数理解析研究所講究録
930巻 1995年 28-41

Open Coloring Axiom について

Freie Universität Berlin 渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

ZFC + MA + ¬CH では, ZFC だけからは決定できない多くの命題が証明できることが知られている. 勿論, ゲーデルの不完全性定理により, ZFC + MA + ¬CH は (ZFC が無矛盾だとして) 完全な公理系ではないが, それにも関わらず, “数学的に意味のある命題はすべて ZFC + MA + ¬CH で成り立つ” という経験則が成り立つことを期待してもよいように思うかも知れない. ところが, 実際には, 数学的な命題で, この公理系でも証明できないものも沢山知られている. 例えば, 連続体の大きさについては, それが $\aleph_1$ より大きな regular cardinal になること以外は殆んど何も言えない. MA を拡張する公理としては, 例えば, Proper Forcing Axiom (PFA) があり, この公理からは $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ が証明されるほか, $\aleph_1$-dense sets の同型定理など, MA から独立な多くの命題が証明できることが知られている (例えば, [3] を参照). ところが, MA の無矛盾性が ZFC の無矛盾性から導かれるのに対し, PFA の無矛盾性証明のためには, かなり大きな巨大基数の存在が必要であることが知られていて, この意味で PFA は MA とは本質的に違う種類の公理であると言える. 一方, PFA から導かれる命題には, それら自身は巨大基数の consistency strength を必要としないものも多いので, ZFC の consistency strength の範囲内の公理で, PFA から証明できる命題の多くを導くことのできる公理があれば具合がよいであろう. 実は以下に述べる Open Coloring Axiom(OCA) と MA との組み合わせは, そのようなものの一つとなっている.

以下で, OCA + MA での二三の基本的な結果の詳細な証明を与える. これは, 1994/1995 年度冬学期にベルリン自由大学数学科で筆者の行なった

Kombinatorische Mengenlehre（組合せ集合論）に関する講義の講義録の一部に基づいている．

1 OCA

$X \subseteq \mathbb{R}$ に対し, $[X]^2 = \{ (x,y) : x, y \in X,\ x < y \}$ とする.[1]

(OCA): $X \subseteq \mathbb{R}$ として, $[X]^2 = K_0 \dot\cup K_1$ を K_0 が ($[X]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ の部分空間の位相で) 開集合となるような分割とする．このとき以下のうちの *1* つが成立する:

0) 非可算な $Y \subseteq X$ で $[Y]^2 \subseteq K_0$ となるものが存在する;

1) $Y_n \subseteq X$, $(n \in \omega)$ で, $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ かつ, $[Y_n]^2 \subseteq K_1$ が全ての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在する．

OCA+ MA は ZFC と無矛盾であることが知られている ([4]). OCA の定義で, K_0 が開集合であるという条件を外したものは成り立たない:

補題 1.1 実数の 分割 $[\mathbb{R}]^2 = K_0 \dot\cup K_1$, で, 非可算な $Y \subseteq \mathbb{R}$ で $[Y]^2 \subseteq K_0$ または $[Y]^2 \subseteq K_1$ となるようなものが全く存在しないようなものがある．

証明 $\prec$ を $\mathbb{R}$ 上の well-ordering とする．$K_0 = \{ (a,b) \in [\mathbb{R}]^2 : a \prec b \}$ として, $K_1 = [\mathbb{R}]^2 \setminus K_0$ とする．$Y \subseteq \mathbb{R}$ を非可算とする．$(y_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ を $\prec$ に関する Y での上昇列とする．もし $[Y]^2 \subseteq K_0$ (あるいは $[Y]^2 \subseteq K_1$), だったとすれば, $(y_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ は $\mathbb{R}$ の元の $\leq$ に関する order-type が ω_1 の真の上昇列 (あるいは 真の下降列) となっている．しかし, このような数列は $\mathbb{R}$ で存在しないから矛盾である． □ (補題 1.1)

OCA を実際に適用する時には, 以下で述べるような OCA の変形を用いると具合のよいことが多い．集合 X に対し, $\langle X \rangle^2 = \{ (a,b) : a, b \in X, a \neq b \}$

[1]普通には, $[X]^2$ は, $\{ Y : Y \subseteq X, |Y| = 2 \}$ と定義されるが, 上の定義は $[X]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ となるように選んである．

とする．$Y \subseteq X^2$ は，$Y = Y^{-1}$ $(= \{ (b,a) : (a,b) \in Y \})$ となるとき対称であるという．

補題 1.2 以下は同値: oca-eql

a) *OCA;*

b) $X \subseteq \mathbb{R}$ として，$\langle X \rangle^2 = K_0 \dot{\cup} K_1$ を，K_0 は対称で，（$\langle X \rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ 部分空間位相に関し）開集合 となるような分割とする．このとき以下のいずれかがなりたつ:

