数理解析研究所講究録
942巻 1996年 66-83

Kummer-Artin-Schreier-Witt理論の試みI

諏訪紀幸(東京電機大学工学部)

1. 動機と主要な結果

1.1. Kを体とする. Kが標数$\neq p$で, Kが1のp^n乗根をすべて含むとき, Kのp^n次巡回拡大はKの元のp^n乗根を添加することによって得られる(Kummer理論). これは, 次の事実から導かれる.

(1) pがKで可逆なら, Kの上のgroup schemeの完全列

$$0 \longrightarrow \mu_{p^n,K} \longrightarrow G_{m,K} \xrightarrow{p^n} G_{m,K} \longrightarrow 0$$

がSpec$K$の上のétale位相に対して完全. ($G_{m,K}$はKの上のmultiplicative group scheme);

(2) (Hilbert 90) $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(K, G_{m,K}) = 0$

一方, Kの標数が$p>0$のときは, Kのp^n次巡回拡大はWitt vectorの方程式$(t_0^p, t_1^p, \ldots, t_{n-1}^p) - (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$の根を添加することによって得られる(Artin-Schreier-Witt理論). これは次の事実から導かれる.

(1) ch.$K = p > 0$のとき, Kの上のgroup schemeの完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \longrightarrow W_{n,K} \xrightarrow{F-1} W_{n,K} \longrightarrow 0$$

はSpec$K$の上のétale位相に対して完全. ($W_{n,K}$はKの上の長さnのWitt vectorのgroup scheme);

(2) $\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(K, W_{n,K}) = 0$

1.2. 混標数の環の不分岐p^n次巡回拡大を記述する, Kummer理論とArtin-Schreier-Witt理論を統一する理論の存在は当然想起される問題であるが, Kummerの完全列とArtin-Schreier-Wittの完全列を結び付けるgroup schemeの完全列が$\mathbb{Z}_{(p)}[\mu_{p^n}]$の上で存在する. 実際, $A = \mathbb{Z}_{(p)}[\mu_{p^n}]$とすれば, Aは$K = \mathbb{Q}(\mu_{p^n})$を分数体とする離散付値環で, 剰余体は$\mathbb{F}_p$に同型. このとき, Aの上のsmooth affine commutative group schemeの完全列

$$(\#_n) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \mathcal{W}_{n,A} \xrightarrow{\Psi_n} \mathcal{V}_{n,A} \longrightarrow 0$$

が存在して，

(1) $(\#_n)$の generic fiber は完全列

$$0 \longrightarrow \mu_{p^n,K} \longrightarrow (G_{m,K})^n \xrightarrow{\Theta} (G_{m,K})^n \longrightarrow 0$$

に同型になる．ここで，$\Theta: (G_{m,Z})^n \to (G_{m,Z})^n$ は

$$(U_0, U_1, \dots, U_{n-1}) \mapsto (U_0^p, U_0^{-1}U_1^p, \dots, U_{n-1}^{-1}U_n^p) \ :$$
$$Z[U_0, \dots, U_{n-1}, U_0^{-1}, \dots, U_{n-1}^{-1}] \to Z[U_0, \dots, U_{n-1}, U_0^{-1}, \dots, U_{n-1}^{-1}]$$

によって定義される準同型；

(2) $(\#_n)$の closed fiber は Artin-Schreier-Witt の完全列

$$0 \longrightarrow Z/p^n \longrightarrow W_{n,F_p} \xrightarrow{F-1} W_{n,F_p} \longrightarrow 0$$

に同型になる；

(3) (Hilbert 90) B が局所 A-代数なら，$\mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(B, \mathcal{W}_{n,A}) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{et}}(B, \mathcal{V}_{n,A}) = 0$

註 1.3．$\Pi: (G_{m,Z})^n \to G_{m,Z}$ を

$$U \mapsto U_{n-1} \ : \ Z[U, U^{-1}] \to Z[U_0, \dots, U_{n-1}, U_0^{-1}, \dots, U_{n-1}^{-1}]$$

によって定義される準同型，$\Xi: (G_{m,Z})^n \to G_{m,Z}$ を

$$U \mapsto U_0 U_1^p \dots U_{n-1}^{p^{n-1}} \ : \ Z[U, U^{-1}] \to Z[U_0, \dots, U_{n-1}, U_0^{-1}, \dots, U_{n-1}^{-1}]$$

によって定義される準同型とすれば，完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{p^n,Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (G_{m,Z})^n \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\Pi"] & (G_{m,Z})^n \arrow[r] \arrow[d, "\Xi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{p^n,Z} \arrow[r] & G_{m,Z} \arrow[r, "p^n"] & G_{m,Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を得る．

1.4．$n=1$ の場合は Waterhouse [11]と関口 et al.[2]によって独立に定式化されたが，理論の起源は Furtwängler の仕事に溯る．一般の場合の理論の見通しをするために，ここで p 次の理論の概要を略述する．

A を整域，K を A の分数体とする．$\lambda \neq 0$ を A の可逆でない元とし，$A_0 = A/(\lambda)$ とする．A の上の smooth affine group scheme $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ を

$$\mathcal{G}^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}A[T, 1/(\lambda T+1)]$$

(1) (乗法)　$T \mapsto \lambda T \otimes T + T \otimes 1 + 1 \otimes T$;

(2) (単位元) $T \mapsto 0$;

(3) (逆元) $T \mapsto -T/(\lambda T+1)$

で定義する．また，group scheme の準同型 $\alpha^{(\lambda)}:\mathcal{G}^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}A[T,1/(\lambda T+1)] \to \mathbf{G}_{m,A} = \mathrm{Spec}A[U,U^{-1}]$ を

$$X \mapsto \lambda T+1 \ : \ A[U,U^{-1}] \to A[T,1/(\lambda T+1)]$$

によって定義する．このとき，$\alpha^{(\lambda)}\otimes 1_K:\mathcal{G}^{(\lambda)}\otimes_A K \to \mathbf{G}_{m,K}$ は同型．また，$\mathcal{G}^{(\lambda)}\otimes_A A_0$ は $\mathbf{G}_{a,A_0}$ に他ならない．

