

# リーマン多様体の全測地的部分多様体

お茶の水女子大学 理学部 塚田和美

## 1 序

一般のリーマン多様体の全測地的部分多様体について考えたことを述べる。理論的にはまだ初歩的な到達で、得られた結果というより、このテーマについての思い入れを中心に述べたい。

リーマン多様体  $S$  から別のリーマン多様体  $M$  への等長埋め込み  $\varphi: S \rightarrow M$  が全測地的であるとは、 $S$  の任意の測地線が  $\varphi$  によって  $M$  の測地線に移される時を言う。組  $(S, \varphi)$  を  $M$  の全測地的部分多様体と呼ぶ。リーマン多様体の部分多様体の中で、全測地的部分多様体は基本的なものである。リーマン対称空間の全測地的部分多様体についてはよく研究されており、特に Chen-長野の理論 ([1]) は、この課題の研究に大きな進歩をもたらした。また、内藤博夫氏による最近の研究では代数的に徹底した議論がなされている。筆者は一般のリーマン多様体の全測地的部分多様体についてできるだけよく理解したいという (漠然としたものだが) 思いがある。ここで述べるいくつかの結果は、その思いを動機としている。

その存在についてはどうであろうか？ 一般のリーマン多様体は全測地的部分多様体をまったく持たないと考えるほうが自然であろう。実際、Spivak は彼の本 ([4]) で次のように述べている: “It seems rather clear that if one takes a Riemannian manifold  $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  “at random”, then it will not have any totally geodesic submanifolds of dimension  $> 1$ . But I must admit that I don't know of any specific example of such a manifold.” そこで次のような問題が生ずる。

**問題** “一般”のリーマン多様体は全測地的部分多様体をまったく持たないことを示せ。全測地的部分多様体をまったく持たないリーマン多様体の例を挙げよ。

上のような問題は、リーマン多様体の全測地的部分多様体についての理解の深まりを測るものさしになるのではないだろうか?

この問題を研究する際、全測地的部分多様体が存在するか否かの判定条件が重要になる。これについて第2節で論ずる。第3節は具体例の検討にあて、2次式、3次式で定義された  $R^{n+1}$  の超曲面の全測地的部分多様体について述べる。

## 2 全測地的部分多様体の存在についての条件

全測地的部分多様体の存在を測地線のそれと対比させて考えよう。

測地線の存在について、次の事実はよく知られている: 任意の接ベクトル  $u \in T_p M$  に対して  $0$  を含む区間  $I$  と  $I$  上で定義された測地線  $\gamma: I \rightarrow M$  で  $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = u$  をみたすものが存在する。この事実と照らしあわせると、次のような問題が生じる: 接ベクトル空間  $T_p M$  の部分空間  $V$  が与えられた時、 $V$  に接する  $M$  の全測地的部分多様体 (即ち、点  $o$  を含むリーマン多様体  $S$  と  $S$  から  $M$  への全測地的等長埋め込み  $\varphi: S \rightarrow M$  で  $\varphi(o) = p, \varphi_* T_o S = V$  をみたすもの) は一般に存在するだろうか?

このような問いかけに対し、E.Cartan による次の定理に注目しよう。

**定理 (axiom of planes)**  $M$  をリーマン多様体として、 $1 < r < \dim M$  をみたす整数  $r$  を固定する。 $M$  の任意の点  $p$ 、 $T_p M$  の任意の  $r$  次元部分空間  $V$  に対して、 $V$  に接する全測地的部分多様体が存在すれば、 $M$  は定曲率空間である。

従って一般のリーマン多様体  $M$  に対し、部分空間  $V \subset T_p M$  が与えられても、それに接する全測地的部分多様体が常に存在するとは限らない。そこで次のような課題が生じる:

