数理解析研究所講究録
927巻 1995年 16-31

様相述語論理の Kripke bundle semantics に関する不完全性

津田塾大学数学計算機科学研究所 礒田恵以子 (Eiko Isoda)

概要

Kripke semantics は中間論理や様相論理でよく用いられてきたが、述語論理においては Kripke semantics に関して不完全な論理が多く存在する。Kripke bundle [3] と C-set semantics [1] [2] は標準的 Kripke semantics の個体間の関係をより詳細に表現したものとして知られている。

[1] で Q-$S4.1$ が Kripke semantics に関して不完全であることが示されているが、Kripke bundle と C-set semantics との違いを表現するような論理式を用いることで同様に Kripke bundle semantics に関して不完全であることを示すことができる。ここでは、同様の方針で [2] の Kripke semantics に関する不完全性の結果を Kripke bundle semantics に関する不完全性に拡張することを考える。

n 項述語記号 $P_j^n, Q_j^n, \cdots$ $(n \geq 0, j \geq 0)$、個体変数 $x_0, x_1, \cdots$、論理記号 $\vee$(or), $\wedge$(and), $\neg$(not), $\rightarrow$(if..then), $\forall$(for all), $\exists$(there is), $\Box$(necessity) から作られる論理式を考え、$A, B, \cdots$ で論理式を表すものとする。また、$A(\overrightarrow{x})$ で、論理式 A のすべての自由変数が変数の列 $\overrightarrow{x}$ に含まれることを意味することとする。

ここでは様相論理 S4 の拡大のみを考える。

1 Kripke bundle semantics と C-set semantics の定義

この章では、標準的 Kripke semantics を拡張したもので、V. B. Shehtman and D. P. Skvortsov [3] によって導入された Kripke bundle semantics と S. Ghilardi [1] によって導入された **C**-set semantics の定義を繰り返す。

定義 1.1 (Kripke bundle semantics) 擬順序集合 $\mathbf{D} = \langle D, \rho \rangle$ と $\mathbf{W} = \langle W, R \rangle$ と D から W への全射写像 π の 3 重対 $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ が *Kripke bundle* とは、

1. すべての $a, b \in D$ に対して、$a \rho b$ ならば $\pi(a) R \pi(b)$

2. すべての $a \in D$, $w \in W$ に対して、$\pi(a) R w$ ならば $a \rho b$, $\pi(b) = w$ となる $b \in D$ がある

をみたすことをいう。

空でない集合 U に対して、$\mathcal{L}[U]$ で $\mathcal{L}$ に各 $u \in U$ の名前 $\overline{u}$ を新しい定数として加えたものとする。$\mathcal{L}[\pi^{-1}(w)]$ の各論理式 A と wRw' となる $w' \in W$ に対して、A の w' における *inheritor* とは、A の中の $\overline{u}$ $(u \in \pi^{-1}(w))$

の occurrences をすべて $v \in \pi^{-1}(w')$, $u\rho v$ となるような $\overline{v}$ で置き換えたものをいう。ただし、同じ $\overline{u}$ の occurrences は同じ $\overline{v}$ で置き換えるものとする。$w \in W$ と $\mathcal{L}[\pi^{-1}(w)]$ の原始閉論理式の 2 項関係 $\models$ を Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ 上の *valuation* という。これを次のように $w \in W$ と $\mathcal{L}[\pi^{-1}(w)]$ の閉論理式との 2 項関係に拡張する。

$$
\begin{aligned}
w \models A \wedge B &\iff w \models A \text{ かつ } w \models B \\
w \models A \vee B &\iff w \models A \text{ または } w \models B \\
w \models \neg A &\iff w \models A \text{ ではない} \\
w \models A \to B &\iff w \models A \text{ ならば } w \models B \\
w \models \exists x_i A(x_i) &\iff w \models A(\overline{u}) \text{ となる } u \in \pi^{-1}(w) \text{ が存在する} \\
w \models \forall x_i A(x_i) &\iff \text{すべての } u \in \pi^{-1}(w) \text{ に対して } w \models A(\overline{u}) \\
w \models \Box A &\iff wRw' \text{ となるすべての } w' \in W \text{ と } A \text{ の } w' \\
&\qquad \text{におけるすべての inheritor } A' \text{ に対して、} \\
&\qquad w' \models A'
\end{aligned}
$$