0) 非可算な $Y \subseteq X$ で $\langle Y \rangle^2 \subseteq K_0$となるものが存在する;

1) $Y_n \subseteq X$, $(n \in \omega)$ で，$X = \bigcup_{n \in \omega} Y_n$ かつ，$\langle Y_n \rangle^2 \subseteq K_1$ が全ての $n \in \omega$ に対し成り立つようなものが存在する．

証明 自明. □ (補題 1.2)

OCA のオリジナルの定義では $[X]^2$ を導入するために $\mathbb{R}$ の順序が用いられていたため，$\mathbb{R}$ に依存するものとなっていたが，これに対し，補題 1.2, *b)* の命題は，任意の位相空間で意味をなすものとなっている．集合 X と，分割 $\langle X \rangle^2 = K_0 \dot{\cup} K_1$ が与えられたとして，$\langle Y \rangle^2 \subseteq K_1$ (あるいは，$\langle Y \rangle^2 \subseteq K_1$) となるとき，$Y \subseteq X$ を（分割 $\langle X \rangle^2 = K_0 \dot{\cup} K_1$ に関して） 0-homogeneous (あるいは 1-homogeneous) である，と言うことにする．

位相空間 $\mathcal{X}$ に対し，OCA($\mathcal{X}$) を以下の命題とする:

(OCA($\mathcal{X}$)): $X \subseteq \mathcal{X}$ で $\langle X\rangle^2 = K_0 \dot\cup K_1$ を,
K_0 が対称的で（$\langle X\rangle^2 \subseteq \mathcal{X}^2$ の部分空間位相に関し）開集合となるような分割とする. このとき, 以下のいずれかが成り立つ:

0) 非可算な 0-*homogeneous* な $Y \subseteq X$ が存在する;

1) 1-*homogeneous* な $Y_n \subseteq X$, $(n \in \omega)$ で, $X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ となるものが存在する.

明らかに次が成り立つ:

補題 1.3 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を位相空間とする. このとき以下が成り立つ: top-oca

1) $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が位相同型なら, OCA($\mathcal{X}$) が成り立つことと OCA($\mathcal{Y}$) が成り立つことは同値である.

2) $\mathcal{Y}$ が $\mathcal{X}$ の部分空間で, OCA($\mathcal{X}$) なら OCA($\mathcal{Y}$) が成り立つ.

3) $\mathcal{Y}$ が $\mathcal{X}$ の部分空間で $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ が可算なら, OCA($\mathcal{X}$) が成り立つことと OCA($\mathcal{Y}$) が成り立つことは同値になる.

証明 明らか. ❑ (補題 1.3)

Cantor space ${}^{\omega}2$ および, Baire space ${}^{\omega}\omega$ は 0-dimensional で, $\mathbb{R}$ との間に, 可算個の点を除いた位相同型があることに留意すると, 上の補題から, 直ちに次の定理が導ける:

定理 1.4 OCA は以下の各々の命題と同値になる: oca-eq2

すべての $n \geq 1$ に対して OCA($\mathbb{R}^n$);

すべての $n \geq 1$ に対して OCA($({}^{\omega}\omega)^n$);

すべての $n \geq 1$ に対して OCA($({}^{\omega}2)^n$). ❑

$P = (P, \leq)$ を半順序集合とするとき, $p, q \in P$ は, $p \leq q$ または $q \leq p$ が成り立つとき, （$\leq$ に関し） *comparable* であるといい, そうでないとき

imcomparable であるという．$X \subseteq P$ は，すべての $x, y \in X$ が（$\leq$ に関し）comparable のとき，chain であるという．$X \subseteq P$ は，すべての異なる $x, y \in X$ が（$\leq$ に関し）incomparable のとき，*anti-chain* であるという．以下の定理では，$\mathcal{P}(\omega)$ を 半順序集合 $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$ として扱っている．

定理 1.5 (OCA) 任意の非可算な $X \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ に対し，非可算な *chain* $K \subseteq X$ あるいは，非可算な *anti-chain* $A \subseteq X$ が存在する． chain-anti

証明 $X \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ を非可算とする．$x \in \mathcal{P}(\omega)$ に対し，$\chi_x : \omega \to 2$ を x の特性関数とする．$X' = \{\, \chi_x : x \in X \,\}$ とすると，X' は ${}^{\omega}2$ の非可算部分集合となる．$\langle X' \rangle^2 = K_0 \dot{\cup} K_1$，とする，ここに

$$K_0 = \{\, (\chi_x, \chi_y) : x, y \in X,\ x \text{ と } y \text{ は（} \subseteq \text{ に関し）incomparable} \,\}$$