(Hilbert 90) A が局所環なら，

$$H^1_{\mathrm{et}}(A,\mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0$$

特に，$\zeta = e^{2\pi i/p}$，$\lambda = \zeta-1$，$A = \mathbf{Z}[\zeta]$，$K = \mathbf{Q}(\zeta)$ とする．このとき，(λ) は A の prime ideal で，$(\lambda)^{p-1} = (p)$，$A/(\lambda) = \mathbf{F}_p$．準同型 $\Psi_1:\mathcal{G}^{(\lambda)} \to \mathcal{G}^{(\lambda^p)}$ を

$$T \mapsto \frac{(\lambda T+1)^p-1}{\lambda^p} : A[T,1/(\lambda^p T+1)] \to A[T,1/(\lambda T+1)]$$

によって定義する．このとき，$\mathrm{Ker}\Psi_1 = \mathrm{Spec}A[T,1/(\lambda T+1)]/\left(\frac{(\lambda T+1)^p-1}{\lambda^p}\right)$ は constant group scheme Z/p に同型．さらに，

group scheme の完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z/p & \longrightarrow & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow{\Psi_1} & \mathcal{G}^{(\lambda^p)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{(\lambda)}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{(\lambda^p)}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_{p,A} & \longrightarrow & G_{m,A} & \xrightarrow{p} & G_{m,A} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る．このとき，

$$\begin{array}{c} [0 \longrightarrow Z/p \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi_1} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \longrightarrow 0]\otimes_A K \\ \downarrow\wr \\ [0 \longrightarrow \mu_{p,A} \longrightarrow G_{m,A} \xrightarrow{p} G_{m,A} \longrightarrow 0]\otimes_A K \end{array}$$

また，

$$[0 \longrightarrow Z/p \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi_1} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \longrightarrow 0]\otimes_A F_p$$

は Artin-Schreier の完全列

$$0 \longrightarrow Z/p \longrightarrow G_{a,F_p} \xrightarrow{F-1} G_{a,F_p} \longrightarrow 0$$

に他ならない．

$$(\#_1) \quad 0 \longrightarrow Z/p \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi_p} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \longrightarrow 0$$

を Kummer-Artin-Schreier あるいは Furtwängler の完全列とよぶことにする．

Witt vector の formalism と両立するように $(\#_1)$ を積み重ねて $(\#_n)$ を構成する．本稿では Witt vector について復習した後，$(\#_n)$ の構成の概略を述べる．II では Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論に関係する問題について説明する．

2．Witt vector

2.1．各 $r \geqq 0$ に対して

$$\Phi_r(T) = \Phi_r(T_0, T_1, \ldots, T_r) = T_0^{p^r} + pT_1^{p^{r-1}} + \ldots + p^r T_r \quad (\text{Witt 多項式})$$

と定義する．さらに，

$$S_r(X, Y) = S_r(X_0, X_1, \ldots, X_r, Y_0, Y_1, \ldots, Y_r),$$
$$P_r(X, Y) = P_r(X_0, X_1, \ldots, X_r, Y_0, Y_1, \ldots, Y_r)$$

をそれぞれ

$$\Phi_r(S_0, S_1, \ldots, S_r) = \Phi_r(X_0, X_1, \ldots, X_r) + \Phi_r(Y_0, Y_1, \ldots, Y_r),$$
$$\Phi_r(P_0, P_1, \ldots, P_r) = \Phi_r(X_0, X_1, \ldots, X_r)\Phi_r(Y_0, Y_1, \ldots, Y_r),$$

によって帰納的に定義する．このとき，

$$S_r(X, Y),\ P_r(X, Y) \in Z[X_0, X_1, \ldots, X_r, Y_0, Y_1, \ldots, Y_r]$$

例えば，

$$S_0(X_0, Y_0) = X_0 + Y_0,\quad S_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = X_1 + Y_1 + \frac{X_0^p + Y_0^p - (X_0 + Y_0)^p}{p},$$
$$P_0(X_0, Y_0) = X_0 Y_0,\quad P_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p + pX_1 Y_1$$

$W_{n,Z} = \operatorname{Spec} Z[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}]$ に

加法：$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (S_0(X, Y), S_1(X, Y), \ldots, S_{n-1}(X, Y))$,

乗法：$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (P_0(X, Y), P_1(X, Y), \ldots, P_{n-1}(X, Y))$

によって環の構造を定義する．零元は

$$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (0, 0, \ldots, 0)$$

で，単位元は

$$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (1, 0, \ldots, 0)$$

で与えられる．

さらに，

$$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) : \quad Z[T_0, \ldots, T_{n-1}] \to Z[T_0, \ldots, T_{n-1}, T_n]$$

によって環の準同型 $R: W_{n+1,Z} \to W_{n,Z}$ を，

$$(T_0, T_1, \ldots, T_n) \mapsto (0, T_0, \ldots, T_{n-1}) : \quad Z[T_0, \ldots, T_{n-1}, T_n] \to Z[T_0, \ldots, T_{n-1}]$$

によって準同型 $V: W_{n,Z} \to W_{n+1,Z}$ を定義する．このとき，群の完全列

$$(E_{m,n}) \qquad 0 \to W_{n,Z} \xrightarrow{V^m} W_{n+m,Z} \xrightarrow{R^n} W_{m,Z} \to 0$$