$\mathcal{L}$ の論理式 A が Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ で *valid* とは、$\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ 上のすべての valuation $\models$ とすべての $w \in W$ に対して、$w \models \overline{A}$ となることをいう。ここで、$\overline{A}$ は A の universal closure である。$\mathcal{L}$ の論理式 A が Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ で *strongly valid* とは、A のすべての代入形が valid であることをいう。様相命題論理 L に対して、Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ が L の *Kripke bundle* とは、L のすべての theorem が

$\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ で strongly valid であることをいう。

定理 1.2 任意の論理式に対して、Q-$S4$ で証明可能であることと、すべての *Kripke bundle* で *strongly valid* であることは同等である。

定義 1.3 (C-set semantics) (small) category $\mathbf{C}$ に対して、$\mathbf{C}$-*set* とは、functor $X : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ のことをいい、$\mathbf{C}$-set X の $\mathbf{C}$-*subset* P とは、$\mathbf{C}$ の object に添字付けられた $P_\alpha \subseteq X(\alpha)$ のあつまりのことをいう。(small) category $\mathbf{C}$ とすべての $\mathbf{C}$-objects α に対して $X(\alpha) \neq \emptyset$ であるような $\mathbf{C}$-set X と各述語記号 P^n_j に product $\mathbf{C}$-*set* X^n のある $\mathbf{C}$-subset $I(P^n_j)$ を対応させる関数 I から成る 3 重対 $\langle \mathbf{C}, X, I \rangle$ を *($\mathbf{C}$-)model* という。

$\mathbf{C}$ の object α について、関数 $\mu : \mathbf{N} \to X(\alpha)$ を α-*assignment* と呼ぶ。ここで、$\mathbf{N}$ は自然数の全体から成る集合である。μ が α-assignment で $a \in X(\alpha)$ のとき、μ^a_i で、i に対しては a をとりその他では μ と同じ値をとるような α-assignment を表すものとする。また、μ が α-assignment で $k : \alpha \to \beta$ が $\mathbf{C}$ の arrow のとき、$k\mu$ で $(k\mu)(i) = X(k)(\mu(i))$ と定義される β-assignment を表す。

model $\mathcal{M} = \langle \mathbf{C}, X, I \rangle$、$\alpha$-assignment μ、論理式 A が与えられた時、A が α-assignment μ のもとで α において真である（$\mu \models_\alpha A$ と書く）ことを次のように定義する。

$$\mu \models_\alpha P^n_j(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) \iff \langle \mu(i_1), \cdots, \mu(i_n) \rangle \in (I(P^n_j))_\alpha$$

$$\mu \models_\alpha A \wedge B \iff \mu \models_\alpha A \text{ かつ } \mu \models_\alpha B$$

$$\mu \models_\alpha A \vee B \iff \mu \models_\alpha A \text{ または } \mu \models_\alpha B$$

$$\mu \models_\alpha \neg A \iff \mu \models_\alpha A \text{ ではない}$$

$$\mu \models_\alpha A \to B \iff \mu \models_\alpha A \text{ ならば } \mu \models_\alpha B$$

$$\mu \models_\alpha \exists x_i A \iff \mu_i^a \models_\alpha A \text{ となるような } a \in X(\alpha) \text{ が存在する}$$

$$\mu \models_\alpha \forall x_i A \iff \text{すべての } a \in X(\alpha) \text{ に対して、} \mu_i^a \models_\alpha A$$

$$\mu \models_\alpha \Box A \iff \text{すべての } \beta \text{ とすべての } k : \alpha \to \beta \text{ に対して、} k\mu \models_\beta A$$

$a_1, \cdots, a_n \in X(\alpha)$ のとき、$\mathcal{L}$ を $X(\alpha)$ の元に対する名前を含む $\mathcal{L}_\alpha$ に拡張して、$\models_\alpha A(a_1, \cdots, a_n)$ によって、$\mu(i_1) = a_1, \cdots, \mu(i_n) = a_n$ であるようなある μ に対して $\mu \models_\alpha A$ となることを表すものとする。

