数理解析研究所講究録
915巻 1995年 64-74

非対称行列の順序付きSOR法について

早大理工　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
早大理工　室谷義昭　(Yoshiaki Muroya)

特異摂動問題から導かれる差分方程式 ([7]) 等の非対称行列を係数行列とする連立方程式を実際に解く場合の非対称性を利用した有効な計算法を提案し ([8])、その誤差解析と各種の数値実験例を示す。(対称行列の場合の最適順序付きのSOR法については [4] を参照のこと。)

1. 順序付き改良SOR法

非対称行列を係数行列とする連立方程式 $Ax=b$ をSOR法を用いて解く場合に解く順序と加速係数を成分毎に変える方法を"順序付き改良SOR法" ([9]) と呼ぶことにする。(cf. 修正SOR法 [6])

$n\times n$ 行列 A に対し、適当な置換行列 P を取り、

$$\tilde{A}=PAP^T,\quad \tilde{\boldsymbol{x}}=P\boldsymbol{x},\quad \tilde{\boldsymbol{b}}=P\boldsymbol{b}$$

とおくと、順序付き改良SOR法は以下のように表される。

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m+1)}=(\tilde{D}-\tilde{\Phi}\tilde{L})^{-1}\{(I-\tilde{\Phi})\tilde{D}+\tilde{\Phi}\tilde{U}\}\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m)}+(\tilde{D}-\tilde{\Phi}\tilde{L})^{-1}\tilde{\Phi}\tilde{\boldsymbol{b}},\quad m=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

ここで $\tilde{A}=\tilde{D}-\tilde{L}-\tilde{U}$ と分解し、$\tilde{D}$ は対角行列、$\tilde{U}$ は上三角行列、$\tilde{L}$ は狭義下三角行列であり、$\tilde{\Phi}=\mathrm{diag}(\tilde{\omega}_1,\cdots,\tilde{\omega}_n)$ は加速係数行列である。

$$\boldsymbol{x}^{(m)}=P^T\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m)},\quad \Phi=P^T\tilde{\Phi}P=\mathrm{diag}(\omega_1,\cdots,\omega_n),\quad D=P^T\tilde{D}P,\quad L=P^T\tilde{L}P,\quad U=P^T\tilde{U}P$$

とおくと、(1) は次のように表される。

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)}=(D-\Phi L)^{-1}\{(I-\Phi)D+\Phi U\}\boldsymbol{x}^{(m)}+(D-\Phi L)^{-1}\Phi\boldsymbol{b},\quad m=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

例えば、置換行列を $P=I$ とすれば、(1) 式は普通の順序の改良SOR法である。特に、$\tilde{\omega}_i=\omega,\ i=1,\cdots,n$ ならば (1) は ω についての普通の順序での従来のSOR法である。また

$$P=\begin{bmatrix}0 & & 1\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{bmatrix}$$

とすれば、(1) 式は逆順序の改良SOR法となる。

従来のSOR法との異なる点は

1) 解く順序を考慮したこと。この点は非対称行列に対して非常に重要である。
(cf. R.S.Varga[4])

2) 加速係数 $\tilde{\omega}_i,\ i=1,\cdots,n$ を成分毎に変えたこと。

3) $\tilde{U}$ は狭義上三角行列とは限らないこと。

これらの点の各々に関しては、De.R.Vogelaere [5] がまず初めに順序付けについて触れており、その後 D.M.Young [6] が著書の中で red-black 順序について述べている。K.R..James

[2] は (2) 式、すなわち加速係数を成分ごとに変えたタイプについて Gauss-Seidel と Jacobi 型の加速係数を使って反復行列のスペクトル半径の取り得る範囲を示している。3) については J.J.Buoni and R.S.Varga [1] が行列 $\tilde{L}, \tilde{U}$ は三角行列に限らなくてもよいことについて触れている。

今回、これらの３つを同時に考え合わせることにより、非対称な三重対角行列を係数行列とする連立方程式に対し従来のSOR法と比較して非常に早く収束する有効な結果を得た。

以下に、改良SOR法に対する事前誤差評価の基本定理と加速係数 ω_i の特別な選び方３組に対する事前誤差評価及び順序付けについて述べ、それに伴う数値実験結果を示す。

2. 三重対角行列に対する加速係数 ω_i の選び方と事前誤差評価

$n \times n$ 三重対角行列（[3] 参照）

$$A = [-l_i, p_i, -u_i] = \begin{pmatrix} p_1 & -u_1 & & & \text{\Large 0} \\ -l_2 & p_2 & -u_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -l_{n-1} & p_{n-1} & -u_{n-1} \\ \text{\Large 0} & & & -l_n & p_n \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} l_{i+1}u_i \neq 0, & i = 1, \cdots, n-1 \\ p_i \neq 0, & i = 1, \cdots, n \end{array}$$

を係数行列とする連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対し、SOR法 (1) の各反復式を具体的に表すと、

$$x_i^{(m+1)} = \omega_i l_i x_{i-1}^{(m+1)} + (1-\omega_i p_i)x_i^{(m)} + \omega_i u_i x_{i+1}^{(m)} + \omega_i f_i, \ m = 0,1,2,\cdots, \quad \text{ただし}\ x_0^{(m+1)} = x_{n+1}^{(m)} = 0$$