とする．K_0 は（$\langle X' \rangle^2 \subseteq ({}^{\omega}2)^2$ の部分空間位相に関して）開集合となっている: $(\chi_x, \chi_y) \in K_0$ に対し，$n \in \omega$ を $x \cap n$ と $y \cap n$ が，（$\subseteq$ に関し）incomparable になるようにとれる．このとき:

$$(\chi_x, \chi_y) \in [\chi_x \restriction x] \times [\chi_y \restriction y] \subseteq K_0$$

である．OCA（と補題 1.4）により，

0) 非可算な 0-homogeneous な $Y \subseteq X'$ が存在するか，または，

1) 1-homogeneous な $Y_n \subseteq X'$, $n \in \omega$ で，$X' = \bigcup_{n \in \omega} Y_n$ となるものが存在する．

0) が成り立っているときには，$\{\, x \in X : \chi_x \in Y \,\}$ は非可算な anti-chain となっている．一方 *1)* が成り立っているなら，$n \in \omega$ で Y_n が非可算になるものが存在するが，このとき，$\{\, x \in X : \chi_x \in Y_n \,\}$ は非可算な chain となる． □ (定理 1.5)

定理 1.6 定理 1.5 の主張から，以下が導かれる: monoton

任意の非可算な $Y \subseteq \mathbb{R}$ と $f : Y \to \mathbb{R}$ に対し，非可算な $Y' \subseteq Y$ で $f \restriction Y'$ が

単調になるようなものが存在する.

証明 $\mathbb{Q} = Q_0 \dot\cup Q_1$ を, Q_0 と Q_1 の両方が $\mathbb{R}$ で dense になるような分割とする[2]. 各 $y \in Y$ に対し,

$$x_y = \{ (q_0, q_1) \in Q_0 \times Q_1 : q_0 \leq y \text{ かつ } q_1 \leq f(y) \}$$

とし, $X = \{ x_y : y \in Y \}$ とする. $X \subseteq \mathcal{P}(Q_0 \times Q_1)$ である. $y, y' \in Y$ に対し, x_y と $x_{y'}$ が comparable になるのは, ちょうど $f \restriction \{ y, y' \}$ が増加関数になっているときで, x_y と $x_{y'}$ が incomparable となるのは, $f \restriction \{ y, y' \}$ が減少関数となっている時である. 仮定により 非可算な $X' \subseteq X$ で X' は $\subseteq$ に関し chain または anti-chain となっているものがあるが, $Y' = \{ y \in Y : x_y \in X' \}$ として $f \restriction Y'$ は今述べたことにより単調な関数になることが分かる. □ (定理 1.6)

2 ¬CH の OCA からの証明

OCA から連続体仮説の否定が導かれることを証明する. $f, g \in {}^\omega\omega$ に対して, $f \leq^* g$ を $|\{ n \in \omega : f(n) > g(n) \}| < \aleph_0$ で定義する. また, $f =^* g$ は $|\{ n \in \omega : f(n) \neq g(n) \}| < \aleph_0$ で定義される. Bounding number $\mathbf{b}$ は, ch12

$$\mathbf{b} = \min\{ |X| : X \subseteq {}^\omega\omega, f \leq^* g \text{ がすべての } f \in X \text{ に対し成り立つような } g \in {}^\omega\omega \text{ は存在しない} \}$$

と定義される. $\aleph_0 < \mathbf{b} = \mathrm{cf}\,\mathbf{b} \leq 2^{\aleph_0}$ が成り立つことは容易に示せる. $X \subseteq {}^\omega\omega$ が, 上の定義でのような条件を満たすとき, X は ${}^\omega\omega$ で unbounded であるということにする. $\mathbf{b}$ の定義から直ちに:

補題 2.1 $\kappa = \mathbf{b}$ とする. このとき, ${}^\omega\omega$ の元の列 $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ で, l12.2

0) すべての $\alpha < \kappa$ に対し f_α は単調増加;

[2]たとえば, $Q_0 = \{ r \in \mathbb{Q} : r$ は有限の 10 進表示で表せ, 最小桁に 1 がたっている$\}$ とすればよい.