model $\mathcal{M} = \langle \mathbf{C}, X, I \rangle$ と論理式 A が与えられた時、すべての α-assignment μ に対して $\mu \models_\alpha A$ のとき $\models_\alpha A$ と表し、すべての object α に対して $\models_\alpha A$ のとき $\mathcal{M} \models A$ と表す。$\mathbf{C}$-set X と論理式 A が与えられた時、すべての I に対して $\langle \mathbf{C}, X, I \rangle \models A$ のとき $\langle \mathbf{C}, X \rangle \models A$ と表し、A は $\langle \mathbf{C}, X \rangle$ で valid であるという。また、category $\mathbf{C}$ と論理式 A が与えられた時、すべての $\mathbf{C}$-set X に対して $\langle \mathbf{C}, X \rangle \models A$ のとき $\mathbf{C}^\wedge \models A$ と書く。$\mathcal{L}$ の論理式 A が $\mathbf{C}$-set で *strongly valid* であるとは、そのすべての代入形が $\mathbf{C}$-set で valid であることをいう。様相論理 L に対して、L の $\mathbf{C}$-set とは、L の

すべて theorems がその **C**-set で strongly valid であることをいう。

定理 1.4 任意の論理式に対して、*Q-S4* で証明可能であることと、すべての **C**-*set* で *strongly valid* であることは同等である。

2 Q-S4.1 の Kripke bundle semantics に関する不完全性

Kripke bundle においては、$A(c)$ が w における $A(a)$ の inheritor で $A(d)$ が w における $A(b)$ の inheritor ならば $B(c,d)$ も w における $B(a,b)$ の inheritor であるが、**C**-set においては、a を c に写すようなある arrow $v \to w$ に対応する写像と b を d に写すようなある arrow $v \to w$ に対応する写像が存在するとしても、a, b をそれぞれ c, d に写すようなものが存在するとは限らない。

これらのことを考えると、ある条件のもとで Kripke bundle では必ず strongly valid になり、ある **C**-set では strongly valid にならないような論理式を作ることができる。

補題 2.1 *Kripke bundle* $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi \rangle$ において、$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ が *strongly valid* ならば、

$$\Diamond\forall x \forall y[\ \Box P_1^2(x,y) \land \neg P_1^1(x) \land P_1^1(y) \land \Diamond\neg P_1^1(y) \\ \to \exists u\{\neg P_1^1(u) \land P_1^2(x,u)\}\ ]$$

も *strongly valid* である。

補題 2.2 *category* **C** を、*object* がただ 1 つ α で *arrow* が 1_α*(identity arrow)* と f $(f \circ f = f)$ であるようなものとし、**C**-*set* X を、$X(\alpha) =$

$\{a,b,c\}$, $X(1_\alpha)=id_{\{a,b,c\}}$, $X(f)=h$ $(h(a)=h(b)=h(c)=c)$ とする。すると $\langle \mathbf{C}, X\rangle$ において、$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ は *strongly valid* になるが、

$$\Diamond\forall x\forall y[\ \Box P_1^2(x,y)\wedge\neg P_1^1(x)\wedge P_1^1(y)\wedge\Diamond\neg P_1^1(y) \\ \to\ \exists u\{\neg P_1^1(u)\wedge P_1^2(x,u)\}\ ]$$

は *valid* ではない。

$S4.1$ は $S4$ に公理図式として

$$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p.$$

を加えたものである。

様相述語論理 L が Kripke bundle semantics に関して完全であるとは、L で証明不可能な任意の論理式 A に対して、A を strongly valid にしないような L の Kripke bundle が存在することをいう。

補題 2.2 より、論理式

$$\Diamond\forall x\forall y[\ \Box P_1^2(x,y)\wedge\neg P_1^1(x)\wedge P_1^1(y)\wedge\Diamond\neg P_1^1(y) \\ \to\ \exists u\{\neg P_1^1(u)\wedge P_1^2(x,u)\}\ ]$$

は $Q\text{-}S4.1$ で証明不可能であることがわかり、補題 2.1 から $Q\text{-}S4.1$ の Kripke bundle でこの論理式を strongly valid にしないようなものが存在しないことから、$Q\text{-}S4.1$ は Kripke bundle semantics に関して不完全であることがわかる。

さらに、[1] と同様にこれを次のように強くすることができる。

定理 **2.3** *(a).* T を補題 *2.2* で定義した $\mathbf{C}$-*set* において *strongly valid* になるような論理式の集合とし、L を *Q-S4.1* $\subseteq L \subseteq$ *Q-S4.1+T* であるような様相述語論理であるとすると、L は *Kripke bundle semantics* に関して不完全である。