$\hat{x}_i,\ i = 1, \cdots, n$ を真の解とし、$e_i^{(m)} \equiv x_i^{(m)} - \hat{x}_i,\ m = 0, 1, \cdots$ とおくと、反復式は次のように表される。

$$\begin{aligned} e_i^{(m+1)} - \omega_i l_i e_{i-1}^{(m+1)} &= (1 - \omega_i p_i)e_i^{(m)} + \omega_i u_i e_{i+1}^{(m)} \\ &= \omega_i u_i \left(e_{i+1}^{(m)} + \frac{1 - \omega_i p_i}{\omega_i u_i} e_i^{(m)} \right) \\ \text{ただし} \quad e_0^{(m+1)} &= e_{n+1}^{(m)} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$m + 1$ 回目の反復における誤差は (3) から次のように表される。

$$\begin{aligned} e_1^{(m+1)} &= (1 - \omega_1 p_1)e_1^{(m)} + \omega_1 u_1 e_2^{(m)} \\ e_2^{(m+1)} &= \omega_2 l_2 (1 - \omega_1 p_1) e_1^{(m)} \\ &\quad + \{\omega_2 l_2 \omega_1 u_1 + (1 - \omega_2 p_2)\} e_2^{(m)} + \omega_2 u_2 e_3^{(m)} \\ e_3^{(m+1)} &= \omega_3 l_3 \omega_2 l_2 (1 - \omega_1 p_1) e_1^{(m)} \\ &\quad + \omega_3 l_3 \{\omega_2 l_2 \omega_1 u_1 + (1 - \omega_2 p_2)\} e_2^{(m)} \\ &\quad + \{\omega_3 l_3 \omega_2 u_2 + (1 - \omega_3 p_3)\} e_3^{(m)} + \omega_3 u_3 e_4^{(m)} \\ &\ \vdots \\ e_i^{(m+1)} &= \omega_i l_i \cdots \omega_2 l_2 (1 - \omega_1 p_1) e_1^{(m)} + \omega_i l_i \cdots \omega_3 l_3 \{\omega_2 l_2 \omega_1 u_1 + (1 - \omega_2 p_2)\} e_2^{(m)} + \cdots \\ &\quad + \{\omega_i l_i \omega_{i-1} u_{i-1} + (1 - \omega_i p_i)\} e_i^{(m)} + \omega_i u_i e_{i+1}^{(m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots\\
e_n^{(m+1)} &= \omega_n l_n \cdots \omega_2 l_2 (1-\omega_1 p_1) e_1^{(m)} + \omega_n l_n \cdots \omega_3 l_3 \{\omega_2 l_2 \omega_1 u_1 + (1-\omega_2 p_2)\} e_2^{(m)} + \cdots \\
&\quad + \{\omega_n l_n \omega_{n-1} u_{n-1} + (1-\omega_n p_n)\} e_n^{(m)}
\end{aligned}$$

ここで $\lambda_i = \omega_i p_i - 1,\ i=1,\cdots,n,\ \tilde{\lambda}_i = \omega_{i+1} l_{i+1} \omega_i u_i,\ i=1,\cdots,n-1$ とし、さらに、$\tilde{e}_1^{(m)} = e_1^{(m)},\ e_i^{(m)} = \omega_i l_i \cdots \omega_2 l_2 \tilde{e}_i^{(m)},\ i=2,3,\cdots,n$ なる $\tilde{e}_i^{(m)}$ を考えると $(m+1)$ 番目の誤差は次のように書き直される。

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{e}_1^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_2^{(m)}\\
\tilde{e}_2^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\tilde{\lambda}_1 - \lambda_2)\tilde{e}_2^{(m)} + \tilde{\lambda}_2 \tilde{e}_3^{(m)}\\
&\vdots\\
\tilde{e}_i^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\tilde{\lambda}_1 - \lambda_2)\tilde{e}_2^{(m)} + \cdots + (\tilde{\lambda}_{i-1} - \lambda_i)\tilde{e}_i^{(m)} + \tilde{\lambda}_i \tilde{e}_{i+1}^{(m)}\\
&\vdots\\
\tilde{e}_{n-1}^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\tilde{\lambda}_1 - \lambda_2)\tilde{e}_2^{(m)} + \cdots + (\tilde{\lambda}_{n-2} - \lambda_{n-1})\tilde{e}_{n-1}^{(m)} + \tilde{\lambda}_{n-1} \tilde{e}_n^{(m)}\\
\tilde{e}_n^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\tilde{\lambda}_1 - \lambda_2)\tilde{e}_2^{(m)} + \cdots\\
&\qquad + (\tilde{\lambda}_{n-2} - \lambda_{n-1})\tilde{e}_{n-1}^{(m)} + (\tilde{\lambda}_{n-1} - \lambda_n)\tilde{e}_n^{(m)}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(4) 式より直ちに改良SOR法の誤差評価に対する基本定理を得る。

定理 1

$$\bar{\kappa} = |\lambda_1| + \max\left\{ \max_{1\le i\le n-1}\left(\sum_{j=2}^{i} |\tilde{\lambda}_{j-1} - \lambda_j| + |\tilde{\lambda}_i|\right),\ \sum_{j=2}^{n} |\tilde{\lambda}_{j-1} - \lambda_j| \right\} < 1 \quad \text{のとき}$$

$$\max_{1\le i\le n} |\tilde{e}_i^{(m)}| \le \bar{\kappa}^m \cdot \max_{1\le i\le n} |\tilde{e}_i^{(0)}|$$