1) $f_\alpha \le^* f_\beta$ かつ $f_\alpha \ne^* f_\beta$ がすべての $\alpha < \beta < \kappa$ に対し成り立つ;

2) $\{ f_\alpha : \alpha < \kappa \}$ は ${}^\omega\omega$ で unbounded. □

補題 2.2 κ をある基数として $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を ${}^\omega\omega$ の元の列で 補題 2.1 の *0)*, *1)*, *2)* を満たすものとする. このとき, 任意の $I \subseteq [\kappa]^\kappa$ に対し $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ で, $f_\alpha \le f_\beta$ となるものが存在する. l12.3

証明 $(\xi_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を I の自然な数えあげとすると, 列 $(f_{\xi_\alpha})_{\alpha<\kappa}$ も, 条件 *0)*, *1)*, *2)* を満たすから, $I = \kappa$ の場合に証明すれば十分である.

$$S = \{ s \in {}^{\omega>}\omega : \text{ ある } \alpha < \kappa \text{ に対し } s \subseteq f_\alpha \}$$

とする. $s \in S$ に対し, $\alpha_s = \min\{ \alpha < \kappa : s \subseteq f_\alpha \}$ とおく. $\beta_0 = \sup\{ \alpha_s : s \in S \}$ とする. このとき $\mathrm{cf}(\kappa) \ge \mathbf{b}$ となり, S は可算だから $\beta_0 < \kappa$ である. $f_{\alpha_s} \le^* f_{\beta_0}$ がすべての $s \in S$ に対し成り立っていることに注意. $\varphi : \kappa \setminus \beta_0 \to \omega$ を$\alpha \in \kappa \setminus \beta_0$ に対し, $f_{\beta_0}\restriction(\omega \setminus \varphi(\alpha)) \le f_\alpha\restriction(\omega \setminus \varphi(\alpha))$ となるものとして定義する. このとき, $n_0 \in \omega$ と $X_0 \subseteq \kappa$ で, X_0 は κ で cofinal で, $\varphi[X_0] = \{ n_0 \}$ となるようなものが存在する. $\{ f_\alpha : \alpha \in X_0 \}$ は ${}^\omega\omega$ で unbounded となっている. 必要なら X_0 をもっと小さくとって, $s_0 \in {}^{n_0}\omega$ で $s_0 \subseteq f_\alpha$ がすべての$\alpha \in X_0$ に対し成り立つようなものとれるようにできる.

Claim 2.2.1 すべての $\alpha < \kappa$ と $m \in \omega$ に対し, $\beta \in X_0$ で $\alpha \le \beta$ かつ $f_\beta(n) \ge m$ となるものが存在するように $n \in \omega$ をとることができる. c12.3.1

$\vdash$ このようなものが存在しなければ, 各々の $n \in \omega$ に対し, $\alpha_n < \kappa$ と $m_n \in \omega$ で $\forall \beta \in X_0 (\alpha_n \le \beta \to f_\beta(n) < m_n)$ となるものがとれる. $\gamma = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$ とすれば, $\gamma < \kappa$ である. $f \in {}^\omega\omega$ を $n \in \omega$ に対し $f(n) = m_n$ で定義する. このとき, すべての $\alpha < X_0$, $\gamma \le \alpha$ に対し, $f_\alpha \le f$ が成り立つが, これは $\{ f_\alpha : \alpha \in X_0 \}$ が${}^\omega\omega$ で unbounded であることに矛盾する.
$\dashv$ (Claim 2.2.1)

$n_1 \in \omega$ を

$$\forall \alpha < \kappa \forall m \in \omega \exists \beta \in X_0 (\alpha \leq \beta \wedge f_\alpha(n_1) \geq m)$$

となるようなもののうち最小にとる. $n_0 \leq n_1$ となっている. n_1 の最小性により $s \in {}^{n_1}\omega$ と $\beta_1 < \kappa$ で $\beta_0 \leq \beta_1$ かつ, $f_\alpha \restriction n_0 \leq s$ が $\beta_1 \leq \alpha$ となるすべての $\alpha \in X_0$ で成り立つようなものが存在する. $S' = \{ t \in {}^{n_1}\omega : t \leq s \}$ は有限だから, $s_1 \in S'$ と $X_1 \subseteq X_0$ で, $s_1 \subseteq f_\alpha$ がすべての $\alpha \in X_1$ で成り立ち, $\{ f_\alpha(n_1) : \alpha \in X_1 \}$ が ω で unbounded となるようなものが存在する.

