数理解析研究所講究録
903巻 1995年 6-10

p-hyponormal 作用素について

上越教育大学　長　宗雄

§1. 準備

初めに, これらの結果は都立三田高校の伊藤 益生氏および新潟大学教育学部・古谷 正教授との共同研究である.

H を complex Hilbert space とし, $B(H)$ を H 上の有界線形作用素の全体とする. $T \in B(H)$ に対して

$$T : p-hyponormal \Leftrightarrow \ (T^*T)^p \geq (TT^*)^p$$

$p-H$: set of all p-hyponormal operators とし, $p-HU$: p-hyponormal 作用素 T で polar 分解で U が unitary でとれるもの全体とする. $T = U|T|$ を T の polar 分解とする.

$z = re^{i\theta} \in \sigma_{ja}(T)$ (joint approximate point spectrum)

$\Leftrightarrow$ $\exists x_n$: unit vectors such that

$$(U - e^{i\theta})x_n \to 0 \ \ and \ \ (|T| - r)x_n \to 0$$

$\sigma_p(T), \sigma_a(T), \sigma_e(T)$ はそれぞれ T の point spectrum, approximate point spectrum, essential spectrum を記す.

定理1. $T = U|T| \in \mathrm{p-H} \Rightarrow \ \sigma_a(T) = \sigma_{ja}(T)$.

次に $\mathcal{T}_0 = \{\psi : \mathbf{R}^+$ 上の単調増加関数で $\psi(0) = 0\}$ とする. $\psi \in \mathcal{T}_0$ に対して $\tilde{\psi}$ を次のように定義する.

$$\tilde{\psi}(re^{i\theta}) = e^{i\theta}\psi(r) \ \text{および} \ \tilde{\psi}(T) = U\psi(|T|).$$

ただし, $T = U|T|$ での U は unitary とする.

定理 2. $T = U|T| \in \mathrm{p-HU}$ とする. $\psi \in \mathcal{T}_0$ & $\tilde{\psi}(T) \in \mathrm{p-HU}$

$$\Rightarrow \sigma(\tilde{\psi}(T)) = \tilde{\psi}(\sigma(T)).$$

系 1. $T = U|T| \in \mathrm{p-HU}$ & $r \in \sigma(T^*T) \Rightarrow \exists z \in \sigma(T); |z| = \sqrt{r}.$

§2. completely p-hyponormal 作用素のスペクトル

定理 3. $T = U|T| \in \mathrm{p-HU}$ & completely p-hyponormal. このとき $\min \sigma(|T|)$ と $max\ \sigma(|T|)$ のどちらの点も *finite multiplicity* をもつ $\sigma(|T|)$ の要素とはならない.

定理 4. T; completely p-hyponormal 作用素とする.

$$z \in \partial\sigma(T) \Rightarrow |z| \in \sigma_e(|T|) \bigcap \sigma_e(|T^*|).$$

系 2. $T \in \mathrm{p-H}$, $\mathrm{z} \in \sigma(T)$ & $\overline{z} \notin \sigma_p(T^*)$.

$$\Rightarrow \quad |z| \in \sigma_e(|T|) \bigcap \sigma_e(|T^*|).$$

定理 5. $T \in \mathrm{p-H}$ & $(\sigma(TT^*))^o = \phi$.

$\Rightarrow$ T has a nontrivial invariant subspace,

ここで E^oは Eの内点を表す.

定理 6. $T = U|T| \in \mathrm{p-HU}$ & completely p-hyponormal 作用素とする. このとき

$$G : open\ disk\ \&\ \sigma(T) \cap G \neq \phi \ \Rightarrow\ m_2(\sigma(T) \cap G) > 0$$

定理７． $T=U|T|\in \mathrm{p-HU}$ & completely p-hyponormal とし r は $\sigma(TT^*)$ の *isolated point*,
$a=inf\{s : s\in\sigma(TT^*), s\leq r \ and\ if\ s<r, (s,r)\cap\sigma_e(TT^*)=\phi\}$
$b=sup\{s : s\in\sigma(TT^*), s\geq r \ and\ if\ s>r, (r,s)\cap\sigma_e(TT^*)=\phi\}$,
とすると, このとき $a<b$ であり, さらに次のどちらかは成り立つ.