より、 $\tilde{e}_i^{(m)} \to 0,\ (m\to\infty)$ となる。従って、 $e_i^{(m)} = x_i^{(m)} - \hat{x}_i \to 0\ (m\to\infty)$ である。

次に $\lambda_i, \tilde{\lambda}_i$ が (2) 式のSOR行列 $\mathcal{L}_\Phi$ に対して $\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ となる特別な関係を満たす I)、II)、III) の場合の、より具体的な評価を考える。

I) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_i = \tilde{\lambda}_{i-1},\ i=2,\cdots,n$ の場合

このとき、加速係数は次のように決まる。

$$\omega_1 = \frac{1}{p_1}, \quad \omega_i = \frac{1}{p_i - l_i \omega_{i-1} u_{i-1}}, \quad i=2,\cdots,n \tag{5}$$

ただし、分母は0でないとする。

上記の条件から (4) は次のように簡単に表される。$m \ge 0$ に対し、

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_2^{(m)}\\
\tilde{e}_2^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_2 \tilde{e}_3^{(m)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_i^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_i \tilde{e}_{i+1}^{(m)} \\
&\vdots \\
\tilde{e}_{n-2}^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_{n-2} \tilde{e}_{n-1}^{(m)} \\
\tilde{e}_{n-1}^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_{n-1} \tilde{e}_{n}^{(m)} \\
\tilde{e}_{n}^{(m+1)} &= 0
\end{aligned}
$$

$1 \le m \le n$に対し m 回目の反復では $\tilde{e}_i^{(m)} = 0,\ \ i = n, \cdots, n-m+1$となる。 n回目では、 $\tilde{e}_i^{(n)} = 0,\ i = n, \cdots, 1$ となることからこの反復式は確実にn回目には収束する。よって、

$$
\begin{aligned}
&\tilde{e}_i^{(m)} = \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_{i+1} \cdots \tilde{\lambda}_{i+m-1} \tilde{e}_{i+m}^{(0)}, && 1 \le i \le n-m \\
&\tilde{e}_i^{(m)} = 0, && n-m+1 \le i \le n
\end{aligned}
$$

と表すことができる。このとき、$\max_{1 \le i \le n} |\tilde{e}_i^{(m)}| \le \kappa^m \max_{1 \le i \le n} |\tilde{e}_i^{(0)}|$、ここに $\kappa = \max_{1 \le i \le n-1} |\tilde{\lambda}_i| \le \bar{\kappa}$ となるので、 $\kappa < 1$ のとき許容誤差 δ が与えられたとき $\max_{1 \le i \le n} |e_i^{(m)}| < \delta$ となる m が n より小さく取れる場合がある。

II) $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i,\ i = 1, \cdots, n-1,\ \ \lambda_n = 0$ の場合

このとき、加速係数は次のように決まる。

$$
\omega_n = \frac{1}{p_n}, \qquad \omega_i = \frac{1}{p_i - u_i \omega_{i+1} l_{i+1}}, \qquad i = n-1, \cdots, 1 \tag{6}
$$

ただし、分母は0でないとする。

上記の条件から(4)式は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}_1^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + \lambda_1 \tilde{e}_2^{(m)} \\
\tilde{e}_2^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\lambda_1 - \lambda_2) \tilde{e}_2^{(m)} + \lambda_2 \tilde{e}_3^{(m)} \\
&\vdots \\
\tilde{e}_i^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\lambda_1 - \lambda_2) \tilde{e}_2^{(m)} + \cdots + (\lambda_{i-1} - \lambda_i) \tilde{e}_i^{(m)} + \lambda_i \tilde{e}_{i+1}^{(m)} \\
&\vdots \\
\tilde{e}_{n-1}^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\lambda_1 - \lambda_2) \tilde{e}_2^{(m)} + \cdots + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}) \tilde{e}_{n-1}^{(m)} + \lambda_{n-1} \tilde{e}_n^{(m)} \\
\tilde{e}_n^{(m+1)} &= -\lambda_1 \tilde{e}_1^{(m)} + (\lambda_1 - \lambda_2) \tilde{e}_2^{(m)} + \cdots + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}) \tilde{e}_{n-1}^{(m)} + \lambda_{n-1} \tilde{e}_n^{(m)} = \tilde{e}_{n-1}^{(m+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{e}_i^{(m+1)} - \tilde{e}_{i-1}^{(m+1)} = \lambda_i (\tilde{e}_{i+1}^{(m)} - \tilde{e}_i^{(m)}), \qquad i = 1, 2, \cdots, n
$$

$$
\text{ただし} \quad \tilde{e}_0^{(m+1)} = 0,\ \ \tilde{e}_{n+1}^{(m)} = 0
$$

m回目の反復において $\tilde{e}_n^{(m)} = \tilde{e}_{n-1}^{(m)} = \cdots = \tilde{e}_{n-m}^{(m)}$ が成り立っている。従って、$n-1$回目には $\tilde{e}_1^{(n-1)} = \tilde{e}_2^{(n-1)} = \cdots = \tilde{e}_n^{(n-1)},\ \ i = 1, \cdots, n$、$n$ 回目には $\tilde{e}_1^{(n)} = \tilde{e}_2^{(n)} = \cdots = \tilde{e}_n^{(n)} = 0$ となることからこの反復式はn回目には確実に収束する。

