数理解析研究所講究録
945巻 1996年 173-176

ファジイ数の空間に値をとる写像に関する凸解析

創価大学工学部　古川長太
Nagata FURUKAWA

ファジイ数の空間は、ファジイ数間の通常の演算に関して線形空間とはならない。ファジイ数を仮想的なファジイ数にまで拡張して線形演算を導入する方法もあるが、ここではそのような方法をとらない。写像の凸性は fuzzy max order によって定義し、連続性と片側方向微分をファジイ数間の通常の減法を使わずに、新たに定義する。さらに写像の値域が型関数で生成される場合について、それらの定義から導かれる写像の諸性質について論じる。

$\mathbf{F}_c(\mathbf{R})$: $\mathbf{R}$上で 定義された正規凸ファジイ集合でそのメンバシップ関数がcompact support をもち、かつメンバシップ関数に最大値1を与える点が一意であるものの全体。

$\mathbf{F}_{LR}$: $\mathbf{F}_c(\mathbf{R})$の元で型関数 L, R で生成されるものの全体。

$\mathbf{F}_L$: $\mathbf{F}_c(\mathbf{R})$の元で型関数 L で生成されて左右対称なものの全体。

以下 X は実線形ノルム空間、Ω はXの空でない凸部分集合とする。

<u>定　義 1</u>　F をΩから$\mathbf{F}_c(\mathbf{R})$ への写像とする。このときF がΩ上で凸であるとは、次のことが成り立つことをいう。

$$\begin{bmatrix} \forall x, \forall y \in \Omega, \ 0<\forall\lambda<1, \\ F(\lambda x+(1-\lambda)y) \preceq (\lambda F(x)) \oplus ((1-\lambda)F(y)) \end{bmatrix}$$

ここに $\preceq$ は fuzzy max order による大小関係、正のスカラー倍と $\oplus$ は拡張原理に基づくもの。

<u>定　理 1</u>　$F:\Omega \to \mathbf{F}_{LR}$ とし、その parameter 表現を

$$F(x) = \big(m(x), \beta(x), \gamma(x)\big)_{LR}, \qquad x \in \Omega,$$
$$\beta(x) \ge 0, \ \gamma(x) \ge 0, \qquad x \in \Omega,$$

とする。このとき次のことが成立。

$$F \text{ is convex on } \Omega \iff \begin{bmatrix} \text{(i)} & m(\cdot) \text{ is convex on } \Omega \text{ in the usual sense.} \\ \text{(ii)} & \forall x, \forall y \in \Omega, 0<\forall\lambda<1, \\ & t_0^L\{\lambda\beta(x)+(1-\lambda)\beta(y)-\beta(\lambda x+(1-\lambda)y)\} \\ & \qquad \le \lambda m(x)+(1-\lambda)m(y)-m(\lambda x+(1-\lambda)y), \\ \text{(iii)} & \forall x, \forall y \in \Omega, 0<\forall\lambda<1, \\ & t_0^R\{\gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda\gamma(x)-(1-\lambda)\gamma(y)\} \\ & \qquad \le \lambda m(x)+(1-\lambda)m(y)-m(\lambda x+(1-\lambda)y). \end{bmatrix}$$

<u>系 1</u>　$F:\Omega \to \mathbf{F}_L$　とし、その parameter 表現を

$$F(x) = \big(m(x), \beta(x)\big)_L, \qquad x \in \Omega,$$
$$\beta(x) \geq 0, \qquad x \in \Omega,$$

とする。このとき次のことが成立。

$$F \text{ is convex on } \Omega \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(i) } m(\cdot) \text{ is convex on } \Omega \text{ in the usual sense.} \\ \text{(ii) } \forall x, \forall y \in \Omega, 0 < \forall \lambda < 1, \\ \quad t_0^L \left| \lambda \beta(x) + (1-\lambda)\beta(y) - \beta(\lambda x + (1-\lambda) y) \right| \\ \qquad \leq \lambda m(x) + (1-\lambda) m(y) - m(\lambda x + (1-\lambda) y). \end{array}\right]$$