(b). *S4.1* を含み、論理式 $\Diamond p \to p$ を含まないような様相命題論理 L の最小述語拡大 *Q-L* は *Kripke bundle semantics* に関して不完全である。

3 ある様相述語論理の Kripke bundle semantics に関する不完全性

この章では、前章の論理式と類似な論理式を用いることで、[2] の Kripke semantics に関する結果を Kripke bundle semantics に関するものに書き換える。

定義 **3.1 ([2])** 2 つの擬順序集合 $\langle P, \leq \rangle$ と $\langle Q, \leq \rangle$ の間の順序を保存する写像 μ が埋め込みであるとは、単射でさらに

$$\alpha_1, \alpha_2 \in P,\ \mu(\alpha_1) \leq \mu(\alpha_2) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \leq \alpha_2$$

をみたすことをいう。また、P が Q に埋め込めるとは、P から Q への埋め込みが存在することをいい、P が Q に局所的に埋め込めるとは、すべての $\alpha \in Q$ に対し P から $\uparrow \alpha$ $(= \{\beta \in Q \mid \alpha \leq \beta\})$ への埋め込みが存在することをいう。

定義 **3.2 ([2])** *category* $\mathbf{C}$ とその *object* α に対して、α を *domain* とする *arrow* の全体からなる集合上に

$$k_1 \quad \leq \quad k_2 \quad \Longleftrightarrow \quad l \circ k_1 = k_2 \text{ となる } \textit{arrow}\ l \text{ がある}$$

が定義された擬順序 $\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{C})$ を考える。これらの *disjoint union* $\sum_{\alpha\in C_0}\mathcal{F}_\alpha(\mathbf{C})$ を $\mathcal{F}(\mathbf{C})$ と書く。

定義 3.3 **([2])** $\mathbf{M}^n_\infty$ を $\{1,\cdots,n\}$ で生成される自由モノイドとする。これは $\{1,\cdots,n\}$ の中からの有限列全体から成り、連鎖 $*$ を積とし、空列 ε を単位元とする。$\mathcal{F}(\mathbf{M}^n_\infty)$ は無限 n 分木 $\mathbf{T}^n_\infty$ である。

$\mathbf{M}^n_m$ を $\{1,\cdots,n\}$ の中からの長さ m 以下の列全体から成り、切り詰めた連鎖（2つの列の連鎖を長さ m で切ったもの）を積とし、空列 ε を単位元とするモノイドとする。$\mathcal{F}(\mathbf{M}^n_m)$ は $\mathbf{T}^n_\infty$ のうち m より高い部分を切り落とした木 $\mathbf{T}^n_m$ である。

定理 3.4 **([2])** A を様相命題論理式とする。任意の *small category* $\mathbf{C}$ に対して、

$$\mathcal{F}(\mathbf{C}) \models S4.A \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{C}^\wedge \models Q\text{-}S4.A.$$

従って、任意の様相命題論理 L に対して、

$$\mathcal{F}(\mathbf{C}) \models L \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{C}^\wedge \models Q\text{-}L.$$

である。

定理 3.5 様相命題論理 L について、$L \not\vdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$ であり、その最小述語拡大 $Q\text{-}L$ が *Kripke bundle semantics* に関して完全ならば、$\mathbf{T}^1_\infty$ を局所的に埋め込めるような L の *Kripke frame* が存在する。

証明. $L \not\models \Diamond p \to \Box\Diamond p$ から $\mathbf{T}_1^1 \models L$ がわかる（[2]）ので、定理 3.4 より $(\mathbf{M}_1^1)^\wedge \models Q\text{-}L$ である。$\mathbf{M}_1^1$-set X と interpretation I を

$$X(\mathbf{M}_1^1) = \{a, b, c\}$$

$$X(\varepsilon) = id_{\{a,b,c\}} \quad X(1) = f\ (f(a) = f(b) = f(c) = c)$$

$$I(P_1^2) = \{\langle a, b\rangle,\ \langle c, c\rangle\} \quad I(P_1^1) = \{\langle b\rangle\}.$$