$\tilde{e}^{(m)} = \max_{2 \le i \le n} |\tilde{e}_i^{(m)}|$ かつ $\kappa = \sum_{j=2}^{n} |\lambda_{j-1} - \lambda_j|$ とすると $\kappa \le \bar{\kappa}$ であり、上式より

$$\tilde{e}^{(m+1)} \leq |\lambda_1|\tilde{e}_1^{(m)} + \kappa\tilde{e}^{(m)}$$

$m < n$ に対して、$\tilde{e}_1^{(m)}$ は

$$\tilde{e}_1^{(m)} = \lambda_1(\tilde{e}_2^{(m-1)} - \tilde{e}_1^{(m-1)}) = \lambda_1\lambda_2(\tilde{e}_3^{(m-2)} - \tilde{e}_2^{(m-2)}) = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m(\tilde{e}_{m+1}^{(0)} - \tilde{e}_m^{(0)})$$

である。これから、$m < n$ のとき

$$\begin{aligned}\tilde{e}^{(m+1)} \leq\ & |\lambda_1|\cdot\Big\{|\lambda_1|\cdots|\lambda_m||\tilde{e}_{m+1}^{(0)} - \tilde{e}_m^{(0)}| + \kappa|\lambda_1|\cdots|\lambda_{m-1}||\tilde{e}_m^{(0)} - \tilde{e}_{m-1}^{(0)}| + \cdots \\ & +\kappa^{m-1}|\lambda_1||\tilde{e}_2^{(0)} - \tilde{e}_1^{(0)}| + \kappa^m\tilde{e}_1^{(0)}\Big\} + \kappa^{m+1}\tilde{e}^{(0)}\end{aligned}$$

ここで、$|\lambda_i| \leq \sum_{j=i}^{n-1}|\lambda_j - \lambda_{j+1}| + |\lambda_n| \leq \kappa$ なので

$$\tilde{e}^{(m)} \leq 2m\kappa^m\cdot\tilde{e}^{(0)}, \qquad m \geq 1$$

従って $\kappa < 1$ のとき許容誤差 δ が与えられたとき $\max_{1\leq i\leq n}|e_i^{(m)}| < \delta$ となる m が n より小さく取れる場合がある。

この他にI), II) の組み合わせとして次のような場合も考えられ得る。

III) 次の条件が成り立つ場合

$2 \leq i \leq n-1$ となる i に対し、

$$\begin{aligned}&\lambda_1 = 0, \quad \lambda_j = \tilde{\lambda}_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq i-1 \\ &\lambda_i = \tilde{\lambda}_{i-1} + \tilde{\lambda}_i \\ &\lambda_j = \tilde{\lambda}_j, \quad i+1 \leq j \leq n-1, \qquad \lambda_n = 0\end{aligned}$$

このとき、加速係数は次のように決まる。

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1 = \frac{1}{p_1}, \quad \omega_j = \frac{1}{p_j - l_j\omega_{j-1}u_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \cdots, i-1 \\ &\omega_n = \frac{1}{p_n}, \quad \omega_j = \frac{1}{p_j - u_j\omega_{j+1}l_{j+1}}, \quad j = n-1, n-2, \cdots, i+1 \\ &\omega_i = \frac{1}{p_i - l_i\omega_{i-1}u_{i-1} - u_i\omega_{i+1}l_{i+1}}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ただし分母は0でないと仮定する。

これらを(4)に代入すると、次のように表される。

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_1\tilde{e}_2^{(m)} \\ \tilde{e}_2^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_2\tilde{e}_3^{(m)} \\ &\vdots \\ \tilde{e}_{i-1}^{(m+1)} &= \tilde{\lambda}_{i-1}\tilde{e}_i^{(m)} \\ \tilde{e}_i^{(m+1)} &= -\tilde{\lambda}_i\tilde{e}_i^{(m)} + \tilde{\lambda}_i\tilde{e}_{i+1}^{(m)} \\ \tilde{e}_{i+1}^{(m+1)} &= -\tilde{\lambda}_i\tilde{e}_i^{(m)} + (\tilde{\lambda}_i - \lambda_{i+1})\tilde{e}_{i+1}^{(m)} + \lambda_{i+1}\tilde{e}_{i+2}^{(m)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \vdots \\
\tilde{e}_{n-1}^{(m+1)} &= -\lambda_i \tilde{e}_i^{(m)} + (\tilde{\lambda}_i - \lambda_{i+1})\tilde{e}_{i+1}^{(m)} + (\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2})\tilde{e}_{i+2}^{(m)} + \cdots + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})\tilde{e}_{n-1}^{(m)} + \lambda_{n-1}\tilde{e}_n^{(m)} \\
\tilde{e}_{n}^{(m+1)} &= -\lambda_i \tilde{e}_i^{(m)} + (\tilde{\lambda}_i - \lambda_{i+1})\tilde{e}_{i+1}^{(m)} + (\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2})\tilde{e}_{i+2}^{(m)} + \cdots + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})\tilde{e}_{n-1}^{(m)} + \lambda_{n-1}\tilde{e}_n^{(m)} \\
&= \tilde{e}_{n-1}^{(m+1)}
\end{aligned}
$$

$$m \geq 1 \text{ のとき } \tilde{e}_{i+1}^{(m)} = \tilde{e}_i^{(m)} + \lambda_{i+1}(\tilde{e}_{i+2}^{(m-1)} - \tilde{e}_{i+1}^{(m-1)})$$