を得る．

(1) $\mathrm{Ext}^1_Z(W_{m-1,Z}, W_{n,Z})$ において $[E_{m,n}]V = [E_{m-1,n}]$；

(2) $\mathrm{Ext}^1_Z(W_{m,Z}, W_{n-1,Z})$ において $R[E_{m,n}] = [E_{m,n-1}]$

$W_Z = \varprojlim W_{n,Z}$ とし，W_Z の部分函手 $\hat{W}_Z$ を

$$\hat{W}(A) = \left\{ (a_r)_{r\geq 0} \ ; \text{各 } a_r \text{ は巾零，有限個の } r \text{ を除いて } a_r = 0 \right\}$$

によって定義する．このとき，$\hat{W}_Z$ は W_Z の ideal．

2.2. $$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (T_0^p, T_1^p, \ldots, T_{n-1}^p) : \quad F_p[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}] \to F_p[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}]$$

によって環の準同型 $F: W_{n,F_p} \to W_{n,F_p}$ を定義する．このとき，

(1) $FR = RF$;

(2) $FV = VF$

A を F_p-代数とする．このとき，$\mathrm{End}_{A\text{-gr}} G_{a,A} = A[F]$．$\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A}, G_{a,A})$ は push-out によって左 $A[F]$-加群の構造を持つ．

補題 2.2.1. A を F_p-代数とする. このとき,

(1) $\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A}, G_{a,A})$ は $[E_{n,1}]$ を基底とする自由左 $A[F]$-加群;

(2) $V^*:\mathrm{Ext}^1_A(W_{n,A}, G_{a,A}) \to \mathrm{Ext}^1_A(W_{n-1,A}, G_{a,A})$ は左 $A[F]$-加群の同型.

2.3. $E_p(U) = \exp\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{U^{p^r}}{p^r}\right)$ (Artin-Hasse exponential)

とおく. このとき,

$$E_p(U) \in Z_{(p)}[[U]]$$

$U = (U_r)_{r\geqq 0}$, $X = (X_r)_{r\geqq 0}$ に対して

$$E_p(X,T) = \exp\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Phi_r(X)\Phi_r(T)}{p^r}\right)$$

とおく. このとき,

$$E_p(X,T)E_p(Y,T) = E_p(S(X,Y),T),$$

$$E_p(X,T)E_p(X,U) = E_p(X,S(T,U))$$

さらに,

$$E_p(X;T_0,\ldots,T_{n-1}) = E_p(X,(T_0,\ldots,T_{n-1},0,\ldots))$$

とおく. 例えば,

$$E_p(X;T) = \prod_{r=0}^{\infty} E_p(X_r T^{p^r})$$

A を F_p-代数とする. $\boldsymbol{a} \in \hat{W}(A)$ なら, $E_p(\boldsymbol{a};T_0,\ldots,T_{n-1}) \in A[T_0,\ldots,T_{n-1}]$. さらに, $\boldsymbol{a} \in {}_{F^n}\hat{W}(A)$ なら, $U \mapsto E_p(\boldsymbol{a};T_0,\ldots,T_{n-1})$ によって $W_{n,A}$ から $G_{m,A}$ への準同型が定義される. $U \mapsto E_p(\boldsymbol{a};T_0,\ldots,T_{n-1})$ は同型 ${}_{F^n}\hat{W}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(W_{n,A}, G_{m,A})$ を与える.

3. Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論の構成

3.1. A を整域, K を A の分数体とする. $\lambda \neq 0$ を A の可逆でない元とし, $A_0 = A/(\lambda)$

とする．多項式の族 $F=(F_r(T))_{0<r\leqq n-1}$：

$$F_r(T)=F_r(T_0,T_1,\ldots,T_{r-1})\in A[T_0,T_1,\ldots,T_{r-1}]$$

に対して

$$\alpha_0^F(T)=\alpha_r^F(T_0)=\lambda T_r+1,$$
$$\alpha_r^F(T)=\alpha_r^F(T_0,\ldots,T_r)=\lambda T_r+F_r(T_0,\ldots,T_{r-1})\quad(r\geqq 1)$$

とおく．また，

$$\beta_r^F(U)=\beta_r^F(U_0,\ldots,U_r)\in K[U_0,\ldots,U_{r-1}],$$
$$\Lambda_r^F(X,Y)=\Lambda_r^F(X_0,\ldots,X_r,Y_0,\ldots,Y_r)\in K[X_0,\ldots,X_r,Y_0,\ldots,Y_r]$$

をそれぞれ帰納的に

$$\beta_r^F(U_0)=\frac{1}{\lambda}(U_0-1),$$
$$\beta_r^F(U_0,\ldots,U_r)=\frac{1}{\lambda}[U_r-F_r(\beta_0^F(U),\beta_1^F(U),\ldots,\beta_{r-1}^F(U))]\quad(r\geqq 1)$$

あるいは，

$$\Lambda_0^F(X_0,Y_0)=\lambda X_0Y_0+X_0+Y_0,$$
$$\Lambda_r^F(X_0,\ldots,X_r,Y_0,\ldots,Y_r)=\lambda X_rY_r+X_r+Y_r$$
$$+\frac{1}{\lambda}[F_r(X)F_r(Y)-F_r(\Lambda_0^F(X,Y),\ldots,\Lambda_{r-1}^F(X,Y))]\quad(r\geqq 1)$$

によって定義する．このとき，

(1) $\alpha_r^F(\beta_0^F(U),\beta_1^F(U),\ldots,\beta_r^F(U))=U_r$;

(2) $\beta_r^F(\alpha_0^F(T),\alpha_1^F(T),\ldots,\alpha_r^F(T))=T_r$;

(3) $\alpha_r^F(\Lambda_0^F(X,Y),\Lambda_1^F(X,,Y),\ldots,\Lambda_r^F(X,Y))=\alpha_r^F(X)\alpha_r^F(Y)$;

(4) $\beta_r^F(X_0Y_0,\ldots,X_rY_r)=\Lambda_r^F(\beta_0^F(X),\ldots,\beta_r^F(X),\beta_0^F(Y),\ldots,\beta_r^F(Y))$

