数理解析研究所講究録
942巻 1996年 124-133

p進L関数と、正規整数底についての或る問題

横浜市大・理　市村　文男 (Humio Ichimura)

§1、序文

K, G, L をそれぞれ有限次代数体，有限群，K の G-拡大とします。Galois理論で良く知られている様に、拡大 L/K は正規底を持ちます。つまり、L を自然に群環 $K[G]$ 上の加群とみると、L は自由で階数1となります．では、話を K, L の整数環 $\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_L$ に置き変えたらどうなるかという問は、古典的な問題です：

L/K は正規整数底(NIB)を持つか, i.e., $\mathcal{O}_L \simeq \mathcal{O}_K[G]$?

これについて、基礎体 K が有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合、Fröhlich, Taylor によって満足すべき結果があります(Fröhlich [3] 参照)。
しかし、それ以外の場合には、余り良くは分っていない様です。

L/K がNIBを持つための明らかな必要条件は、

(*)　K の $^{\forall}$素ideal $\mathfrak{p}$ で、$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}[G]$

となる事です。ここで、$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ は、K の $\mathfrak{p}$ での完備化の整数環で

す。Noetherにより、(*)が成り立つための必要十分条件は、L/K ですべての $\mathfrak{p}$ が高々 tamely に分岐する事です。特に、L/K が不分岐なら、(*)は成り立ちます。

この小文で扱うのは、次の問題(の特別な場合)です。

<u>問題</u>　k, G を与えられた有限次代数体，有限abel群とする。$H = H(k, G)$ を K の不分岐な G-拡大全体とし、$N = N(k, G)$ をそのなかでNIBを持つもの全体とする。この時、H と N の gap，つまり，整数環の構造についての local-global gap は何か？

この問題について、G が素数巾次巡回群 ($\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$, p：素数, $a \geqq 1$) の場合が基本的です。$a = 1$ の時、次の補題が知られています。

<u>補題</u>(Childs [2])　K を代数体で1の原始 p 乗根 ζ を含むものとし、$\lambda = \zeta - 1$ とおく。p 次巡回拡大 L/K が、不分岐でかつNIBを持つためには、L が $\varepsilon \equiv 1 \bmod \lambda^p$ なる K の単数 ε の p 乗根を添加して得られる事が、必要十分である。

この補題は、環のGalois拡大の理論を用いて証明されましたが、関口さん，諏訪さんの Kummer-Artin Schreier の統一理論

の簡単な系としても得られる事を諏訪さんに教えて頂きました。

この補題と岩澤理論を用いて、kがある虚abel体の円分$\mathbb{Z}_p$拡大の各中間体を走る時、$H(k,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$と$N(k,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$のgapとそのふるまいを、p進L関数(に付随する巾級数)を用いて記述するのが講演の内容です。これは、論文[4],[5]に基ずくものです。

§2. 設定/記号

以下、pを奇素数、kを次の条件を満たす虚abel体とします：

(C1) kは1の原始p乗根ζを含む。

(C2) $\Delta = \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$のexponent $= p-1$。

(C3) p上のkの素idealは、唯一つ。

k_∞/kを円分$\mathbb{Z}_p$拡大，k_nをそのn番目の中間体とします$(n \geq 0)$。

$$\mathcal{H}_n := \{[\alpha] \in k_n^\times / k_n^{\times p} \mid k_n(\alpha^{1/p})/k_n \text{ は不分岐}\}$$

$$\cup$$

$$\mathcal{N}_n := \{[\alpha] \in \mathcal{H}_n \mid k_n(\alpha^{1/p})/k_n \text{ はNIBを持つ}\}$$

とおきます。補題により、$\mathcal{N}_n$は$\mathcal{H}_n$の部分群です。目標は、商群$\mathcal{H}_n/\mathcal{N}_n$の構造を調べる事です。

補題により、$\mathcal{H}_n/\mathcal{N}_n = ?$という問は、$k_n$の単数群$E_n$のp-adicなふるまいに関するものです。$E_n$自身は難かしい群ですが、