ここで、II) のタイプのように $m \leq n-i-1$ のとき、$\tilde{e}_n^{(m)} = \tilde{e}_{n-1}^{(m)} = \cdots = \tilde{e}_{n-m}^{(m)}$ となる。$m = n-i+1$ で、$\tilde{e}_i^{(n-i+1)} = \tilde{\lambda}_i \lambda_{i+1}(\tilde{e}_{i+2}^{(n-i-1)} - \tilde{e}_{i+1}^{(n-i-1)}) = 0$ となる。続けて I) の場合に従って反復回数が $n-i+2 \leq m \leq n$ のとき、$\tilde{e}_{i-1}^{(m)} = \tilde{e}_{i-2}^{(m)} = \cdots = \tilde{e}_{n-m+1}^{(m)} = 0$ となり、I)、II) の場合と同様に全体として n 回の反復で確実に収束する。

この場合も

$$\kappa = \max\left(\max_{1 \leq j \leq i-1} |\tilde{\lambda}_j|, \sum_{j=i+1}^{n} |\lambda_{j-1} - \lambda_j| \right)$$

とすると、$\kappa \leq \bar{\kappa}$ であり、$\max_{1\leq i \leq n} |\tilde{e}_i^{(m)}| \leq 2m\kappa^m \max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{e}_i^{(0)}|$ となるので、$\kappa < 1$ のとき、許容誤差 δ が与えられたとき $\max_{1 \leq i \leq n} |e_i^{(m)}| < \delta$ となる m が n より小さく取れる場合がある。

次の定理は、ω_i の単調性と収束するための反復回数が n に関係しない十分条件を与える。

定理 2 $p_i = 1$ かつ $4l_{i+1}u_i < 1$ とする。$l_{i+1}u_i,\ i = 1, \cdots, n-1$ が一定符号かつ $|l_{i+1}u_i|$ が i について単調減少のとき、II) の (6) で定まる $\omega_i,\ i = 1, \cdots, n$ に対して

$$1 = \omega_n < \omega_{n-1} < \cdots < \omega_1 < \hat{\omega} < 2 \quad (\ l_{i+1}u_i > 0 \text{ のとき }\ )$$

$$\frac{1}{1 + \max_{1 \leq i \leq n-1} |l_{i+1}u_i|} \leq \omega_{n-1} < \omega_{n-3} < \cdots < \omega_{n-2} < \omega_n = 1 \quad (\ l_{i+1}u_i < 0 \text{ のとき }\ )$$

より、

$$\kappa < |\hat{\omega} - 1| < 1 \tag{8}$$

となる。ここに、 $0 < \hat{\omega} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - 4 \max_{1 \leq i \leq n-1}(l_{i+1}u_i)}} < 2$

従って、許容誤差 δ が与えられたとき $\max_{1 \leq i \leq n} |e_i^{(m)}| < \delta$ となる反復回数 m は各 $\omega_i l_i \leq 1$ のとき n に関係しない。

I) 及び III) についても (8) が成立する類似な定理が得られる。順序付き改良SOR法の事前誤差評価は上記の I)、II)、III) の場合の誤差評価が応用できる。

3. 変わり点と順序付け

連立方程式 $Ax = b$ の A が変わり点を持つ行列の場合についてここで扱う。まず、変わり点の定義を次に示す。簡単のため $p_i = 1,\ i = 1, \cdots, n$ と仮定する。

定義 1 n 次元連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して係数行列 $A = [-l_i, 1, -u_i],\ i = 1, \cdots, n$ に対し、$3 \leq k \leq n-2$ を満たす整数 k について $(|l_{k-1}| - |u_{k-1}|)(|l_{k+1}| - |u_{k+1}|) < 0$ かつ $(|l_k| - \frac{1}{2})(|u_k| - \frac{1}{2}) > 0$ が成り立つならば、x_k を "変わり点" と呼ぶ。

特に、$|l_k|, |u_k| < \frac{1}{2}$ かつ $|l_{k-1}| < |u_{k-1}|$ かつ $|l_{k+1}| > |u_{k+1}|$ が成り立つならば、x_k は "安定" 変わり点といい、$|l_k|, |u_k| > \frac{1}{2}$ かつ $|l_{k-1}| > |u_{k-1}|$ かつ $|l_{k+1}| < |u_{k+1}|$ が成り立つならば x_k を "不安定" 変わり点という。

ここでは $l_i, u_i \neq \frac{1}{2}$, $i = 1, \cdots, n$ であるとし、もし x_{r_k}, $k = 1, \cdots, p$ $(1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_p \leq n)$ が変わり点ならば、各 x_{r_k} は安定変わり点かもしくは不安定変わり点以外にあり得ないと仮定する。従って $p \geq 2$ ならば $(|l_{r_k}| - \frac{1}{2})(|l_{r_{k+1}}| - \frac{1}{2}) < 0$, $k = 1, 2, \cdots, p-1$ を満たす。

次に具体的に $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-l_i, 1, -u_i]$ に対して順序付けを行う置換行列をどのように選べば良いかを示す。置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1, & \cdots, & n \\ \sigma(1), & \cdots, & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

に対応する置換行列 P について、σ が少なくとも次の条件をすべて満たすとき、その順序は良い順序であるという。

1) x_k, $k = 2, \cdots, n-1$ が変わり点でないとする。
$|l_i| > |u_i|$ ならば $\sigma(i-1) < \sigma(i) < \sigma(i+1)$ である。
$|l_i| < |u_i|$ ならば $\sigma(i-1) > \sigma(i) > \sigma(i+1)$ である。