が成立する．

さらに，各 r に対して $F_r(0)=F_r(0,\ldots,0)=1$ なら，

(5) $\alpha_r^F(0)=\alpha_r^F(0,\ldots,0)=1$;

(6) $\beta_r^F(1)=\beta_r^F(1,\ldots,1)=1$;

(7) $\Lambda_r^F(0,0)=\Lambda_r^F(0,\ldots,0,0,\ldots,0)=0$;

(8) $\Lambda_r^F(\beta_0^F(X_0),\ldots,\beta_r^F(X_0,\ldots,X_r),\beta_0^F(X_0^{-1}),\ldots,\beta_r^F(X_0^{-1},\ldots,X_r^{-1}))=0$;

(9) $\Lambda_r^F(0,\ldots,0,X,0,\ldots,0,Y)=\Lambda_0^F(X,Y)=\lambda XY+X+Y$

が成立する．

命題 3.1.1. 各 $r \geqq 0$に対して

(0) $F_r(0) = F_r(0,\ldots,0) = 1$;

(1) $F_r(X)F_r(Y) \equiv F_r(\Lambda_0^F(X,Y),\ldots,\Lambda_{r-1}^F(X,Y)) \mod.\lambda$

が成立すると仮定する．このとき，

$$(T_0,T_1\ldots,T_{n-1}) \mapsto (\Lambda_0^F(T\otimes 1,1\otimes T),\Lambda_1^F(T\otimes 1,1\otimes T),\ldots,\Lambda_{n-1}^F(T\otimes 1,1\otimes T))$$

は

$$W_n^F = \mathrm{Spec}\, A[T_0,T_1,\ldots,T_{n-1},\alpha_0^F(T)^{-1},\alpha_1^F(T)^{-1},\ldots,\alpha_{n-1}^F(T)^{-1}]$$

の上に乗法を定義する．単位元は

$$(T_0,T_1\ldots,T_{n-1}) \mapsto (0,0,\ldots,0)$$

よって与えられる．

3.2. W_n^Fは affine 空間 $\mathbb{A}_A^n$の open subscheme なので，W_n^Fは Aの上に smooth. Bを A–代数，$\boldsymbol{b} = (b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}) \in B^n$とする．このとき，$\boldsymbol{b}$が $W_n^F(B)$に属する $\Leftrightarrow$ $\alpha_0^F(\boldsymbol{b}),\alpha_1^F(\boldsymbol{b}),\ldots,\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{b})$が Bで可逆.

準同型 $\alpha^F: W_n^F \to (\mathbb{G}_{m,A})^n$を

$$(U_0,U_1,\ldots,U_{n-1}) \mapsto (\alpha_0^F(T),\alpha_1^F(T),\ldots,\alpha_{n-1}^F(T)):$$
$$A[T_0,T_1,\ldots,T_{n-1},\alpha_0^F(T)^{-1},\alpha_1^F(T)^{-1},\ldots,\alpha_{n-1}^F(T)^{-1}] \to A[U_0,\ldots,U_{n-1},U_0^{-1},\ldots,U_{n-1}^{-1}]$$

によって，準同型 $\beta^F: (\mathbb{G}_{m,K})^n \to W_{n,K}^F$を

$$(T_0,T_1,\ldots,T_{n-1}) \mapsto (\beta_0^F(U),\beta_1^F(U),\ldots,\beta_{n-1}^F(U)):$$
$$K[U_0,\ldots,U_{n-1},U_0^{-1},\ldots,U_{n-1}^{-1}] \to K[T_0,T_1,\ldots,T_{n-1},\alpha_0^F(T)^{-1},\alpha_1^F(T)^{-1},\ldots,\alpha_{n-1}^F(T)^{-1}]$$

によって定義する．このとき，$\beta^F = (\alpha_K^F)^{-1}$，したがって，$\beta^F$は同型.

自然な単射 $(T_0,T_1,\ldots T_{n-2}) \mapsto (T_0,T_1,\ldots T_{n-2})$:

$$A[T_0,T_1,\ldots T_{n-2},\alpha_0^F(T)^{-1},\alpha_1^F(T)^{-1},\ldots,\alpha_{n-2}^F(T)^{-1}] \to A[T_0,T_1,\ldots,T_{n-1},\alpha_0^F(T)^{-1},\alpha_1^F(T)^{-1},\ldots,\alpha_{n-1}^F(T)^{-1}]$$

によって群の準同型 $R: W_n^F \to W_{n-1}^F$を定義する．このとき，Rは全射で，$\mathrm{Ker}R$は $\mathcal{G}^{(\lambda)}$に同型．Aの上の group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \longrightarrow \mathcal{W}_n^F \xrightarrow{R} \mathcal{W}_{n-1}^F \longrightarrow 0$$

から，A_0 の上の group scheme の完全列

$$(E_{n-1,1}^F) \qquad 0 \longrightarrow G_{a,A_0} \longrightarrow \mathcal{W}_{n,A_0}^F \xrightarrow{R} \mathcal{W}_{n-1,A_0}^F \longrightarrow 0$$

を得る．したがって，$\mathcal{W}_{n,A_0}^F$ は G_{a,A_0} の successive extension. 拡大 $(E_{n-1,1}^F)$ は 2-cocycle

$$\frac{1}{\lambda}[F_{n-1}(X)F_{n-1}(Y)-F_{n-1}(\Lambda_0^F(X,Y),\ldots,\Lambda_{n-2}^F(X,Y))] \in Z_0^2(\mathcal{W}_{n-2,A_0}^F, G_{a,A_0})$$

