数理解析研究所講究録
937巻 1996年 72-74

Sharp Gårding 型不等式に関して

東大数理　丸山文綱 (MARUYAMA Fumitsuna)

・はじめに

この小文は、いわゆる Sharp Gårding 型不等式の行列の場合に関する注意を与えるためのものである。スカラーの場合には周知の通り，数多くの研究がある。以下作用素は通常の計量による $L^2(\mathbb{R}^n)$ の自明なバンドル上で考え，共役はその計量に関してとるものとする。にもかかわらず，主に形式的，つまり定義域を限定せずに作用素を扱う．以後「形式的」は省略される。

・Hörmander の反例

Hörmander は，Weyl Calculusの論文において，次の自己共役作用素と同等な作用素をこの不等式の反例として挙げている。

$$P = \begin{pmatrix} -\partial^2 & x\partial + \frac{1}{2} \\ -(x\partial + \frac{1}{2}) & x^2 \end{pmatrix} \qquad \text{ただし}\quad \partial = \frac{d}{dx}$$

確かに，各要素の（主）表象による行列式の値は0である。しかし，実は次のような分解ができて，Pは非負ではないことがわかる。

$$P = A^*\begin{pmatrix} -\frac{3}{4x^2} & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} A$$

ただし

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\frac{1}{x}\partial + \frac{1}{2x^2}) & 1 \end{pmatrix}$$

（この分解は，$x=0$で特異であるが，これはこの点で作用素の形が実際に変化してしまうためである。）

しかもPは微分作用素の範囲で逆を持つ。

$$(-\tfrac{3}{4})\cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} x^2 & -x\partial + \frac{3}{2} \\ x\partial + \frac{5}{2} & -\partial^2 \end{pmatrix}$$

従って，これは不等式に対する反例というよりは，行列の場合に表象のこのような扱いによる結果が作用素そのものの性質を反映しない例というべきである。

・佐藤−柏原行列式

この溝を埋めるのが佐藤−柏原行列式である。 micro-differential と pseudodifferential では差異があるものの，後者が古典的かつ解析関数係数の場合においてこの行列式を翻訳することが可能であり，余接束上の微分作用素の特性多

項式に対応するものが得られる。特に正の自己共役作用素に関しては，行列式の値も（余接束上の斉次関数として）正になる。すでにAndronikofにより，上の作用素の行列式の値は$-\frac{3}{4}$であることが計算されているし，さらには佐藤－柏原の論文の例はこの場合を含んでいた。

Brummelhuisは彼の論文の中でFefferman-Phong不等式の行列の場合の反例を挙げたが，これも上と同じように分解により非負でないことがわかる。

このような現象は，表象による行列の行列式が恒等的に0であるときのみ起きる。実際，上の例と同様に三角行列を使えば，いくらでもこのような例を作ることができる。逆に，このような分解は常に可能で，作用素の正値性を直接見るために使うことができる。

・最後に

すでに述べたが，この佐藤－柏原行列式は主表象と同等の役割をするため，残念ながら不等式の評価そのものの進展には大きく寄与しない。低階項の表象にあたるものが必要となる。