(Hasseの意味の)円単数のなすその部分群C_nは比較的よく分ります。一方、k^+, k_n^+をk, k_nの最大実部分体とすると、解析的類数公式により、$h(k_n^+) = [E_n : C_n] \times$補正項$\delta_n$で、(C2)において$p \nmid \delta_n$です。ここで、$h(\ )$は類数のことです。更に、(C2), (C3)において、$p \nmid h(k^+) \Leftrightarrow p \nmid h(k_n^+)$ $(\forall n \geq 0)$です。従って、我々の問は、$p \nmid h(k^+)$か否かで、様子がかなり異なります。§3で$p \nmid h(k^+)$の場合、§4で一般の場合を扱います。

Galois群$\Delta = \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$は、$\mathcal{H}_n, \mathcal{N}_n, \mathcal{H}_n/\mathcal{N}_n$に自然に作用します。特に複素共役$\rho$の作用で$\mathcal{H}_n$等は固有空間に分解されます。この時、$\mathcal{N}_n^- = \{1\}$が知られている(Brinkhuis [1])ので、考えるべきは、even part $\mathcal{H}_n^+/\mathcal{N}_n^+$です。これを$\Delta$の作用で更に細く分解して、各固有空間の$\Gamma$加群としての構造を調べます。

ψをΔの($\overline{\mathbb{Q}}'_p$-値)の1次指標とし、e_ψ $(\in \overline{\mathbb{Q}}_p[\Delta])$をその巾等元とします。(C2)により、$\psi$は$\mathbb{Q}_p$-値で、$e_\psi \in \mathbb{Z}_p[\Delta]$です。(以下、$\psi$を$\Delta$の$\mathbb{Q}_p$-指標とよびます。) $\mathbb{Z}_p[\Delta]$加群M (e.g., $M = \mathcal{H}_n/\mathcal{N}_n$)に対して、$M(\psi)$でその$\psi$-成分$e_\psi M$ (M^{e_ψ})を表わします。

以下、χを<u>固定</u>された、<u>偶なる</u>Δの$\mathbb{Q}_p$-指標とします。qをχの導手とpの最小公倍数とします。Γと$\mathrm{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k(\mu_p))$を自然に同一視し、$\Gamma$の位相的生成元$\gamma$を$\zeta^\gamma = \zeta^{1+q}$, $\forall \zeta \in \mu_{p^\infty}$

となる様にとります。通常の様に、完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ と巾級数環 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$ を $\gamma = 1+T$ で同一視します。従って、例えば、$(\mathfrak{K}_n/N_n)(\chi)$ は Λ 上の加群とみなせます。

§3. $p \nmid h(k^+)$ の場合

χ を固定された偶な $\mathbb{Q}_p$-指標で、$\chi \neq \chi_0$ (=自明な指標) なるものとする。χ を自然に原始的Dirichlet指標とみなせば、p 進L関数 $L_p(s, \chi)$ が定まります。岩澤[6]により、次の様な $\mathbb{Z}_p$ 係数の巾級数 $g_\chi(T)$ が構成されています:

$$g_\chi((1+q)^{1-s} - 1) = L_p(s, \chi).$$

Λ の ideal X_n $(n \geq 0)$ を

$$X_n := \{ g \in \Lambda \mid pg \in (g_\chi, \omega_n) \}$$

で定めます。ここで、$\omega_n = (1+T)^{p^n} - 1$。更に、$\Lambda_n$ $(n \geq 1)$ を $p^n, p^{n-1-j}T^{p^j}$ $(0 \leq j \leq n-1)$ で生成された Λ の ideal とし、$\Lambda_0 = \Lambda$ とします。Λ 加群 Y_n $(n \geq 0)$ を

$$Y_n := X_n / (X_n \cap \Lambda_n, g_\chi, \omega_n)$$

で定めます。この時、

定理 1 k を (C1) ~ (C3) をみたす虚abel体で、$p \nmid h(k^+)$ なるものとする。χ を Δ の偶な $\mathbb{Q}_p$-指標で、$\neq \chi_0$ なるものとする。この時、次の２つの事が成り立つ:

(I) Λ 加群としての同型 $l_n : (\mathfrak{H}_n/\mathfrak{N}_n)(\chi) \simeq Y_n$ が存在して、

(II) 次の図式が可換になる：

$$
\begin{tikzcd}
\{[\alpha]_{n+1}\} \in (\mathfrak{H}_{n+1}/\mathfrak{N}_{n+1})(\chi) \arrow[r, "\sim", "l_{n+1}"'] & Y_{n+1} \ni [g \cdot \sum_{j=0}^{p-1} (1+T)^{p^n \cdot j}] \\
\{[\alpha]_n\} \in (\mathfrak{H}_n/\mathfrak{N}_n)(\chi) \arrow[u] \arrow[r, "\sim", "l_n"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_n \ni [g]_n \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

ここで、$\{[\alpha]_m\}$ は、$\mathfrak{H}_m$ の元 $[\alpha]_m$ の代表する $\mathfrak{H}_m/\mathfrak{N}_m$ の元、$[g]_m$ は $g\,(\in X_m)$ の代表する Y_m の元である。

<u>系</u>　上の設定で、map $Y_n \to Y_{n+1}$ は 0-map である。従って、(下の注より) $\forall n \geq 0$, $\forall p$ 次不分岐巡回拡大 L/k_n に対して、Lk_{n+1}/k_{n+1} は NIB を持つ。

注) (1) 自明な指標 χ_0 に対しては、$\mathfrak{H}_n(\chi_0) = \mathfrak{N}_n(\chi_0) = \{1\}$ である。これは、p 巾分体の Stickelberger の定理から従う。
(2) 条件 $p \nmid h(k^+)$ がきいて、$\mathfrak{H}_n^- = \{1\}$ である。

$\mathfrak{H}_n$ の $\mathbb{F}_p$ 上の次元は、$n \to \infty$ の時、有界 (Ferrero-Washington) なので、上の事から、

<u>定理2</u>　k : (C1)~(C3) をみたすとする。この時、

$p \nmid h(k^+) \Rightarrow \mathfrak{H}_n(\chi) = \mathfrak{N}_n(\chi)$, $\forall n \gg 0$, $\forall$ 偶な $\mathbb{Q}_p$ 指標 χ

§4、一般の場合

先ず、我々の問題と"Greenberg予想"との関連を述べます。A_nをk_nのideal類群のp-part, $A_\infty = \varprojlim A_n$をnormに関する射影極限とします。$A_\infty(\psi)$ (ψ: Δの$\mathbb{Q}_p$-指標) は、§2で述べた仕方で、Λ加群とみなせます。岩澤により、$A_\infty(\psi)$は有限生成torsion Λ加群です。一般に有限生成torsion Λ加群Mに対して、kernel, cokernel有限のΛ-hom

$$M \to \bigoplus_i \Lambda/(p^{\mu_i}) \oplus \bigoplus_j \Lambda/(f_j)$$

が存在します。ここで、$\mu_i \geq 0$, f_j: distinguishedな多項式。Mの岩澤不変量$\lambda(M)$, $\mu(M)$は、

$$\lambda(M) = \sum_j \deg f_j, \quad \mu(M) = \sum_i \mu_i$$

で定めます。$\lambda(A_\infty(\psi))$, $\mu(A_\infty(\psi))$をλ_ψ, μ_ψと略記します。Ferrero-Washingtonにより、$\mu_\psi = 0$です。

χを§3で固定した偶な$\mathbb{Q}_p$-指標とします。巾級数$g_\chi(T)$のλ-不変量をλ_χ^*とかきます。定義から、λ_χ^*は、g_χの係数がpと素な最初の項の次数です。χに対応する奇指標$\omega\chi^{-1}$をχ^*とかきます。ここで、$\omega: (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$はTeichmüller指標です。