$$a<r\ and\ \{z : \sqrt{a}<|z|<\sqrt{r}\}\subset\sigma_p(T^*)$$

or

$$b>r\ and\ \{z : \sqrt{r}<|z|<\sqrt{b}\}\subset\sigma_p(T^*).$$

定理８． $T=U|T|\in \mathrm{p-UH}$ で completely p-hyponormal & $\mathrm{m}_1(\sigma(|T|))=0$ とする. このとき, つぎのような互いに素な開集合族 $A_n=\{z : a_n<|z|<b_n\}$ $(n=1,2,...)$ が存在する.

$$\sigma(T)\ is\ the\ closure\ of\ the\ set \bigcup A_n\ and\ \bigcup A_n\subset\sigma_p(T^*).$$

§３． angular cutting

$T=U|T|\in \mathrm{p-HU}, \Gamma=\{z : |z|=1\}$ とする.

$$U=\int_\Gamma \lambda\, dE(\lambda)\ \text{とスペクトル分解し}$$

$\gamma\subset\Gamma$ に対し $E(\lambda)\neq 0$ とする.

$$H_\gamma=E(\gamma)H,\ U_\gamma=U\mid_{H_\gamma},\ T_\gamma=U_\gamma[E(\gamma)|T|^{2p}E(\gamma)]^{1/2p}$$

とすると T_γ は H_γ 上の p-hyponormal 作用素となる. この T_γ を T の section という.

$$D_\gamma=\{\lambda : \lambda\neq 0, \lambda/|\lambda|\in D_\gamma\}$$

とおく.

定理 9. $T \in \mathrm{p-HU}$ & $\gamma \subset \Gamma$ に対して $\sigma(T_\gamma) \subset \overline{D_\gamma}$.

定理 11. $T \in \mathrm{p-HU}$ & γ : open

$$\Rightarrow \quad \sigma(T_\gamma) \cap D_\gamma = \sigma(T) \cap D_\gamma.$$

定理 12. T : completely p-hyponormal $\Rightarrow$ T_γ : completely p-hyponormal.

§ 4. スペクトル分解定理

A を contraction とする.

$$A^{[n]} = \begin{cases} A^n\ , & n \geq 0, \\ (A^*)^n\ , & n < 0. \end{cases}$$

とし

$$s - \lim_{n \to \pm\infty} A^{[-n]} T A^{[n]}$$

が存在するとき, これらの作用素を $\mathcal{S}_A^{\pm}(T)$ と記し T の A による polar symbolds という.

$$T = U|T| \in \mathrm{p-HU} \text{ のとき } \mathcal{S}_U^{\pm}(T) \text{ は存在する.}$$

そこで, $0 \leq k \leq 1$ に対して

$$T_{[k]} := U\{(1-k)\mathcal{S}_U^{-}(|T|^{2p}) + k \cdot \mathcal{S}_U^{+}(|T|^{2p})\}^{1/2p}$$

と記して, $T_{[k]}$ を T の general polar symbolds という.

定理 13. $T = U|T| \in \mathrm{p-HU}$ とすると

$$\sigma(T) = \bigcup_{0 \leq k \leq 1} \sigma(T_{[k]}).$$

参考文献

[1] A. Aluthge, On p-hyponormal operator for $0 < p < 1/2$, Integral Equations and Operator Theory 13(1990), 307-315.

[2] M. Chō, Spectral properties of p-hyponormal operators, Glasgow Math. J. 36(1994), 117-122.

[3] M. Chō and T. Huruya, p-Hyponormal operators ($0 < p < 1/2$), Comentationes Math. 33(1993), 23-29.

[4] M. Chō and M. Itoh, Putnam's inequality for p-hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc. to appear.

[5] M. Chō and M. Itoh, On the angular cutting for p-hyponormal operators, Acta Sci. Math. (Szeged), to appear.

[6] M. Chō and M. Itoh, On spectra of p-hyponormal operators, preprint.

[7] M. Chō, M. Itoh and T. Huruya, Spectra of completely p-hyponormal operators, preprint.

[8] M. Fujii, C. Himeji and A. Matsumoto, Theorems of Ando and Saito for p-hyponormal operators, Math. Japonica 39(1993), 595-598.

[9] M. Fujii, S. Izumino and R. Nakamoto, Classes of operators determined by the Heinz-Kato-Furuta inequality and the Hölder-McCarthy inequality Nihonkai Math. J. 5(1994), 61-67.

[10] D. Xia, On nonnormal operators–semi-hyponormal operators, Sci. Sinica 23(1983), 700-713.

[11] D. Xia, Spectral Theory of Hyponormal Operators, Birkhäuser 1983.