**問題** 部分空間  $V \subset T_p M$  が与えられた時、 $V$  に接する  $M$  の全測地的部分多様体が存在するか否かの“よい”(あるいは実用的な) 判定条件を見い出せ。

この課題に対しても E.Cartan によって解答が与えられている。Cartan の結果を述べる前に記号を準備しておこう: 接ベクトル  $u \in T_p M$  に対し  $\gamma_u(t) = \exp_p tu$  で  $u$  に接する測地線を表す。また  $R_u(t)$  で、 $\gamma_u(t)$  に

おける曲率テンソルを  $\gamma_u$  に沿って平行移動して得られる  $T_p M$  上の (1,3) 型テンソルを表すことにする。

**定理 (E.Cartan)**  $V$  を  $T_p M$  の部分空間とする時、次の 2 条件は同値である。

- (1)  $V$  に接する  $M$  の全測地的部分多様体が存在する。
- (2)  $\varepsilon > 0$  が存在して任意の  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 、任意の長さ 1 のベクトル  $u \in V$  に対し

$$(2.1) \quad R_u(t)(x, y)z \in V \quad \text{for any } x, y, z \in V$$

が成立する。

$M$  がリーマン対称空間である時、(2.1) は次の著しい条件になる:

$$(2.1)' \quad R(x, y)z \in V \quad \text{for any } x, y, z \in V$$

しからは、等質リーマン多様体のようなよいリーマン多様体の属では、曲率テンソルの有限階の共変微分の情報で判定できないだろうか? naturally reductive homogeneous space についてはそれが言える。即ち

**定理**  $M$  を naturally reductive homogeneous space とする。 $M$  に依存して整数値  $d$  が定まり、次が成立する:  $T_o M$  の  $r$  次元部分空間  $V$  が与えられた時、 $V$  に接する  $M$  の全測地的部分多様体が存在するための必要十分条件は、任意の長さ 1 のベクトル  $u \in V$  に対し

$$(\nabla^i R)(u, \dots, u; x, y, z) \in V \quad 0 \leq i \leq d \quad x, y, z \in V,$$

が成立することである。

リーマン多様体  $M$  の測地線を  $M$  の単位球面束  $UM$  上定義された測地スプレーと呼ばれるベクトル場の積分曲線として捉える方法がある。全測地的部分多様体に対しても測地スプレーに相当するものを考えたい。それは容易に想像できるだろう:

整数  $r$  ( $1 \leq r \leq n-1$ ) を固定する。

$G_r(M)$ :  $r$  次元部分空間のなすグラスマン束 即ち

$$G_r(M) = \{\sigma = (p; V) \mid p \in M, V \subset T_p M \text{ } r\text{-dim subspace}\}.$$

$$\pi: G_r(M) \longrightarrow M \quad \text{射影 即ち } \pi((p; V)) = p$$

$G_r(M)$  上に  $r$ 次元接分布  $D$  を次のように定める。 $\mathcal{H}$  をリーマン接続から定まる水平部分空間のなす  $G_r(M)$  上の接分布とする。この時、 $\sigma = (p; V) \in G_r(M)$  に対し  $\pi_*$  は  $\mathcal{H}_\sigma$  から  $T_p M$  への線型同型写像になることに注意する。 $D_\sigma$  を  $D_\sigma \subset \mathcal{H}_\sigma, \pi_* D_\sigma = V$  をみたすように定める。次が成立する。

**定理 (1)**  $r$ 次元連結リーマン多様体  $S$  から  $M$  への全測地的はめ込み  $\varphi: S \rightarrow M$  に対し、 $\varphi^\#: S \rightarrow G_r(M)$  を  $\varphi^\#(p) = (\varphi(p); \varphi_* T_p S)$  で定義する。この時  $\varphi^\#(S)$  は  $D$  の積分多様体となる。

(2) 逆に  $S$  を  $D$  の積分多様体とする。 $\pi|_S: S \rightarrow M$  は全測地的埋め込みである。

上の定理で述べられたような捉え方によって、全測地的部分多様体をもっとよく理解するためのがかりが得られないだろうかと期待しているが、まだ著しい成果はない。ただ上の定理の応用として、全測地的部分多様体の次のような大域的存在問題について、既に知られている結果ではあるが、別証明ないし別の定式化が得られる:

(1) 極大全測地的部分多様体の存在 (Reckziegel [3])

(2) 完備全測地的部分多様体の存在条件 (Hermann [2])

$G_r(M)$  の点  $\sigma = (p; V)$  で  $D$  の積分多様体に含まれるもの全体を  $\mathcal{I}$  とおく。先の定理によって、 $\mathcal{I}$  の点  $\sigma = (p; V)$  に対し  $V$  に接する  $M$  の全測地的部分多様体が存在する。(1) について次が成立する。

**定理**  $\sigma = (p; V) \in \mathcal{I}$  に対し、次の意味で極大である全測地的埋め込み  $\varphi: S \rightarrow M$  が存在する:  $f: N \rightarrow M$  を  $V$  に接する任意の全測地的埋め込みとする。この時、等長埋め込み  $g: N \rightarrow S$  が存在して  $f = \varphi \circ g$  が成り立つ。

(2) について述べよう。以下  $M$  を完備リーマン多様体とする。 $\sigma = (p; V) \in \mathcal{I}, v \in V$  に対し、 $\sigma_v(t) = (\gamma_v(t); V(t))$  とおく。ここで  $\gamma_v: \mathbf{R} \rightarrow M$  は  $\gamma_v(0) = p, \gamma'_v(0) = v$  をみたす測地線、 $V(t)$  は  $\gamma_v$  に沿って  $V$  を平行移動して得られる  $\gamma_v(t)$  における  $r$ 次元部分空間を表す。

**定理**  $M$  を完備リーマン多様体とする。 $\sigma = (p; V) \in \mathcal{I}$  に対し、次の2条件は同値である。

(1)  $V$  に接する 完備全測地的部分多様体が存在する。

(2) 任意の  $v \in V, t \in \mathbf{R}$  に対し、 $\sigma_v(t) \in \mathcal{I}$ 。

上の主張は当たり前のように思えるかもしれないが、例えば系として次を得る。

系  $M$  を完備実解析的リーマン多様体とし、 $\sigma = (p; V) \in I$  とする。この時  $V$  に接する 完備全測地的部分多様体が存在する。

### 3 $\mathbf{R}^{n+1}$ の超曲面の全測地的部分多様体

全測地的部分多様体についての一般論の手がかりを得る上でも、具体例の検討は必要と思う。ここでは具体的な式で定義される  $\mathbf{R}^{n+1}$  の超曲面についてその全測地的部分多様体の分類を試みる。等質でないリーマン多様体の場合にその全測地的部分多様体の分類はどの程度可能か、そのひとつの試みとも言える。

$M$  を次のような多項式で定義される  $\mathbf{R}^{n+1}$  の超曲面とする。第1のものは、

$$(3.1) \quad a_1(x_1)^2 + a_2(x_2)^2 + \cdots + a_{n+1}(x_{n+1})^2 = 1$$

$$a_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n+1)$$

第2のものは、

$$(3.2) \quad x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{n+1}^3 = 1$$

以上のような超曲面  $M$  の全測地的部分多様体の分類結果を示そう。まず、(3.1) で定義されるものについて、(3.1) 式に付随する  $\mathbf{R}^{n+1}$  の対称変換を  $F$  で表す:

$$F = a_1 e_1 \otimes e_1^* + a_2 e_2 \otimes e_2^* + \cdots + a_{n+1} e_{n+1} \otimes e_{n+1}^*$$

$\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  は  $\mathbf{R}^{n+1}$  の標準基底。

定理  $M$  を (3.1) 式で定義される  $\mathbf{R}^{n+1}$  の超曲面とし、 $S$  を  $M$  の  $r$  次元 ( $2 \leq r \leq n-1$ ) 極大全測地的部分多様体とする。この時、 $S$  は次のいずれかである。