命　題 1　$\mathbf{F}_c(\mathbf{R})$ の元 A のメンバシップ関数を μ_A とおく。任意の実数 c に対して $A \oplus c$ のメンバシップ関数は次式で与えられる。

$$\mu_{A \oplus c}(t) = \mu_A(t - c), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

定　義 2　U を X の開部分集合、$F: U \to \mathbf{F}_c(\mathbf{R})$, x_0 を U の点とする。このとき

$$F \text{ is } \textbf{continuous at } x_0 \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \text{ open nbd } V(x_0) \text{ of } x_0 \\ \text{s.t. } F(x_0) - \varepsilon \preceq F(x) \preceq F(x_0) + \varepsilon \quad \forall x \in V(x_0) \end{array}\right]$$

命　題 2

$$F: U \to \mathbf{F}_{LR}$$
$$F(x) = \big(m(x), \beta(x), \gamma(x)\big)_{LR}, \qquad x \in U,$$
$$\beta(x) \geq 0, \ \gamma(x) \geq 0, \qquad x \in U,$$

とする。このとき F が x_0 において連続ならば、$m(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot)$ はすべて x_0 において連続である。

定　義 3　U, F, x_0 を定義 2 と同じとする。このとき

$$F \text{ が } x_0 \text{ のある近傍で上方に有界} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \exists \text{open nbd } V(x_0) \text{ of } x_0, \ \exists M > 0 \\ \text{s.t.} \quad F(x) \preceq M \quad \forall x \in V(x_0) \end{array}\right]$$

$$F \text{ が } x_0 \text{ のある近傍で有界} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \exists \text{open nbd } V(x_0) \text{ of } x_0, \ \exists M > 0 \\ \text{s.t.} \quad -M \preceq F(x) \preceq M \quad \forall x \in V(x_0) \end{array}\right]$$

命　題 3　U を X の開凸部分集合、F を $U \to \mathbf{F}_c(\mathbf{R})$ へのconvex mapping とする。このとき F が x_0 のある近傍で上方に有界ならば、F は x_0 のある近傍で有界である。

定 義 4　U を X の開部分集合、$F: U \to \mathbf{F}_c(\mathbf{R})$ とする。このとき F が U 上で局所リプシッツ連続であるとは、U の各点 x_0 に対して x_0 の開近傍 $V(x_0)$ と正数 $\mathrm{M} = \mathrm{M}(x_0)$ が存在して次式が成り立つことをいう。

$$F(x_2) - M\|x_1 - x_2\| \preceq F(x_1) \preceq F(x_2) + M\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, \forall x_2 \in V(x_0).$$

定 理 2　U を X の開部分集合、$F: U \to \mathbf{F}_c(\mathbf{R})$ への convex mapping とする。U の各点 x_0 に対して F が x_0 のある近傍で上方に有界ならば、F は U 上で局所リプシッツ連続である。

系 2　U を $\mathbf{R}^n$ の開部分集合、$F: U \to \mathbf{F}_c(\mathbf{R})$ への convex mapping とする。このとき F は U 上で局所リプシッツ連続である。

定 義 5　U を X の開部分集合、$F: U \to \mathbf{F}_c(\mathbf{R})$ とし、$z \in U, h \in X$ とする。各 $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$\eta(\alpha) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\inf[F(z+\lambda h)_\alpha] - \inf[F(z)_\alpha]}{\lambda},$$
$$\xi(\alpha) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\sup[F(z+\lambda h)_\alpha] - \sup[F(z)_\alpha]}{\lambda},$$

が有限値として存在するものとし、かつ $\eta(\alpha), \xi(\alpha)$ はいずれも $[0,1]$ 上で連続とする。

$$\left.\begin{aligned} i(\alpha) &= \mathrm{Min}\{\eta(\alpha), \xi(\alpha)\} \\ s(\alpha) &= \mathrm{Max}\{\eta(\alpha), \xi(\alpha)\} \end{aligned}\right\} \quad \alpha \in [0, 1],$$