によって定義される．

3.3. 以下，A は剰余体が標数 p の局所環で，$\lambda | p$ と仮定する．

各 r に対して $F_r(0,\ldots,0,T)$ mod. λ が次数 $\leq p-1$ と仮定する．このとき，$\lambda | c_r^p$ を満たす $c_r \in A$ が存在して

$$F_r(0,\ldots,0,T) \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(c_r T)^i}{i!} \text{ mod. } \lambda$$

となる．

命題 3.3.1. 各 r に対して

$$F_r(0,\ldots,0,T) \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(c_r T)^i}{i!} \text{ mod. } \lambda$$

で，$\dfrac{c_r^p}{\lambda}$ が A_0 で可逆であると仮定する．このとき，各 $\mathcal{W}_{r,A_0}^F$ は W_{r,A_0} に同型．

r に関する帰納法による．拡大の同型

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G_{a,A_0} & \xrightarrow{V^{r-1}} & \mathcal{W}_{r,A_0}^F & \xrightarrow{R} & \mathcal{W}_{r-1,A_0}^F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow a_r & & \downarrow \tilde{h}_r & & \downarrow \tilde{h}_{r-1} & & \\
0 & \longrightarrow & G_{a,A_0} & \xrightarrow{V^{r-1}} & W_{r,A_0} & \xrightarrow{R} & W_{r-1,A_0} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

a_r は A の可逆元，

が存在すると仮定する．$[E_{r,1}^F]$ を拡大

$$0 \to G_{a,A_0} \to \mathcal{W}_{r+1,A_0}^F \to \mathcal{W}_{r,A_0}^F \to 0$$

の $\mathrm{Ext}_{A_0}^1(\mathcal{W}_{r,A_0}^F, G_{a,A_0})$ における類とする．このとき，仮定から A_0 で可逆な A の元 a_{r+1} が存在して $\mathrm{Ext}_{A_0}^1(G_{a,A_0}, G_{a,A_0})$ において

$$[E_{r,1}^F]\tilde{h}_r^{-1}V^{r-1} = [E_{r,1}^F]V^{r-1}a_r^{-1} = a_{r+1}^{-1}[E_{1,1}]$$

となる．ここで，$[E_{1,1}]=[E_{r,1}]V^{r-1}$ で，$(V^{r-1})^*:\mathrm{Ext}^1_{A_0}(W_{r,A_0},G_{a,A_0})\to \mathrm{Ext}^1_{A_0}(G_{a,A_0},G_{a,A_0})$ が双射なので，

$$[E^F_{r,1}]=a^{-1}_{r+1}[E_{r,1}]\tilde{h}_r$$

これから，拡大の同型

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_{a,A_0} & \xrightarrow{V^r} & W^F_{r+1,A_0} & \xrightarrow{R} & W^F_{r,A_0} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a_{r+1} & & \downarrow \tilde{h}_{r+1} & & \downarrow \tilde{h}_r & & \\ 0 & \longrightarrow & G_{a,A_0} & \xrightarrow{V^r} & W_{r+1,A_0} & \xrightarrow{R} & W_{r,A_0} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る．

以上の構成から，$\tilde{h}_n:W^F_{n,A_0}\xrightarrow{\sim}W_{n,A_0}$ は

$$T_0\mapsto h_0(T)=T_0,$$
$$T_j\mapsto h_r(T)=a_r(T_0,\ldots,T_{r-1})T_r+b_r(T_0,\ldots,T_{r-1}),$$
$$a_r(0)\equiv a_r\ \mathrm{mod.}\ \lambda,\quad b_r(0)\equiv 0\ \mathrm{mod.}\ \lambda \qquad (j\geqq 1)$$

の形をしていることが従う．

3.4．$\zeta_k=e^{2\pi i/p^k}$ とおき，$\tilde{A}=Z_{(p)}[\zeta_k;k>0]$ とする．各 k に対して $\lambda_k=\zeta_k-1$ とおく．特に，$\lambda=\lambda_1=\zeta_1-1$ とおく．v を $v(p)=1$ によって正規化された p 進付値とすれば，$v(\lambda_k)=\dfrac{1}{(p-1)p^{k-1}}$

A を $Z[\zeta_1]$ を含む $\tilde{A}$ の部分環，K を A の分数体，$A_0=A/(\lambda)$ とする．

$i=\sum_{k=0}^{\infty}i_kp^k\in Z_p$ に対して

$$\zeta^i_{r+1}=\zeta^{i_0+i_1p+i_2p^2+\ldots+i_rp^r}_{r+1}$$

と定義する．多項式の族 $F=(F_r(T))_{0<r\leqq n-1}$：

$$F_r(T)=F_r(T_0,T_1,\ldots,T_{r-1})\in A[T_0,T_1,\ldots,T_{r-1}]$$

に対して

$$\omega^F_r(i)=\beta^F_r(\zeta^i_1,\ldots,\zeta^i_r)$$

とおく．このとき，

(1) $\omega^F_r(i)=\omega^F_r(j)\ \Leftrightarrow\ i\equiv j\ \mathrm{mod.}\ p^{r+1}$;

(2) $\alpha^F_r(\omega^F_0(i),\omega^F_1(i),\ldots,\omega^F_r(i))=\zeta^i_{r+1}$;

(3) $\Lambda_r^F(\omega_0^F(i),\ldots,\omega_r^F(i),\omega_0^F(i),\ldots,\omega_r^F(i)) = \omega_r^F(i+j)$;

が成立する．さらに，各 r に対して $F_r(0) = F_r(0,\ldots,0) = 1$ なら，

(4) $\omega_r^F(0) = 0$;

(5) $\omega_r^F(p^r) = 1$, $\omega_r^F(p^m) = 0 \quad (m > r)$

が成立する．

命題 3.4.1. 各 $r \geqq 0$ に対して各 $r \geqq 0$ に対して

(0) $F_r(0) = F_r(0,\ldots,0) = 1$;