とすると、$\models \Box P_1^2(a, b)$ かつ $\models \Box\neg P_1^1(c)$ であり、また、f から $\models \Diamond\Box\neg P_1^1(b)$ がわかるので、$\models \Box P_1^2(a, b) \wedge \neg P_1^1(a) \wedge P_1^1(b) \wedge \Diamond\Box\neg P_1^1(b)$ である。さらに、もし、$\models \neg P_1^1(u)$ ならば $u \neq b$ だから I の定義によって $\not\models P_1^2(a, u)$ となるので、$\not\models \exists u\{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(a, u)\}$ である。従って、

$$\begin{aligned}\not\models \quad & \Box P_1^2(a, b) \wedge \neg P_1^1(a) \wedge P_1^1(b) \wedge \Diamond\Box\neg P_1^1(b) \\ & \to \exists u\{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(a, u)\}\end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned}\not\models \quad & \forall x\forall y[\, \Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond\Box\neg P_1^1(y) \\ & \to \exists u\{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u)\}\,]\end{aligned}$$

である。この論理式は自由変数を含まず、また category $\mathbf{M}_1^1$ の object はただ１つなので、

$$\begin{aligned}\not\models \quad & \Diamond\forall x\forall y[\, \Box P_1^2(x, y) \wedge \neg P_1^1(x) \wedge P_1^1(y) \wedge \Diamond\Box\neg P_1^1(y) \\ & \to \exists u\{\neg P_1^1(u) \wedge P_1^2(x, u)\}\,]\end{aligned}$$

であり、したがって $(\mathbf{M}_1^1)^\wedge \models$Q-L から

$$Q\text{-}L \;\not\vdash\; \Diamond\forall x\forall y[\,\Box P_1^2(x,y)\wedge\neg P_1^1(x)\wedge P_1^1(y)\wedge\Diamond\Box\neg P_1^1(y) \to \exists u\{\neg P_1^1(u)\wedge P_1^2(x,u)\}\,]$$

である。

Q-L が Kripke bundle semantics に関して完全であるという仮定から、ある valuation $\models$、論理式 P, A、$w\in W$、$\pi^{-1}(w)$ の元の列 $\overrightarrow{s}$ に対し

$$w \;\not\models\; \Diamond\forall x\forall y[\,\Box P(x,y,\overrightarrow{s})\wedge\neg A(x,\overrightarrow{s}) \wedge A(y,\overrightarrow{s})\wedge\Diamond\Box\neg A(y,\overrightarrow{s}) \to \exists u\{\neg A(u,\overrightarrow{s})\wedge P(x,u,\overrightarrow{s})\}\,]$$

となるような、Q-L の Kripke bundle $\langle\mathbf{D},\mathbf{W},\pi\rangle$ が存在する。ここで、

$$\models Q(a,b) \quad\Longleftrightarrow\quad \models Q(a,b)\wedge(R(c)\to R(c))$$

であるから、$\overrightarrow{s}$ の要素のすべては論理式 P と A の両方に実際に現れるとしてよい。

次に、Kripke frame $\langle W',R'\rangle$ を

$$W' = \{\langle v,\overrightarrow{t}\rangle \mid wRv,\ v\in W,\ \overrightarrow{t}\text{ は }\overrightarrow{s}\text{ の }v\text{ における inheritor }\}$$

$$\langle v,\overrightarrow{t}\rangle R'\langle v',\overrightarrow{t'}\rangle \quad\Longleftrightarrow\quad vRv'\text{ かつ }\overrightarrow{t'}\text{ は }\overrightarrow{t}\text{ の }v'\text{ における inheritor}$$

と定義すると、これは L の Kripke frame である。なぜなら、もし、$\langle W',R'\rangle$ で valid でないような L で証明可能な命題論理式 B があるとすると、$\langle v,\overrightarrow{t}\rangle \not\models' B$

となる $\models'$ と $\langle v, \overrightarrow{t}\rangle \in W'$ があり、各命題変数 p_j に対して $lh(\overrightarrow{s})$ 変数述語記号 $P_j(\overrightarrow{x})$ を取り、Kripke bundle $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi\rangle$ の valuation $\models''$ を

$$v' \models'' P_j(\overrightarrow{t'}) \iff \langle v', \overrightarrow{t'}\rangle \models' p_j.$$

と定義すれば、

$$v' \models'' C(P_j(\overrightarrow{t'})/p_j) \iff \langle v', \overrightarrow{t'}\rangle \models' C.$$

だから、$v \not\models'' B(P_j(\overrightarrow{t})/p_j)$ となって $\langle \mathbf{D}, \mathbf{W}, \pi\rangle$ が L の Kripke bundle であることに矛盾するからである。

