R}^n)=\left\{\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ {}^\forall\alpha\,{}^\forall\beta\ \frac{\|\langle x\rangle^\alpha\phi^{(\beta)}(x)\|_{L^r}}{h^{|\alpha+\beta|}\,\alpha!^s\,\beta!^s}<\infty\right\}$$

$$\langle x\rangle=(1+x^2)^{1/2},\quad r\in[1,\infty]$$

$$\mathcal{S}^{(s)}(\mathbb{R}^n)=\varprojlim_{h\to 0}\mathcal{S}^{s,h}_{L^r}(\mathbb{R}^n)\qquad \text{FN空間}\ (s>1)$$

$$\mathcal{S}^{\{s\}}(\mathbb{R}^n)=\varinjlim_{h\to\infty}\mathcal{S}^{s,h}_{L^r}(\mathbb{R}^n)\qquad \text{LN空間}\ (s\geq 1)$$

S. Pilipović 氏はこれらの強双対空間 $\mathcal{S}^{(s)\prime}(\mathbb{R}^n)$（LN空間），$\mathcal{S}^{\{s\}\prime}(\mathbb{R}^n)$（FN空間）を tempered ultradistributions と呼んだ．$\mathcal{S}^{\{1\}\prime}(\mathbb{R}^n)$ は Fourier hyperfunction にあたるので，これらを Fourier ultradistribution とも呼んでみたい．いずれも Fourier 変換で安定であり，構造定理，たたみ込みなどが研究されている．

<u>命題 3.2</u>　[S. Pilipović]　$u\in\mathcal{S}^{*\prime}(\mathbb{R}^n)$（$*=(s)$ または $\{s\}$）とする．

$$(x_0,\xi_0)\notin SS(u)\Longleftrightarrow \begin{array}{l}Ku\ \text{は}\ z_0=x_0-i\xi_0\in S^*\mathbb{R}^n\\ \text{の近傍で解析的である．}\end{array}$$

また，次も言える．

命題 3.3

$$K : \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^*(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(D\mathbb{R}^n)$$
$$K : \mathcal{S}^{*\prime}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^{*\prime}(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(D\mathbb{R}^n)$$

さて，我々の目標は次にあった。

命題 3.4

$\mathcal{C}^{d*}_{\mathbb{R}^n}$, $\mathcal{C}^*_{\mathbb{R}^n}$ は soft, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$ は flabby である。

証明

$\mathcal{C}^*_{\mathbb{R}^n}$ について示す。c-soft を示せば十分である。そこで $u \in \mathcal{C}^*(K)$ (K コンパクト $\subset S^*\mathbb{R}^n$) に対応する $v \in \mathcal{D}^{*\prime}(\pi(K))$ に対して $\mathcal{D}^{*\prime}$ の softness によりその延長 $w \in \mathcal{D}^{*\prime}(\mathbb{R}^n)$ がある。w の特異台はコンパクトにとれるから，次の補題により，うまく $w_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ をとって $w - w_0 \in \mathcal{S}^{*\prime}(\mathbb{R}^n)$ とできる。そこで $w - w_0$ を新しく $w \in \mathcal{S}^{*\prime}(\mathbb{R}^n)$ とすれば，射影 : $\mathcal{S}'^*(S^*\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(D\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^*(S^*\mathbb{R}^n)$ を π としたとき $\pi \circ Pw \in \mathcal{C}^*(S^*\mathbb{R}^n)$ が u の延長になる。ただしここでは [6] のように $\mathcal{C}(S^*\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{O}(D\mathbb{R}^n) / \mathcal{O}(D\mathbb{R}^n \cup S^*\mathbb{R}^n)$ と見ていることにも注意する。$\mathcal{C}^{d*}_{\mathbb{R}^n}$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$ の証明も同様である。

補題3.6 [Whitneyの近似定理]

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$とする。$\eta\in C^0(\mathbb{R}^n)$, $\eta(x)>0$ ($\forall x\in\mathbb{R}^n$)とする。このとき $g\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$が存在して

$$|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha g(x)|<\eta(x),\quad 0\leqq|\alpha|\leqq\frac{1}{\eta(x)}$$

が成り立つ。

注1) $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}$のflabbinessについては相原氏がすでに示している。我々の立場は$\mathcal{D}^{*\prime}$, $\mathcal{E}^*$, …などの層の性質から$\mathcal{E}^*$, $\mathcal{E}^{d,*}$, …などの層の性質を初等的に示すことにある。$\mathcal{E}^*$, $\mathcal{E}^{d,*}$がsoftより強いsuppleという性質を持つことは知られているのだが([4]参照), $\mathcal{D}^{*\prime}$, $\mathcal{E}^*$がsuppleであることが示せないので(おそらく不成立), 上記の方法を使うわけにはいかない。

注2) 実は命題3.1が小生の不明のため長らく手こずっていたのであるが, $I(\zeta)$の簡単な評価([5]による)から容易に出るのである。命題2.2に対応しているのだが, 命題2.2は複素位相のFourier積分作用素の議論を必要とする。このコントラストはおもしろい。

References

[1] L. Boutet de Monvel, Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres, C. R. Acad. Sc. t. 287, série A, (1978) 855-856

[2] ______ and V. Guillemin, The spectral theory of Toeplitz operators. Princeton U. Press, Annals of Math. series no. 99 (1981)

[3] F. Bruhat and H. Whitney, Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels, Comment. Math. Helv. 33 (1959), 132-160

[4] A. Eida and S. Pilipović, On the microlocal decomposition, to appear

[5] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I, Springer (1983)

[6] H. Komatsu, Microlocal analysis in Gevrey classes and in complex domains, in: Microlocal Analysis and Applications, Lect. Notes in Math., 1495, Springer, 1991, 161-236

[7] D. Kovačević and S. Pilipović, Structural properties of the space of tempered ultradistributions, Proc. Conf. "Complex Analysis and Application '91 with Symposium on Generalized Functions", Varna, 1991

[8] G. Lebeau, Fonctions harmoniques et spectre singulier, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 13 (1980) 269-291

[9] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lect. Notes in Math., 287, Springer, 1973

[10] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Am. Math. Soc. 36, 63-89