(I) $F_r(X)F_r(Y) \equiv F_r(\Lambda_0^F(X,Y),\ldots,\Lambda_{r-1}^F(X,Y)) \mod . \lambda$

(II) $F_r(\omega_0^F(1),\omega_1^F(1),\ldots,\omega_r^F(1)) \equiv \zeta_{r+1} \mod . \lambda$

が成立すると仮定する．このとき，$i \mapsto (\omega_0^F(i),\omega_1^F(i),\ldots,\omega_{n-1}^F(i))$ は単射 ω: $Z/p^n \to W_n^F$ を誘導する．さらに，各 $r \geqq 0$ に対して

(III) $F_r(0,\ldots,0,T) \mod . \lambda$ は次数 $\leqq p-1$

が成立すれば，各 W_{r,A_0}^F は W_{r,A_0} に同型．

実際，$\lambda \mid c_r^p$ を満たす $c_r \in A$ が存在して

$$F_r(0,\ldots,0,T) \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(c_r T)^i}{i!} \mod . \lambda$$

となる．ここで，

$$F_r(0,\ldots,0,1) = F_r(\omega_0^F(p^{r-1}),\ldots,\omega_{r-2}^F(p^{r-1}),\omega_{r-1}^F(p^{r-1}))$$
$$\equiv \zeta_{r+1}^{p^{r-1}} = \zeta_2 \mod . \lambda$$

したがって，

$$c_r \equiv \zeta_2 - 1 \mod . \lambda$$

これから，$\dfrac{c_r^p}{\lambda}$ は A_0 で可逆．

さらに，$\widetilde{h}_n: W_{n,A_0}^F \xrightarrow{\sim} W_{n,A_0}$ を 3.3.1 で構成した同型とする．各 a_j を適宜取り替えることによって，

$$T_0 \mapsto h_0(T) = T_0,$$
$$T_j \mapsto h_r(T) = a_r(T_0,\ldots,T_{r-1})T_r + b_r(T_0,\ldots,T_{r-1}),$$
$$a_r(0) \equiv a_r \mod . \lambda,\quad b_r(0) \equiv 0 \mod . \lambda,$$
$$h_j(\omega^F(1)) \equiv 0 \mod . \lambda \quad (j \geqq 1)$$

の形に構成できる．

実際，

$$h_1(\omega^F(1)) \equiv \ldots \equiv h_{r-2}(\omega^F(1)) \equiv 0 \bmod. \lambda$$

と仮定すれば，$W_r(A_0)$ において

$$\tilde{h}_r(\omega^F(1)) = (1, 0, \ldots, 0, h_{r-1}(\omega^F(1)))$$

したがって，$\tilde{h}_r(\omega^F(1))$ は $W_r(A_0)$ において可逆．a_r を $\tilde{h}_r(\omega^F(1))^{-1}a_r$ で置き換えればよい．

定理 3.5．多項式の族 $F = (F_r(T))_{r\geq 0}$：

$$F_r(T) = F_r(T_0, \ldots, T_{r-1}) \in Z_{(p)}[\zeta_{r+1}][T_0, \ldots, T_{r-1}]$$

が存在して，各 r に対して

(O) $F_r(0, \ldots, 0) = 1$;

(I) $F_r(X)F_r(Y) \equiv F_r(\Lambda_0^F(X,Y), \ldots, \Lambda_{r-1}^F(X,Y)) \bmod. \lambda$;

(II) $F(\omega_0^F(1), \omega_1^F(1), \ldots, \omega_r^F(1)) \equiv \zeta_{r+1} \bmod. \lambda$;

(III) $F_r(0, \ldots, 0, T) \bmod. \lambda$ は次数 $\leqq p-1$

となる．

帰納的に $F_r(T) = F_r(T_0, \ldots, T_{r-1})$ を定義する．

$L_p(1+U)$ を $E_p(U)$ の逆級数とし，各 $r \geqq 1$ に対して

$$\eta_r = L(\zeta_r) = L_p(1+\lambda_r) \in Z_p[\zeta_r]$$

とおく．このとき，，$Z_p[\zeta_r]$ において $(\eta_r) = (\lambda_r)$，また，$E_p(\eta_r) = \zeta_r$，さらに，

(1) $\lambda_{r+1}^p \equiv \lambda_r \bmod. p$;

(2) $\eta_{r+1}^{p^r} \equiv \lambda_1 \bmod. p$

$F_1(T), F_2(T), \ldots, F_{r-1}(T)$ を (O), (I), (II), (III) を満たす多項式の族とする．

このとき，

$$T_0 \mapsto h_0(T) = T_0,$$

$$T_j \mapsto h_j(T) = a_j(T_0, \ldots, T_{j-1})T_j + b_j(T_0, \ldots, T_{j-1}) \quad (j \geqq 1),$$

$$a_j(0) \equiv a_j \bmod. \lambda, \quad b_j(0) \equiv 0 \bmod. \lambda,$$

$$h_j(\omega^F(1)) \equiv 0 \text{ mod. } \lambda \quad (1 \leqq j \leqq r-1)$$

の形をしている同型 $\tilde{h}_r : W^F_{r, A_0} \xrightarrow{\sim} W_{r, A_0}$ が存在する．

$$\tilde{F}_r(T) = \tilde{F}_r(T_0, T_1, \ldots, T_{r-1}) =$$
$$\prod_{j=0}^{r-1} E_p(\eta^{p^j}_{r+1} h_j(T)) \in Z_p[\zeta_{r+1}][[T_0, T_1, \ldots, T_{r-1}]]$$

とおき，

$$F_r(T) = F_r(T_0, T_1, \ldots, T_{r-1}) \in Z_{(p)}[\zeta_{r+1}][T_0, T_1, \ldots, T_{r-1}]$$