とおく。

(i) $[0,1]$ 上で $i(\alpha)$ が単調非減少、$s(\alpha)$ が単調非増加のとき：
$f; \mathbf{R} \to [0,1]$ を次式で定義する。すなわち各 t に対し

$$f(t) = \begin{cases} \max\{\alpha \in [0,1] \mid i(\alpha) = t\} & \text{if} \quad i(0) \le t \le i(1)\ (= s(1)), \\ \max\{\alpha \in [0,1] \mid s(\alpha) = t\} & \text{if} \quad s(1) \le t \le s(0), \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise}, \end{cases}$$

f をメンバシップ関数とするファジイ数を F の z における h 方向の片側方向微分とよび、$F(z; h)$ で表す。

(ii) $[0,1]$ 上で $i(\alpha)$ と $s(\alpha)$ が共に単調非減少のとき；
$g, k\ ; \mathbf{R} \to [0,1]$ を次式で定義する。すなわち各 t に対し

$$g(t) = \begin{cases} \max\{\alpha \in [0,1] \mid i(\alpha) = t\} & \text{if} \quad i(0) \le t \le i(1), \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise}. \end{cases}$$

$$k(t) = \begin{cases} \min\{\alpha \in [0,1] \mid s(\alpha) = t\} & \text{if} \quad s(0) \le t \le s(1), \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

R 上で区間値写像 H を次式で定義する。すなわち各 t に対し

$$H(t) = \begin{cases} [0,\ g(t)] & \text{if} \quad i(0) \le t \le s(0), \\ [k(t),\ g(t)] & \text{if} \quad s(0) < t \le s(1), \\ \{0\} & \text{if} \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

区間値写像 H を F の z における h 方向の**広義片側方向微分**とよぶ。

(iii)　$[0,1]$ 上で $i(\alpha)$ と $s(\alpha)$ が共に単調非増加のとき；

p, q ; **R** $\to [0,1]$ を次式で定義する。すなわち各 t に対し

$$p(t) = \begin{cases} \min\{\alpha \in [0,1] \mid i(\alpha) = t\} & \text{if} \quad i(1) \le t \le i(0), \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} \max\{\alpha \in [0,1] \mid s(\alpha) = t\} & \text{if} \quad s(1) \le t \le s(0), \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

R 上で区間値写像 J を次式で定義する。すなわち各 t に対し

$$J(t) = \begin{cases} [p(t),\ q(t)] & \text{if} \quad i(1) \le t \le i(0), \\ [0,\ q(t)] & \text{if} \quad i(0) < t \le s(0), \\ \{0\} & \text{if} \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

区間値写像 J を F の z における h 方向の**広義片側方向微分**とよぶ。

定　理 3　U を X の開凸部分集合、$F: U \to \mathbf{F}_{LR}$ への convex mapping とする。F のパラメータ表現を

$$F(x) = \big(m(x), \beta(x), \gamma(x)\big)_{LR}, \qquad x \in \Omega,$$
$$\beta(x) \ge 0,\ \gamma(x) \ge 0, \qquad x \in \Omega.$$

とする。このとき次のことが成立する。

(i)　$m(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot)$ はいずれも、U のすべての点においてあらゆる方向に通常の意味で片側方向微分可能である。

(ii)　$\beta'(z;h) \ge 0,\ \gamma'(z;h) \ge 0$ ならば、F は z において h 方向に片側方向微分可能であって、

$$F'(z;h) = \big(m'(z;h), \beta'(z;h), \gamma'(z;h)\big)_{LR} \quad \text{a.e.}$$

(iii)　$\beta'(z;h) < 0,\ \gamma'(z;h) < 0$ ならば、F は z において h 方向に片側方向微分可能であって、

$$F'(z;h) = \big(m'(z;h), -\gamma'(z;h), -\beta'(z;h)\big)_{RL} \quad \text{a.e.}$$

(iv)　$\beta'(z;h)$ と $\gamma'(z;h)$ が異符号のときは、F は z において h 方向に広義片側方向微分可能である。