$n_2 \in \omega$ を $n_1 \leq n_2$ で $f_{\alpha_{s_1}} \restriction (\omega \setminus n_2) \leq f_{\beta_0} \restriction (\omega \setminus n_2)$ となるようにとる. ここで, $\alpha^* \in X_1$ を $f_{\alpha^*}(n_1) \geq f\alpha_{s_1}(n_2)$ となるものとすると, $f_{\alpha_{s_1}} \leq f_{\alpha^*}$ が成り立つ: $n \in \omega$ に対し, $n < n_1$ なら, $f_{\alpha_{s_1}}(n) = s_1(n) = f_{\alpha^*}(n)$ となる; $n \in n_2 \setminus n_1$ なら, $f_{\alpha_{s_1}}(n) \leq f_{\alpha_{s_1}}(n_2) \leq f_{\alpha^*}(n_1) \leq f_{\alpha^*}(n)$ となる. また, $n \in \omega \setminus n_2$, なら, $f_{\alpha_{s_1}}(n) \leq f_{\beta_0}(n) \leq f_{\alpha^*}(n)$ となるからである. □ (補題 2.2)

定理 2.3 (OCA) $\mathbf{b} \geq \aleph_2$. oca-non-c

証明 もしそうでなければ, ${}^\omega\omega$ の元の列 $(f_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ で, 補題 2.1 の *0*), *1*), *2*) を満たすものが存在する. $\alpha < \omega_1$ に対し $x_\alpha = \{ (n, m) \in \omega \times \omega : f_\alpha(n) \leq m \}$ とする. $X = \{ x_\alpha : \alpha < \omega_1 \}$ として, X は, $\subseteq$ に関し, 非可算な chain も anti-chain も持たないことを示すが, 補題 1.5 によりこれは矛盾である. $I \subseteq \omega_1$ を非可算とすると, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ で $x_\alpha \not\supseteq x_\beta$ となるものが存在する: もしそのようなものが存在しなければ, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ は $\subseteq$ に関し真の増加列となるが, $\omega \times \omega$ が可算であることから, これは不可能である. したがって, $\{ x_\alpha : \alpha \in I \}$ は chain でない. 一方, 補題 2.2 により, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ で $f_\alpha \leq f_\beta$ となるものが存在する. このとき, $x_\alpha \supseteq x_\beta$ となるから, $\{ x_\alpha : \alpha \in I \}$ は anti-chain でもないことが分かる. □ (定理 2.3)

3 OCA と gaps

この節の終りで, MA + OCA から連続体の濃度が $\aleph_2$ となることが導かれることを示す（系 3.5）. この証明は, OCA のもとで, 特定の (κ,λ) に対し, (κ,λ)-gaps が存在しないこと（定理 3.3）を介して行なわれる. ここに, $(f_\alpha, g_\beta)_{\alpha<\kappa,\beta<\lambda}$ が (unfilled) gap（あるいは (unfilled) (κ,λ)-gap）とは:

a) $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ は ${}^\omega\omega$ の元の $\leq^*$ に関する真の上昇列となっている;

b) $(g_\beta)_{\beta<\lambda}$ は ${}^\omega\omega$ の元の $\leq^*$ に関する真の下降列となっている;

c) $f_\alpha \leq^* g_\beta$ がすべての $\alpha<\kappa$, $\beta<\lambda$ に対し成り立つ;

d) $h \in {}^\omega\omega$ で $f_\alpha \leq^* h \leq^* g_\beta$ がすべての $\alpha<\kappa$, $\beta<\lambda$ に対して成り立つようなものは存在しない.

$f_0,\ldots,f_{k-1} \in {}^\omega\omega$ に対し, $\Gamma(f_0,\ldots,f_{k-1})$ を,

$$f_i \leq^* f_j \ \Leftrightarrow\ f_i\restriction(\omega\setminus m) \leq f_j\restriction(\omega\setminus m)$$

がすべての $i, j<k$ に対し成り立つような最小の数 $m\in\omega$ とする.

定理 3.1 すべての $\kappa < \mathbf{b}$ に対し (κ,ω)-*gap* は存在しない. no-kappa-

証明 ある $\kappa<\mathbf{b}$ に対し (κ,ω)-gap $(f_\alpha, g_k)_{\alpha<\kappa,k<\omega}$ が存在すると仮定して矛盾を導く. $(g_k)_{k<\omega}$ は $\leq$ に関して下降列になっているとしてよい. 各 $\alpha<\kappa$ に対し $h_\alpha \in {}^\omega\omega$ を,

$$h_\alpha(k) = \Gamma(f_\alpha, g_0, \ldots, g_k)$$

で定義する. $\kappa<\mathbf{b}$ だったから, $h\in{}^\omega\omega$ で $h_\alpha \leq^* h$ がすべての $\alpha<\kappa$ に対し成り立つものが存在する. h は真の単調増加関数となるようにとれる. $g\in{}^\omega\omega$ を

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n < h(0) \text{ のとき;} \\ g_k(n)\,(= \min\{\, g_l(n) : l \leq k \,\}), & h(k) \leq n < h(k+1) \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義する．以下で，$f_\alpha \le^* g \le^* g_k$ がすべての$\alpha < \kappa$, $k < \omega$ に対し成り立つことを示すが，これは，$(f_\alpha, g_k)_{\alpha<\kappa, k<\omega}$ が gap であることに矛盾する．