を

$$F_r(O) = 1;$$
$$F_r(T) \equiv \tilde{F}_r(T) \text{ mod. } \lambda$$

となるように選ぶ．このとき，$F = (F_1(T), F_2(T), \ldots, F_r(T))$ は (I)，(II)，(III) を満たす．

(I) の証明

$\eta^{p^r}_{r+1} \equiv 0$ mod. λ なので，$U \mapsto \prod_{j=0}^{r-1} E_p(\eta^{p^j}_{r+1} T)$ は準同型 $W_{r, A_0} \to G_{m, A_0}$ を定義する．したがって，$U \mapsto F_r(T) = \prod_{j=0}^{r-1} E_p(\eta^{p^j}_{r+1} h_j(T))$ は準同型 $W^F_{r, A_0} \to G_{m, A_0}$ を定義する．

(II) の証明

$h_0(T) = T_0$ なので，

$$h_0(\omega^F(1)) = \omega^F_0(1) = 1$$

したがって，

$$E_p(\eta_{r+1} h_0(\omega^F(1))) = E_p(\eta_{r+1}) \equiv \zeta_{r+1} \text{ mod. } \lambda$$

さらに，$1 \leqq j \leqq r-1$ なら，

$$h_j(\omega^F(1)) \equiv 0 \text{ mod. } \lambda$$

なので，

$$E_p(\eta^{p^j}_{r+1} h_0(\omega^F(1)) \equiv E_p(0) = 1 \text{ mod. } \lambda$$

したがって，

$$\tilde{F}_r(\omega^F(1)) = \prod_{j=0}^{r-1} E_p(\eta^{p^j}_{r+1} h_j(\omega^F(1)) \equiv \zeta_{r+1} \text{ mod. } \lambda$$

したがって,

$$F_r(\omega^{F}(1)) \equiv \zeta_n \mod. \lambda$$

(III)の証明

$j \leqq r-2$ なら,

$$h_j(0) \equiv 0 \mod \lambda$$

なので,

$$E_p(\eta_{r+1}^{p^j} h_j(0)) \equiv 1 \mod \lambda$$

一方,

$$h_{r-1}(0, \ldots, 0, T) \equiv a_{r-1}T \mod \lambda,$$

なので,

$$E_p(\eta_{r+1}^{p^r} h_{r-1}(0)) \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(\eta_{r+1}^{p^r} a_{r-1}T)^i}{i!} \mod \lambda$$

3.6. $\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_n^{F}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{W}_n/(Z/p^n)$ とおく.このとき,多項式の族 $G = (G_r(T))_{r \geqq 0}$:

$$G_r(T) = G_r(T_0, \ldots, T_{r-1}) \in Z_{(p)}[\zeta_{r+1}][T_0, \ldots, T_{r-1}]$$

が存在して,

$$\mathcal{V}_n = \mathrm{Spec}\, A[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \alpha_0^G(T)^{-1}, \alpha_1^G(T)^{-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^G(T)^{-1}]$$

で,

$$(T_0, T_1 \ldots, T_{r-1}) \mapsto (\Lambda_0^G(T\otimes 1, 1\otimes T), \Lambda_1^G(T\otimes 1, 1\otimes T), \ldots, \Lambda_{n-1}^G(T\otimes 1, 1\otimes T))$$

によって乗法が定義される.ここで,

$$\alpha_r^G(T) = \alpha_r^G(T_0, \ldots, T_r) = \lambda^p T_r + G_r(T_0, \ldots, T_{r-1})$$

とおき,

$$\Lambda_r^G(X, Y) = \Lambda_r^G(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_r) \in K[X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_r]$$

を帰納的に

$$\Lambda_0^G(X_0, Y_0) = \lambda^p X_0 Y_0 + X_0 + Y_0,$$

$$\Lambda_r^G(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_r) = \lambda^p X_r Y_r + X_r + Y_r$$
$$+ \frac{1}{\lambda^p}[G_r(X)G_r(Y) - G_r(\Lambda_0^G(X, Y), \ldots, \Lambda_{r-1}^G(X, Y))] \quad (r \geqq 1)$$

によって定義する.各 $r > 0$ に対して

$$G_r(X)G_r(Y) \equiv G_r(\Lambda_0^F(X,Y), \ldots, \Lambda_{r-1}^F(X,Y)) \mod . \lambda^p$$

が成立する.

準同型 $\Psi: \mathcal{W}_n \to \mathcal{V}_n$ は

$$(T_0, T_1 \ldots, T_{n-1}) \mapsto (\Psi_0(T), \Psi_1(T), \ldots, \Psi_{n-1}(T))$$

によって定義される. ここで,

$$\lambda^p \Psi_0(T_0) = (\lambda T_0 + 1)^p$$

を, また, 各 $r \geqq 1$ に対して

$$\lambda^p \Psi_r(T) + G_r(\Psi_0(T), \Psi_1(T), \ldots, \Psi_{r-1}(T)) = \left\{\lambda T_{r-1} + F_{r-1}(T)\right\}^{-1} \left\{\lambda T_r + F_r(T)\right\}^p$$

が成立する.

また, 準同型 $\alpha^G: \mathcal{V} \to (G_{m,A})^n$ を

$$(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}) \mapsto (\alpha_0^G(T), \alpha_1^G(T), \ldots, \alpha_{n-1}^G(T)):$$

$$A[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \alpha_0^G(T)^{-1}, \alpha_1^G(T)^{-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^G(T)^{-1}] \to A[U_0, \ldots, U_{n-1}, U_0^{-1}, \ldots, U_{n-1}^{-1}],$$

$$\alpha_0^G(T) = \alpha_r^G(T_0) = \lambda^p T_r + 1,$$

$$\alpha_r^G(T) = \alpha_r^G(T_0, \ldots, T_r) = \lambda^p T_r + G_r(T_0, \ldots, T_{r-1}) \quad (r \geqq 1)$$

によって定義すれば, $Z_{(p)}[\zeta_n]$ の上の group scheme の完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z/p^n & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{W} & \xrightarrow{\Psi_n} & \mathcal{V} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \alpha^F & & \downarrow \alpha^G & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_{p^n,A} & \longrightarrow & (G_{m,A})^n & \xrightarrow{\Theta} & (G_{m,A})^n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る.