2) x_k が変わり点であるとする。
$|l_{k-1}| < |u_{k-1}|$ かつ $|l_{k+1}| > |u_{k+1}|$ ならば $\sigma(i-1), \sigma(i+1) > \sigma(i)$ である。
$|l_{k-1}| > |u_{k-1}|$ かつ $|l_{k+1}| < |u_{k+1}|$ ならば $\sigma(i-1), \sigma(i+1) < \sigma(i)$ である。

前述の仮定の下で、実際に良い順序に対応した置換行列を選ぶことができる。

変わり点と置換行列の例として $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-l_i, 1, -u_i]$ に対し各成分を次のようにする。

$$\begin{cases} l_j = \bar{l}_1 & (2 \leq j \leq r_1) \\ u_j = \bar{u}_1 & (1 \leq j \leq r_1 - 1) \end{cases} \qquad \text{ここで } \bar{l}_1 + \bar{u}_1 = 1, \ \bar{l}_1, \bar{u}_1 > 0 \text{ である。}$$

$$\begin{cases} l_j = \bar{l}_2 & (r_1 + 1 \leq j \leq n) \\ u_j = \bar{u}_2 & (r_1 \leq j \leq n - 1) \end{cases} \qquad \text{ここで } \bar{l}_2 + \bar{u}_2 = 1, \ \bar{l}_2, \bar{u}_2 > 0 \text{ である。}$$

x_{r_1} が変わり点のとき、$(r_1-1) \times (r_1-1)$ 小行列 $A_1 = [-\bar{l}_1, 1, -\bar{u}_1]$ と $(n-r_1) \times (n-r_1)$ 小行列 $A_2 = [-\bar{l}_2, 1, -\bar{u}_2]$ をそれぞれ第1番目、第2番目のブロックと呼ぶ。

簡単な例として置換行列 P は $0 < \bar{l}_1, \bar{u}_2 < \frac{1}{2}$ ならば P_s、$\bar{l}_1, \bar{u}_2 > \frac{1}{2}$ ならば P_u の形で表される。

$$P_s = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & & & \\ & \iddots & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ 1 & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & & 0 \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad P_u = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & 1 \\ & \mathbf{0} & & \vdots & & \iddots & \\ & & & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

定義1の行列の変わり点は特異摂動問題(9)の変わり点に対応していることに注意する。

4. 数値実験例

以上の事前誤差評価を考慮した加速係数及び良い順序の取り方に対しての数値実験例をここで示す。取り扱う連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の真の解は簡単のため $\hat{\boldsymbol{x}}=[\hat{x}_i]$, $\hat{x}_i=1$, $i=1\cdots,n$ であるとし、出発ベクトルを $\boldsymbol{x}^{(0)}=[x_i^{(0)}]$, $x_i=0$, $i=1,\cdots,n$ を選ぶものとする。許容誤差限界 $\delta=10^{-8}$ に対して $\max_{1\le i\le n}|e_i^{(m)}|<\delta$ となる最小の反復回数 m をそれぞれの方法に対し比較のために計算した。

Example 1. 例として次の特異摂動問題について

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon u''(x)-a(x)u'(x)+b(x)u(x)=f(x), \qquad x\in(0,1) \\
u(0)=\gamma_0, \qquad u(1)=\gamma_1
\end{gathered} \tag{9}
$$

$\varepsilon \in(0,1]$ なるパラメーター、関数 $a,b,f\in C^2[0,1]$ とし、a,b,f は ε に依存しないとき、 $a(x)\ge{}^\exists\alpha>0$, $b(x)\ge{}^\exists\beta$, $\alpha^2+4\varepsilon\beta>0$ を仮定する。

区間 $[0,1]$ を $h=1/(n+1)$, $x_i=ih$, $i=0,1,\cdots,n+1$ と分割する。このとき、上流差分スキームは次のように表される。

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}-a_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h}+b_iy_i=f_i, \quad i=1,\cdots,n \\
y_0=\gamma_0, \qquad y_{n+1}=\gamma_1
\end{gathered} \tag{10}
$$

ここで、 $a_i=a(x_i)$, $b_i=b(x_i)$, $f_i=f(x_i)$ とすると (10) は次の方程式
$-l_iy_{i-1}+p_iy_i-u_iy_{i+1}=k_i$, $i=1,\cdots,n$ で表され、

$$
l_i=\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+a_ih+b_ih^2}, \qquad p_i=1, \qquad u_i=\frac{\varepsilon+a_ih}{2\varepsilon+a_ih+b_ih^2}
$$

特に、$b_i=0$ とした場合 $l_i+u_i=1$ が成り立つので、

$$
l_i=\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+a_ih}, \quad u_i=\frac{\varepsilon+a_ih}{2\varepsilon+a_ih}, \quad h=\frac{1}{n+1}, \quad \varepsilon=h^2, \quad a_i=ih, \quad \bar{\omega}_i=\frac{1}{u_i}, \quad i=1,\cdots,n.
$$