- (1)  $r+1$  次元  $F$  不変部分空間  $W$  が存在して、 $S$  は  $W \cap M$  の1つの連結成分。
- (2)  $M$  に含まれる  $\mathbf{R}^{n+1}$  の  $r$  次元アフィン部分空間。

注意 1 上記定理 (2) の型の全測地的部分多様体を分類することは、リーマン幾何ではなく、アフィン幾何に属する問題である。 $F$  の指数を  $\nu$  とする時、次が成り立つ。

$$M \text{ に含まれるアフィン部分空間の次元 } \leq \min\{\nu, n - \nu\}$$

また、 $S_1, S_2$  をそれぞれ  $M$  に含まれる  $r$  次元アフィン部分空間とすれば、 $M$  を保つ  $\mathbf{R}^{n+1}$  の線型変換  $\phi$  で、 $\phi(S_1) = S_2$  をみたすものが存在する。

注意 2 (3.1) で、 $a_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) を互いに異なる正の数とする。この時、 $M' = \{x = {}^t(x_1, \dots, x_{n+1}) \in M \mid x_i \neq 0 \text{ for any } i\}$  とおく。 $M'$  は  $M$  の開部分多様体である。上記定理によって  $M'$  は全測地的部分多様体をまったくもたないことが分かる。

(3.2) 式で定義される  $\mathbf{R}^{n+1}$  の超曲面を  $Q^n$  で表そう。 $\sigma$  を  $\{1, 2, \dots, n+1\}$  の置換とし、 $\mathbf{R}^{n+1}$  の線型変換  $T_\sigma$  を  $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$  で定義する。 $T_\sigma(Q^n) = Q^n$  となり、 $T_\sigma$  は  $Q^n$  の等長変換を引き起こす。 $2 \leq m \leq n-1$  に対し、 $Q^m$  は自然に  $Q^n$  の部分多様体とみなすことができる。即ち、

$$Q^m = \{x = {}^t(x_1, \dots, x_{n+1}) \in Q^n \mid x_{m+2} = \dots = x_{n+1} = 0\}.$$

また、 $k_1, \dots, k_l$  を  $2 \leq k_1 \leq \dots \leq k_l, k_1 + \dots + k_l \leq n+1$  をみたす整数とし、 $Q^n$  の部分多様体  $S$  を次で定義し、記号としては  $S_{k_1, \dots, k_l}$  を用いる:

$$S = \{x = {}^t(x_1, \dots, x_{n+1}) \in Q^n \mid \left. \begin{array}{l} x_1 = \dots = x_{k_1}, x_{k_1+1} = \dots = x_{k_1+k_2}, \\ \dots, x_{k_1+\dots+k_{l-1}+1} = \dots = x_{k_1+\dots+k_{l-1}+k_l} \end{array} \right\}.$$

定理  $S$  を  $Q^n$  の  $r$  次元 ( $2 \leq r \leq n-1$ ) 極大全測地的部分多様体とする。

この時、 $S$  は  $T_\sigma$  によって次のいずれかと合同になる。

- (1)  $Q^m$  中の  $S_{k_1, \dots, k_l}$ 。ここで、 $m \leq n, r = m + l - (k_1 + \dots + k_l)$ 。
- (2)  $Q^n$  に含まれる  $\mathbf{R}^{n+1}$  の  $r$  次元アフィン部分空間。

注意  $Q^n$  に含まれる  $\mathbf{R}^{n+1}$  のアフィン部分空間の次元は  $n/2$  を越えない。

## 参考文献

- [1] B.Y.Chen and T.Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II, Duke Math. J. 45 (1978), 405-425.

- [2] R.Hermann, Existence in the large of totally geodesic submanifolds of Riemannian spaces, Bull. A. M. S. **66** (1960), 59–61.
- [3] H.Reckziegel, A class of distinguished isometric immersions with parallel second fundamental form, Resultate der Mathematik **6** (1983),56–63.
- [4] M.Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry Vol.3 , Publish or Perish Inc (1975).