W' の作り方から、すべての $\langle v, \overrightarrow{t}\rangle \in W'$ に対して、

$$v \models \Box P(a, b, \overrightarrow{t}) \quad v \models \neg A(a, \overrightarrow{t}) \quad v \models A(b, \overrightarrow{t})$$

$$v \models \Diamond\Box\neg A(b, \overrightarrow{t}) \quad v \not\models \exists u\{\neg A(u, \overrightarrow{t}) \wedge P(a, u, \overrightarrow{t})\}$$

となるような $a, b \in \pi^{-1}(v)$ が存在する。ここで、

$$\langle v, \overrightarrow{t}\rangle < \langle v', \overrightarrow{t'}\rangle$$

$$\text{i.e. } \langle v, \overrightarrow{t}\rangle R' \langle v', \overrightarrow{t'}\rangle \text{ かつ } (\langle v', \overrightarrow{t'}\rangle R' \langle v, \overrightarrow{t}\rangle \text{ ではない})$$

となるような $\langle v', \overrightarrow{t'}\rangle \in W'$ が存在しないと仮定する。$v \models \Diamond\Box\neg A(b, \overrightarrow{t})$ から、

$$\langle v, \overrightarrow{t}\rangle R' \langle v', \overrightarrow{t'}\rangle, \quad \langle v', \overrightarrow{t'}\rangle R' \langle v, \overrightarrow{t}\rangle, \quad v' \models \Box\neg A(b', \overrightarrow{t'})$$

となるような $A(b, \overrightarrow{t})$ の v' における inheritor $A(b', \overrightarrow{t'})$ と $\langle v', \overrightarrow{t'}\rangle \in W'$ があるので、$A(b', \overrightarrow{t'})$ の inheritor $A(c, \overrightarrow{t})$ に対して、$v \models \neg A(c, \overrightarrow{t})$ で

ある。もし、$b \in \overrightarrow{t}$ ならば $b = c$ であるが、これは $v \models A(b, \overrightarrow{t})$ と $v \models \neg A(c, \overrightarrow{t})$ に矛盾するので、$b \notin \overrightarrow{t}$ である。$v \models A(b, \overrightarrow{t})$ と $v \models \neg A(a, \overrightarrow{t})$ から $a \neq b$ なので、$P(a, c, \overrightarrow{t})$ は $P(a, b, \overrightarrow{t})$ の inheritor である。よって、$v \models \Box P(a, b, \overrightarrow{t})$ から $v \models P(a, c, \overrightarrow{t})$ が導かれるが、これは、$v \not\models \exists u\{\neg A(u, \overrightarrow{t}) \wedge P(a, u, \overrightarrow{t})\}$ に矛盾する。したがって、すべての $\langle v, \overrightarrow{t} \rangle \in W'$ に対して

$$\langle v, \overrightarrow{t} \rangle < \langle v', \overrightarrow{t'} \rangle$$

となる $\langle v', \overrightarrow{t'} \rangle \in W'$ が存在するので、W' が $\mathbf{T}^1_\infty$ を局所的に埋め込める L の frame である。■

定理 3.6 様相命題論理 L について、$L \nvdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ であり、その最小述語拡大 Q-L が *Kripke bundle semantics* に関して完全ならば、$\mathbf{T}^2_\infty$ を局所的に埋め込めるような L の *Kripke frame* が存在する。

証明.

$$\begin{aligned} &\Diamond\forall x\forall y[\ \Box P^2_1(x,y) \wedge \Diamond(\Box P^1_1(x) \wedge \Box\neg P^1_1(y)) \\ &\quad \wedge\Diamond(\Box\neg P^1_1(x) \wedge \Box P^1_1(y)) \\ &\quad \to\ \Diamond\exists u\exists u'(P^1_1(u) \wedge P^1_1(u') \wedge P^2_1(u,u'))\ ]. \end{aligned}$$

が Q-L において証明不可能であることを用いる。■

定理 3.7 様相命題論理 L について、$L \vdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ かつ $L \nvdash \Box(\Box p_1 \to p_2) \vee \Box(\Box p_2 \to p_1)$ であり、その最小述語拡大 Q-L が *Kripke bundle se-*

mantics に関して完全ならば、すべての自然数 $n \geq 1$ に対して、$\mathbf{T}_n^2$ を局所的に埋め込めるような L の *Kripke frame* が存在する。