について実験した。その結果が以下の表である。

Table 4.1

n	ω_{opt}	m_{ord}	m_{inv}	$m_{\omega_{opt}}$	$m_{\bar{\omega}_i}$	m_I	m_{II}	$m_{I,II-inv}$
80	1.221880878114550	142	63	64	5	11	4	80
120	1.221880565772298	221	102	103	4	11	3	120
160	1.221880876205672	301	142	143	4	11	3	160
200	1.221880875020172	382	183	183	4	11	3	200
240	1.221880880390542	463	224	224	4	11	3	240
280	1.221880879444867	544	265	264	4	11	3	280
320	1.221880888127118	626	307	307	4	11	3	320
360	1.221880877534967	708	349	349	4	11	3	360
400	1.221880892204558	790	391	391	4	11	3	400

このスキームは $0<l_i<u_i$, $i=1,\cdots,n$ となっている。$m_{\bar{\omega}_i}$ は $\bar{\omega}_i$, $i=1,\cdots,n$ を上記の設定に応じて計算しそれを順序付き改良SOR法に適用した場合である。さらに、$m_{ord},m_{inv},m_{\omega_{opt}}$ は各 ω_i を従来のSOR法での最適加速係数 ω_{opt} とし、それぞれ普通の

順序、逆順序、良い順序で反復した場合の反復回数を表している。さらに、m_I, m_{II} はそれぞれ良い順序で I)、II) の加速係数を適用した場合の反復回数である。最後に $m_{I,II-inv}$ はI)、II) の ω_i を用いて良い順序に対してその逆順序に解いた場合の反復回数である。I)、II) のいずれも同じ反復回数、即ち n 回で収束した。この例は、$l_i < u_i$ の場合なので m_{II} の方が m_I よりも精度が良くなっている。上の $\bar{\omega}_i,\ i = 1, \cdots, n$ に対する事前誤差評価も全く同様にできる。$m_{\bar{\omega}_i} > m_{II}$ かつ $m_{\bar{\omega}_i} \risingdotseq m_{II}$ となっているのは、定理 2 の (8) 式からも類推できる。

次に、対称な行列に対して実験してみた。

Example 2. $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-0.5, 1, -0.5]$ に対する結果が以下の表である。

Table 4.2

n	ω_{opt}	$m_{\omega_{opt}}$	m_I	m_{II}
100	1.939676333189737	324	100	100
200	1.969222668715880	622	200	200
300	1.979341620608331	910	300	300
400	1.984453167784293	1204	400	400
500	1.987536945019845	1503	500	500
600	1.989599860498993	1803	600	600
700	1.991076845290744	2103	700	700
800	1.992186488898571	2403	800	800

l, u が同じ大きさなので普通の順序、逆順序とも良い順序である。従来の ω_{opt} を用いての反復がほぼ $3(n+1)$ 回の反復回数を必要とするのに対し、ω_i をすべて変えた場合 (I, II の場合) では確実に n 回で収束していることがわかる。

変わり点を持つ行列の数値例を次に挙げる ($[x]$ は x を越えない最大整数とする)。

Example 3. $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-l_j, 1, -u_j]$ の各成分が以下の通りであるとする。

$$
\begin{array}{llll}
l_j = 0.012195, & u_j = 0.987805, & \omega_j = \tilde{\omega}_{b,1} = 1.012345554031413, & (1 \le j \le [\frac{n}{2}] - 1) \\
l_j = 0.012195, & u_j = 0.33, & \omega_j = 1.520207356283397, & (j = [\frac{n}{2}]) \\
l_j = 0.67, & u_j = 0.33, & \omega_j = \tilde{\omega}_{b,2} = 1.492537313432836, & ([\frac{n}{2}] + 1 \le j \le n)
\end{array}
$$

このとき、従来の $\omega_j = \omega_{opt}$ と上記の $\omega_j = \tilde{\omega}_{b,i}$ を適用させた結果が次の表である。

Table 4.3

n	ω_{opt}	m_{ord}	m_{inv}	$m_{\omega_{opt}}$	$m_{\tilde{\omega}_{b,i}}$
60	1.479021897966700	122	98	94	28
120	1.488882967725796	231	175	173	28
180	1.490924520577149	340	253	252	28
240	1.491698291842446	446	334	329	28
300	1.492097620966020	559	412	406	28

$m_{ord}, m_{inv}, m_{\omega_{opt}}$ はそれぞれ $\omega_j = \omega_{opt},\ \ i = 1, \cdots, n$ に対し、普通の順序、逆順序、良い順序で反復した場合の反復回数を示している。$m_{\tilde{\omega}_{b,i}}$ は上記の $\omega_j = \tilde{\omega}_{b,i}$ を適用し、良い順序で反復したときの反復回数を示しており、$m_{\tilde{\omega}_{b,i}}$ は $\max_i \tilde{\omega}_{b,i}$ のブロックの反復回数にほぼ等しい。

同じ方程式に対し I)、II)、III) の場合についての結果が次の表である。

Table 4.4

n	m_I			m_{II}			m_{III}		
	ord	inv	opt	ord	inv	opt	ord	inv	opt
60	55	31	27	30	35	25	30	31	25
120	85	61	27	60	65	25	60	61	25
180	115	91	27	90	95	25	90	91	25
240	145	121	27	120	125	25	120	121	25
300	175	151	27	150	155	25	150	151	25
360	205	181	27	180	185	25	180	181	25

ここに、 m_I, m_{II}, m_{III} はそれぞれ I)、II)、III) の場合の加速係数を適用した場合を意味し、この中でさらに ord, inv, opt は普通の順序、逆順序、良い順序を適用した場合の反復回数を示している。