$g \le^* g_k$ である：$n \in h(l+1) \setminus h(l)$ で $k \le l$ となるものに対して，g の定義により $g(n) = g_l(n) \le g_k(n)$ である．したがって，$\{n \in \omega : g(n) > g_k(n)\} \subseteq h(k)$ となる．

$f_\alpha \le^* g$ である：$m \in \omega$ を $h_\alpha \restriction (\omega \setminus m) \le h \restriction (\omega \setminus m)$ となるものとする．このとき g の定義により，任意の $k \ge m$ と $n \in h(k+1) \setminus h(k)$ に対し

$$\begin{aligned} f_\alpha(n) &= f_\alpha \restriction (\omega \setminus h(k))(n) \le g_k \restriction (\omega \setminus h(k))(n) \\ &= g_k \restriction (h(k+1) \setminus h(k))(n) = g(n) \end{aligned}$$

となる． □ (定理 3.1)

定理 3.2 $\kappa < \mathbf{b}$ で，$\omega < \mathrm{cf}(\kappa)$ なら，ある λ で $\mathrm{cf}(\lambda) \ge \omega_1$ となるものに b¿aleph-2
対し (κ, λ)-*gap* が存在する．

証明 まず，上昇列 $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を次のように帰納的に構成する：$f_0 \in {}^\omega\omega$ は任意にとる．f_ξ, $\xi < \alpha$ がすでに構成できたとき，$f_\alpha \in {}^\omega\omega$ を $f_\xi \le^* f_\alpha$ かつ $f_\xi \ne^* f_\alpha$ がすべての $\xi < \alpha$ に対し成り立つようにとる（$\alpha < \kappa < \mathbf{b}$ だから，これは可能である）．今度は，下降列 $(g_\beta)_{\beta<(2^{\aleph_0})^+}$ を帰納的に次ののようにとる：すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$f_\alpha \le^* g_0$ となるようにする（$\kappa < \mathbf{b}$ により，このようなものはとれる）．g_ξ, $\xi < \beta$ が既に選ばれたとき，$g \in {}^\omega\omega$ で $f_\alpha \le^* g \le^* g_\xi$, $g \ne^* f_\alpha$ かつ $g \ne^* g_\xi$ がすべての $\alpha < \kappa$ と $\xi < \beta$ で成り立つようなものがあれば，そのようなものの一つを g_β とし，そのようなものが存在しなければ，$g_\beta = \emptyset$ とおく．

$\lambda = \min\{\alpha < (2^{\aleph_0})^+ : g_\alpha = \emptyset\}$ とすれば，明らかに $(f_\alpha, g_\beta)_{\alpha<\kappa, \beta<\lambda}$ は gap となる．定理 3.1 により，$\mathrm{cf}(\lambda) \ge \omega_1$ となっている． □ (定理 3.2)

定理 3.3 (OCA) すべての κ, λ に対し $\mathrm{cf}(\kappa) \ge \omega_2$ かつ $\mathrm{cf}(\lambda) \ge \omega_1$ なら no-omega-
(κ, λ)-*gap* は存在しない．

証明 $(g_\alpha, f_\beta)_{\alpha<\kappa,\beta<\lambda}$ を (κ,λ)-gap で, $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \omega_2$, $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \omega_1$ となるものとするとき, これから OCA に対する反例が作れることを示す. 一般性を失うことなく, κ と λ は正則基数であるとしてよい. 各 $\alpha < \kappa$ に対し, $n_\alpha \in \omega$ を, $\{\, \beta < \lambda : \Gamma(f_\alpha, g_\beta) = n_\alpha \,\}$ が λ で cofinal になるようなものとする. このとき $n^* < \omega$ で, $\{\, \alpha < \kappa : n_\alpha = n^* \,\}$ が κ で cofinal になるものがある. しがって, 一般性を失うことなく $\{\, \alpha < \kappa : n_\alpha = n^* \,\} = \kappa$ としてよい.

各 $\alpha < \kappa$ に対し $B_\alpha = \{\, \beta < \lambda : \Gamma(f_\alpha, g_\beta) = n^* \,\}$ とおく. ここで

$$X = \{\, (f_\alpha, g_\beta) : \alpha < \kappa,\ \beta \in B_\alpha \,\}$$

として, $\langle X \rangle^2 = K_0 \dot{\cup} K_1$ を,

$$K_0 = \{\, ((f,g),(f',g')) \in \langle X \rangle^2 : \max\{\, \Gamma(f,g'), \Gamma(f',g) \,\} > n^* \,\}$$

で与えられる分割とする. 明らかに K_0 は対称である.