岩澤主予想により、$\lambda_{\chi^*} = \lambda_\chi^*$がわかっています。$\lambda_\chi$については、あまり良く分っていないのですが、$\lambda_\chi = 0$と予想(期待)されています(Greenberg予想)。

<u>定理3</u>　$\mathcal{H}_n(\chi) = \mathcal{N}_n(\chi), \forall n \gg 0 \Longrightarrow \lambda_\chi = 0$

$p \nmid h(k^+)$ なら $\lambda_\chi = 0$ となる事が知られているので、定理3は定理2の弱い形の逆になっています。

次に、$\mathcal{H}_n(\chi) = \mathcal{N}_n(\chi), \forall n \gg 0$ となるための必要十分条件を調べます。Kummer duality により、

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{H}_n(\chi) = \dim_{\mathbb{F}_p} A_n(\chi^*)/A_n(\chi^*)^p, \quad \forall n \geq 0.$$

一方、λ_{χ^*} の定義と、$\lambda_{\chi^*} = \lambda^*_\chi$ を主な根拠として、

(**) $\dim_{\mathbb{F}_p} A_n(\chi^*)/A_n(\chi^*)^p \leqq \lambda^*_\chi, \forall n \geq 0$, 更に、$\forall n \gg 0$ で等号成立、

従って、$\lambda^*_\chi = 1$ の場合が考えるべき最初の場合です。この時、(**)に於て、$\forall n \geq 0$ で等号が成立します。∴ $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{H}_n(\chi) = 1, \forall n \geq 0$、

<u>定理4</u>　k: (C1)～(C3)をみたし、$\lambda^*_\chi = 1$ とする。この時、

$$\mathcal{H}_n(\chi) = \mathcal{N}_n(\chi), \forall n \gg 0 \Longleftrightarrow \mathcal{H}_0(\chi) = \mathcal{N}_0(\chi)$$

最後に、$\mathcal{H}_0(\chi) = \mathcal{N}_0(\chi)$ となる条件を述べます。

<u>定理5</u>　k: (C1)～(C3)をみたす。($\lambda^*_\chi = 1$ は仮定しない。)

$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{N}_0(\chi) \leqq 1$ で、等号成立 $\Leftrightarrow L_p(1, \chi)/\# A_0(\chi) \equiv 0 \bmod p$。

注) $k = \mathbb{Q}(\mu_p)$ の時、これは、Taylor [9] によって得られている。

定理3, 4, 5から、

系　k：(C1)～(C3)をみたし、$\lambda_\chi^* = 1$とする。この時、
$L_p(1,\chi)/\#A_0(\chi) \equiv 0 \bmod p \Rightarrow \lambda_\chi = 0$。

注）この主張は、Kraft [7], 尾崎・田谷 [8] により、全く別の視点から、すでに得られている。

---

[1] J. Brinkhuis : On the Galois module structure over CM-fields, Manuscr. Math., 75 (1992), 333-347
[2] L.N. Childs : The group of unramified Kummer extensions of prime degree, Proc. London Math. Soc., 35 (1977), 407-422
[3] A. Fröhlich : Galois module structure of algebraic integers, Springer-Verlag, 1983
[4] H. Ichimura : On p-adic L-functions and normal bases of rings of integers, J. reine angew. Math., 462 (1995), 169-184
[5] H. Ichimura : On a normal integral basis problem over cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions, to appear in J. Math. Soc. Japan
[6] K. Iwasawa : Lectures on p-adic L-functions, Princeton Univ. Press, 1972

[7] J.S. Kraft : Iwasawa invariants of CM fields, J. Number Theory, 32 (1989), 65-77

[8] M. Ozaki and H. Taya : A note on Greenberg's conjecture for real abelian number fields, Manuscr. Math., 88 (1995), 311-320

[9] M.J. Taylor : The Galois module structure of certain arithmetic principal homogeneous spaces, J. Alg., 153 (1992), 203-214