Example 4. $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-l_j, 1, -u_j]$ の各成分が以下の通りであるとする。

$$\begin{array}{llll} l_j = 0.25, & u_j = 0.75, & \omega_j = \tilde{\omega}_{b,2} = 1.333333333333333, & (1 \le j \le [\frac{2n}{3}] - 1) \\ l_j = 0.25, & u_j = 0.1, & \omega_j = 1.538461538461539, & (j = [\frac{2n}{3}]) \\ l_j = 0.9, & u_j = 0.1, & \omega_j = \tilde{\omega}_{b,1} = 1.111111111111111, & ([\frac{2n}{3}] + 1 \le j \le n) \end{array}$$

Example 3 と同様にまず、ω_{opt} と $\tilde{\omega}_{b,i}$ を適用した結果を次に示す。

Table 4.5

n	ω_{opt}	m_{ord}	m_{inv}	$m_{\omega_{opt}}$	$m_{\tilde{\omega}_{b,i}}$
60	1.329533857460101	53	41	25	18
120	1.332369608845211	92	73	35	18
180	1.332946414500796	132	103	46	18
240	1.333179537687394	172	131	56	18
300	1.333678913261122	212	164	66	18
360	1.333405209204395	252	193	76	18

続いて、I)、II)、III) の場合の加速係数を適用した場合の結果が次の表であり、各記号の意味は Example 3 と同じである。

Table 4.6

n	m_I			m_{II}			m_{III}		
	ord	inv	opt	ord	inv	opt	ord	inv	opt
60	48	21	16	40	37	18	40	21	16
120	88	41	16	80	57	18	80	41	16
180	128	61	16	120	77	18	120	61	16
240	168	81	16	160	97	18	160	81	16
300	208	101	16	200	117	18	200	101	16
360	248	121	16	240	137	18	240	121	16

最後に、変わり点が2個ある例を考える。

Example 5. $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-l_j, 1, -u_j]$ の各成分が以下の通りであるとする。

$$
\begin{array}{llll}
l_j = 0.012195, & u_j = 0.987805, & \omega_j = \tilde{\omega}_{b,1} = 1.012345554031413, & (1 \le j \le [\frac{n}{3}] - 1) \\
l_j = 0.012195, & u_j = 0.33, & \omega_j = 1.520207356283397, & (j = [\frac{n}{3}]) \\
l_j = 0.67, & u_j = 0.33, & \omega_j = \tilde{\omega}_{b,2} = 1.492537313432836, & ([\frac{n}{3}] + 1 \le j \le [\frac{2n}{3}] - 1) \\
l_j = 0.67, & u_j = 0.9, & \omega_j = 1.754385964912281, & (j = [\frac{2n}{3}]) \\
l_j = 0.1, & u_j = 0.9, & \omega_j = \tilde{\omega}_{b,3} = 1.111111111111111, & ([\frac{2n}{3}] - 1 \le j \le n)
\end{array}
$$

Table 4.7

n	m_{II-ord}	m_{II-inv}	m_{II}	m_I	$m_{\tilde{\omega}_{b,i}}$
100	60	42	25	27	27
200	93	76	25	27	27
300	126	109	25	27	27
400	160	142	25	27	27
500	193	176	25	27	27
600	226	209	25	27	27

m_{II-ord}, m_{II-inv} は順序付き改良SOR法を $A = [-l_j, 1, -u_j], j = 1, \cdots, n$ 全体に対し普通の順序と逆順序で II) の場合の加速係数を適用させた場合の反復回数である。m_I, m_{II} はそれぞれ良い順序で、I)、II) の ω_i を適用した場合の反復回数である。

この結果から順序を考えずに反復すると n に応じて反復回数が増大していくのに対し、順序付けを行うことにより次元 n に関係せず、一定でかつ従来のSOR法に比べて非常に少ない反復回数で収束することがわかる。

以上の各数値実験例はいずれも順序付け改良SOR法の有効性をはっきりと示している。

参考文献

[1] J. J. Buoni and R. S. Varga, *Theorems of Stein-Rosenberg type*, in Numerical Mathematics (R.Ansorge, K.Glashoff, and B.Werner,eds) Birkhauser,Basel (1979), p. 65-75.

[2] K. R. James, *Convergence of matrix iterations subject to diagonal dominance*, SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), p. 478-484.

[3] T. Torii, *Inversion of tridiagonal matrices and the stability of tridiagonal systems of linear equation* Information Processing in Japan **6**, (1966) p.41-46.

[4] R. S. Varga, *Orderings of the successive overrelaxation scheme*, Pacific J. Math. **9** (1962), p. 925-939.

[5] De. R. Vogelaere, *Over-relaxations*, Abstract No539-53, Amer.Math.Soc.Notices. **5**, (1958) p.147.

[6] D. M. Young, *Iterative solution of large linear systems*, (Academic Press, New York, 1971).

[7] 石渡恵美子, 室谷義昭, 佐々木誠夫, 特異摂動問題の超収束の証明について, 日本数学会応用数学分科会 *1993*年度秋季総合分科会講演アブストラクト, pp.118-121, (1993).

[8] 石渡恵美子, 室谷義昭, 非対称行列の順序付きSOR法について, 日本数学会応用数学分科会 *1994*年度秋季総合分科会講演アブストラクト, pp.53-56, (1994).

[9] E. Ishiwata and Y. Muroya, *Improved SOR-like method with orderings for non-symmetric linear equations derived from singular perturbation problems*, Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations and its Applications, World Scientific Publishers, to appear.