証明. $n \geq 1$ と、1 変数述語 P_1^1, P_2^1, P_3^1、2 変数述語 P_1^2 をとり、すべての $v \in \mathbf{T}_n^2$ に対して、論理式 $F_v(x_1, \cdots, x_{|v|})$ を次のように $n - |v|$ に関して帰納的に定義する。$|v| = n$, $v = d_1 \cdots d_n$ なら

$$F_v = \bigvee_{i=1}^{n} \Box P_{d_i}^1(x_i);$$

とし、$|v| = m - 1$ のとき

$$\begin{aligned} F_v \;\; = \;\; & \forall x_m \forall y_m [\Box P_1^2(x_m, y_m) \wedge \Diamond(\Box P_1^1(x_m) \wedge \neg F_{v*2}) \\ & \wedge \Diamond(\Box P_2^1(x_m) \wedge \neg F_{v*1}) \wedge P_3^1(x_m) \wedge \neg P_3^1(y_m) \\ & \to \Diamond \exists u \exists u' \{\Box P_1^1(u) \wedge \Box P_2^1(u') \\ & \quad \wedge(\neg \Box P_2^1(u) \vee \neg \Box P_1^1(u')) \wedge P_1^2(u, y_m) \wedge P_1^2(u', y_m)\} \,] \end{aligned}$$

とすると、$\Diamond F_\varepsilon$ は *Q-L* で証明不可能である。 ■

定理 3.8 様相命題論理 L について、$L \nvdash \Diamond p \to \Box \Diamond p$ であり、その最小述語拡大 *Q-L* が *Kripke bundle semantics* に関して完全ならば、$L \subseteq$ *S4.3* である。

証明.

$$\begin{aligned} G_n : \; & [\bigwedge_{i<j} \Box(F_i \to \Diamond F_j)] \;\wedge\; [\bigwedge_{i>j} \Box(F_i \to \neg \Diamond F_j)] \\ & \wedge \; [\bigwedge_{i \neq j} \Box \neg(F_i \wedge F_j)] \;\wedge\; [\Box \bigvee_i F_i] \end{aligned}$$

$$\wedge\ [\bigwedge_i \Box\{F_i \rightarrow \exists x \exists y\{\Box P_i^2(x,y) \wedge \neg P_i(x) \wedge P_i(y)$$
$$\wedge\ \Diamond(F_i \wedge \Box\neg P_i(y)) \wedge \neg\exists u(\neg P_i(u) \wedge P_i^2(x,u))\}\}]$$
$$\rightarrow\ \neg\Diamond F_1$$

が *Q-L* で証明不可能であることを用いる。

ただし、ここで、$P_1, \cdots, P_n$ は1変数述語記号で $P_1^2, \cdots, P_n^2$ は変数項述語記号 F_i は $\exists x_i P_i(x_i)$ のこととする。 ■

系 **3.9** 様相命題論理 L について、$L \not\vdash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ であり、ある *finite connected frame* で L のある *theorem* が *valid* でなければ、その最小述語拡大 *Q-L* が *Kripke bundle semantics* に関して不完全である。

参考文献

[1] S. Ghilardi, *Presheaf semantics and independence results for some non-classical first-order logics*, **Archive for Mathematical Logic** 29 (1989), pp. 125 - 136.

[2] S. Ghilardi, *Incompleteness results in Kripke semantics*, **Journal of Symbolic Logic** 56 (1991), pp. 517 - 538.

[3] V.B. Shehtman and D.P. Skvortsov, *Semantics of non-classical first order predicate logics*, in P.Petkov,ed., **Mathematical Logic**, Plenum Press, New York, 1990, pp. 105 - 116.

[4] D.P. Skvortsov, *Some incompleteness results for predicate versions of propositional logics*, Manuscript, 1991.

[5] T. Shimura, *Kripke bundle incompleteness of super-intuitionistic predicate logic.*

[6] N.-Y. Suzuki, *Kripke bundles for intermediate predicate logics and Kripke frames for intuitionistic modal logics*, **Studia Logica**, 49(1990), pp.289-306.

[7] N.-Y. Suzuki, *Some results on the Kripke sheaf semantics for super-intuitionistic predicate logics*, **Studia Logica**, 52(1993), pp.73-94.