3.7. (局所環に対する Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論) B を局所 A-代数, C を B の不分岐 p^n 次巡回拡大とする. このとき, $\mathcal{V}_{n,B}$ の B-有理点 $\mathrm{Spec}B \to \mathcal{V}_{n,B}$ が存在して

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}C & \longrightarrow & \mathcal{W}_{n,B} \\ \downarrow & & \downarrow \Psi_n \\ \mathrm{Spec}B & \longrightarrow & \mathcal{V}_{n,B} \end{array}$$

が cartesian となる. 別の言い方をすれば, $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathcal{V}_n(B)$ が存在して $C = B[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}]$ となる. ここで,

$$\Psi_0(\xi_0)=a_0,\ \Psi_1(\xi_0,\xi_1)=a_1,\ \ldots,\ \Psi_{n-1}(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})=a_{n-1}$$

さらに，$Z/p^n=\mathrm{Gal}(C/B)$ は

$$(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\mapsto$$
$$(\Lambda_0^G(\xi_0,1),\Lambda_1^G(\xi_0,\xi_1,1,0),\ldots,\Lambda_{n-1}^G(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},1,0,\ldots,0))$$

によって生成される．

例 3.8．p^2 次の場合

$$\lambda=\lambda_1=\zeta_1-1,$$
$$\lambda_2=\zeta_2-1,$$
$$\eta=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\lambda_2^k,$$
$$\tilde{\eta}=\frac{\lambda^{p-1}}{p}(p\eta-\lambda),$$
$$F_1(T)=F(T)=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(\eta T)^k}{k!},$$
$$G_1(T)=G(T)=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(\tilde{\eta}T)^k}{k!},$$
$$\Lambda_0^F(X_0,Y_0)=\lambda X_0Y_0+X_0+Y_0,$$
$$\Lambda_1^F(X_0,X_1,Y_0,Y_1)=\lambda X_1Y_1+X_1+Y_1+\frac{1}{\lambda}[F(X)F(Y)-F(\lambda X_1Y_1+X_1+Y_1)],$$
$$\Lambda_0^G(X_0,Y_0)=\lambda^pX_0Y_0+X_0+Y_0,$$
$$\Lambda_1^G(X_0,X_1,Y_0,Y_1)=\lambda^pX_1Y_1+X_1+Y_1+\frac{1}{\lambda^p}[G(X)G(Y)-G(\lambda^pX_1Y_1+X_1+Y_1)],$$
$$\Psi_0(X)=\frac{(\lambda X+1)^p-1}{\lambda^p},$$
$$\Psi_1(X)=\frac{1}{\lambda^p}\left[\frac{\{\lambda T_1+F(T_0)\}^p}{\lambda T_0+1}-G\left(\frac{(\lambda X+1)^p-1}{\lambda^p}\right)\right],$$
$$\mathcal{W}_2=\mathrm{Spec}A[T_0,T_1,1/(\lambda T_0+1),1/(\lambda T_1+F(T_0))],$$
$$\mathcal{V}_2=\mathrm{Spec}A[T_0,T_1,1/(\lambda^pT_0+1),1/(\lambda^pT_1+G(T_0))]$$

註 3.9. 離散付値環の上の，特に generic fiber が of multiplicative type で closed fiber が unipotent であるような，affine group scheme はそれ自体興味深い対象であるが，これについては Waterhouse，Weisfeiler による研究 [13]，[12]，および，関口，諏訪による研究 [1]，[3]，[4] がある。

References

[1] T. Sekiguchi - On the deformation of Witt groups to tori II. J. Algebra 138 (1991) 273-297

[2] T. Sekiguchi, F. Oort, N. Suwa - On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Ann. Scient. Ec. Normale Sup. 22 (1989) 345-375

[3] T. Sekiguchi, N. Suwa - A cace of extensions of group schemes over a discrete valuation ring - Tsukuba J. Math 14 (1990) 459-487

[4] T. Sekiguchi, N. Suwa - Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 38 (1991) 1-45; II. Bull. Fac. Sci. Eng. Chuo Univ. 32 (1989) 17-35

[5] T. Sekiguchi, N. Suwa - Théorie de Kummer-Artin-Schreier. C. R.Acad. Sci. Paris 312 (1991) 417-420

[6] T. Sekiguchi, N. Suwa - Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt. C.R.Acad. Sci. Paris 319 (1994) 105-110

[7] T. Sekiguchi, N. Suwa - On the unified Kummer-Artin-Schreier-Witt theory. Preprint Series Chuo University, Chuo Math 41 (1994)

[8] T. Sekiguchi, N. Suwa - Théorie de Kummer-Artin et applications. (to appear in Proceedings of Journées

Arithmétiques Bordeaux 1993)

[9] T. Sekiguchi, N. Suwa - On the structure of the group scheme $Z[Z/p^n]^\times$. Compositio Math. 97 (1995) 253-271

[10] J. P. Serre - Groupes algébriques et corps de classes. Hermann, 1959

[11] W. C. Waterhouse - A unified Kummer-Artin-Schreier sequence. Math. Ann. 277 (1987) 447-451

[12] W. C. Waterhouse, B. Weisfeiler - One-dimensional affine group schemes. J. Algebra 66 (1980) 550-569

[13] B. Weisfeiler - On a case of extensions of group schemes. Trans. Amer. Math. Soc. 248 (1979) 171-189

[DM] M. Demazure, P. Gabriel - Groupes algébriques I. Masson-North Holland, 1970