Claim 3.3.1 K_0 は $\langle X \rangle^2$ の開集合となっている.

$\vdash$ $((f,g),(f',g')) \in K_0$ に対し, $n^\dagger = \max\{\, \Gamma(f,g'), \Gamma(f',g) \,\}$ として,

$$\begin{aligned} O = \{\, ((f_0,g_0),(f_1,g_1)) \in ({}^\omega\omega)^2 \times ({}^\omega\omega)^2 :& \\ & f_0 \restriction n^\dagger = f \restriction n^\dagger,\ g_0 \restriction n^\dagger = g \restriction n^\dagger, \\ & f_1 \restriction n^\dagger = f' \restriction n^\dagger \text{ かつ } g_1 \restriction n^\dagger = g' \restriction n^\dagger \,\} \end{aligned}$$

とすると O は $({}^\omega\omega)^2 \times ({}^\omega\omega)^2$ の開集合となり, $((f,g),(f',g')) \in O \cap \langle X \rangle^2 \subseteq K_0$ である. $\dashv$ (Claim 3.3.1)

$\mathrm{OCA}(({}^\omega\omega)^2)$ の定義の *0)* と *1)* のどちらも, この分割で成り立たないことを示す.

まず, 非可算な $Y \subseteq X$ で, $\langle Y \rangle^2 \subseteq K_0$ となるものがあるとして矛盾を導く.

Claim 3.3.2 すべての (f,g), $(f',g') \in Y$ に対し $f \neq f'$ なら $g \neq g'$ である. c-13-5-2

証明 そうでなければ f, f', g, g' で, $(f,g), (f',g) \in Y$, $f \neq f'$ だが $g = g'$ となるようなものが存在する. このとき, $\Gamma(f,g') = \Gamma(f,g) = n^*$, また, $\Gamma(f',g) = \Gamma(f',g') = n^*$ である. これはしかし $\langle Y \rangle^2 \subseteq K_0$ に矛盾する.
$\dashv$ (Claim 3.3.2)

Claim 3.3.3 κ の元の真の上昇列 $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ と λ の元の真の上昇列 $(\beta_\xi)_{\xi<\omega_1}$ で, すべての$\xi < \omega_1$ に対し, $(f_{\alpha_\xi}, g_{\beta_\xi}) \in Y$ となるものが存在する.

$\vdash$ $I = \{\alpha < \kappa : (f_\alpha, g_\beta) \in Y$ がある $\beta < \lambda$ で成り立つ$\}$ とする. Claim 3.3.2 により, 写像$\varphi : I \to \lambda;, \alpha \mapsto \min\{\beta < \lambda : (f_\alpha, g_\beta) \in Y\}$ は単射的である. I は非可算だから, $I' \subseteq I$ を $\mathrm{otp}(I') = \omega_1$ で, $\varphi \restriction I'$ が増加関数になるようにとれる. $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ を I' の元の真の上昇列とすれば, $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ と $(\varphi(\alpha_\xi))_{\xi<\omega_1}$ は, 求めていたようなものになる. $\dashv$ (Claim 3.3.3)

$(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ と $(\beta_\xi)_{\xi<\omega_1}$ を Claim 3.3.3 でのようにとる. $\alpha^* = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \omega_1\}$ とする. $\kappa = \mathrm{cf}\,\kappa > \omega_1$ だから, $\alpha^* < \kappa$ である. このとき $n^{**} \in \omega$ で $n^* \leq n^{**}$ となるものと, 非可算な $I_0 \subseteq \omega_1$, で,

$(*)$ すべての $\xi \in I_0$ に対し, $\Gamma(f_{\alpha_\xi}, f_{\alpha^*})$, $\Gamma(f_{\alpha^*}, g_{\alpha_\xi}) \leq n^{**}$

となるものがとれる. ${}^{n^{**}}\omega$ は可算だから, さらに非可算の $I_1 \subseteq I_0$ と $s \in {}^{n^{**}}\omega$ を選んで,

$(**)$ すべての $\xi \in I_1$ に対し, $f_{\alpha_\xi} \restriction n^{**} = s$

となるようにできる. $\langle Y \rangle^2 \subseteq K_0$ だったから, 次の命題により, 矛盾を得る:

Claim 3.3.4 $\xi, \eta \in I_1$ を異なるものとするとき, $\Gamma(f_{\alpha_\xi}, g_{\beta_\eta}) \leq n^*$ となる.

$\vdash$ $n \in \omega \setminus n^{**}$ に対しては, $(*)$ により, $f_{\alpha_\xi}(n) \leq f_{\alpha^*}(n) \leq g_{\beta_\eta}(n)$ となる. 一方, $(**)$ と $\beta_\eta \in B_{\alpha_\eta}$ により, $n \in n^{**} \setminus n^*$ に対しては, $f_{\alpha_\xi}(n) = s(n) = f_{\alpha_\eta}(n) \leq g_{\beta_\eta}(n)$ である. $\dashv$ (Claim 3.3.4)

今度は $Y_n \subseteq X$, $(n < \omega)$ で, $X = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ かつ, $\langle Y_n \rangle^2 \subseteq K_1$ がすべての

$n<\omega$ で成り立っているものがあるして矛盾を導く. $n<\omega$ に対し,

$$I_n=\{\alpha<\kappa : \text{ある } \beta<\lambda \text{ に対し } (f_\alpha,g_\beta)\in Y_n\},$$

$$J_n=\{\beta<\lambda : \text{ある } \alpha<\omega_1 \text{ に対し } (f_\alpha,g_\beta)\in Y_n\}$$

とする.

Claim 3.3.5 $n_0\in\omega$ で, I_{n_0} は κ で *cofinal* となり, J_{n_0} も λ で *cofinal* になるものが存在する.

$\vdash$ そのようなものが無いとすると, 各々の $n<\omega$ に対し, $\alpha_n<\kappa$ と$\beta_n<\lambda$ で, $Y_n\subseteq(\alpha_n\times\lambda)\cup(\kappa\times\beta_n)$ となるものが存在する. $\alpha^*=\sup_{n<\omega}\alpha_n$, $\beta^*=\sup_{n<\omega}\beta_n$ とする. このとき, $\alpha^*<\kappa$ かつ, $\beta^*<\lambda$ となる. B_{α^*} は λ で cofinal だったから, $\beta^+\in B_{\alpha^*}$ が, $\beta^*\leq\beta^+$ となるようにとれる. このとき, $(f_{\alpha^*},g_{\beta^+})\in X$ である. ところが, $\bigcup_{n<\omega}(\alpha_n\times\lambda)\cup(\kappa\times\beta_n)\not\ni(\alpha^*,\beta^+)$ により, $(f_{\alpha^*},g_{\beta^+})\notin\bigcup_{n<\omega}Y_n$ となるから, これは矛盾である. $\dashv$ (Claim 3.3.5)

n_0 を Claim 3.3.5 のようにとる. (f,g) (f',g') を Y_{n_0} の異なる元とすると, $\langle Y_{n_0}\rangle^2\subseteq K_1$ により, $f\restriction(\omega\setminus n^*)\leq g'\restriction(\omega\setminus n^*)$ が成り立つ. したがって $h\in{}^\omega\omega$ を,

$$h(n)=\begin{cases}0, & n<n^* \text{ のとき;}\\ \max\{f(n) : \text{ある } g \text{ に対し}, (f,g)\in Y_{n_0}\}, & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

と定義することができる. このとき, すべての $(f,g)\in Y_{n_0}$ に対し, $f\leq^* h\leq^* g$ となる. I_{n_0} は κ で cofinal, また J_{n_0} は λ で cofinal だから, $f_\alpha\leq^* h\leq^* g_\beta$ がすべての$\alpha<\kappa$ と $\beta<\lambda$ で成り立つ. しかし, このことは $(f_\alpha,g_\beta)_{\alpha<\kappa,\beta<\lambda}$ が gap であるという仮定に矛盾する. □ (定理 3.3)

系 3.4 (OCA) $\mathbf{b}=\aleph_2$. b=alpeh-2

証明 定理 2.3, 3.2, 3.3 による. □ (系 3.4)

系 3.5 (MA + OCA) $2^{\aleph_0}=\aleph_2$. continuu

証明 MA により $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$ となるから, これと 系 3.4 により, 上の等式が得られる. □ (系 3.5)

4 文献

[1] U. Abraham and S. Shelah, Martin's axiom does not imply that every two $\aleph_1$-dense sets of reals are isomorphic, Israel J. of Math. 38 (1981), 161–176.

[2] U. Abaraham, M. Rubin and S. Shelah, On the consistency of some partition theorems for continuous colorings, and the structure of $\aleph_1$-dense real order types, Annals of Pure and Appl. Logic 29 (1985), 123–206.

[3] J. Baumgartner, All $\aleph_1$-dense sets of reals can be isomorphic, Fund. Math. 79 (1973), 101–106.

[4] S. Todorcevic, Partition Problems in Topology, Contemporary Mathematics Vol.84, American Mathematical Society, 1989.