数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 125-132

Two-Sheeted Disc の有界正則関数による点分離

山口大・理　加藤　崇雄 (Takao KATO)

北大・理　　林　実樹廣 (Mikihiro HAYASHI)

1. 単位開円板 $\Delta : |z| < 1$ の unlimitted な 2 葉の被覆面$\widetilde{\Delta}$を考える. $\pi : \widetilde{\Delta} \to \Delta$をその被覆写像, 分岐はちょうど点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_n \in \Delta, |a_n| \to 1)$ 上にあるものとしする. このとき, $\widetilde{\Delta}$ 上の有界正則関数全体 $H^\infty(\widetilde{\Delta})$ が$\widetilde{\Delta}$ の点を分離する, すなわち,

任意の異なる 2 点 $a, b \in \widetilde{\Delta}$ に対して, ある $f \in H^\infty(\widetilde{\Delta})$ が存在して $f(a) \neq f(b)$

となるための必要十分条件は, Blaschke の収束条件$\sum(1-|a_n|) < \infty$ を満たすことである ([4]). 以下,

$$\sum(1-|a_n|) = \infty$$

とする. このとき, $H^\infty(\widetilde{\Delta})$ は $\widetilde{\Delta}$ の点を分離しないが, 点 a_nを中心とする半径 r_nの閉小円板$\Delta_n = \bar{\Delta}(a_n, r_n)$ を互いに交わらないように取り,

$$\widetilde{D} = \pi^{-1}(D), \quad D = \Delta \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

とおくと, $H^\infty(\widetilde{D})$ は$\widetilde{D}$の点を分離するようになることがある. ([1],[2]). 特に, [2] では以下の定理 A, B を示している.

［定理 **A**］　$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ のとき,

(1) $\eta_n > 0, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_n} < \infty, r_n \leq (\tfrac{1}{n})^{\eta_n}$ ならば $H^\infty(\widetilde{D})$ は点非分離である.

(2) Δ_{2n-1} と Δ_{2n} がほとんど接するほど状態にとれ, こうすることで, 点分離にできる.

［定理 B］　$a_{nj} = (1-2^{-n})e^{2\pi i j 2^{-n}}$ $(0 \le j < 2^n)$ のとき,

(1) $\eta_n > 0, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_n} < \infty$, $r_n \le 2^{-\eta_n}$ ならば $H^\infty(\widetilde{D})$ は点非分離である.

(2) Δ_{nj} と $\Delta_{n+1,2j}$ がほとんど接するように対が作れ, こうすることで, 点分離にできる.

上の定理 A, B は, 半径 r_nが小さいと点非分離となり, 大きいと点分離になることを示している. しかし, (1) と (2) に述べられた条件 (仮定) の間の差は大きく, これらがどの程度良い条件なのか分からなかった. 本講演では, 次の主定理 ([3]) にあるように, 上の (1) の条件を改良することで, (2) の条件がある (弱い) 意味で best possible であることを示す.

［主定理］　$\sigma > 0$ を定数として, 上記の記号の基で,

(a) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $r_n = e^{-\sigma n^p}$ とする. $0 < p \le 1$ ならば $H^\infty(\widetilde{D})$ は点分離であり, $p > 1$ ならば点非分離. 但, Δ_nは互いに交わらないものとする (σが大きければよい).

(b) $a_{nj} = (1-2^{-n})e^{2\pi i j 2^{-n}}$ $(n \in \mathbf{N}, 0 \le j < 2^n)$, $r_{nj} = \sigma 2^{-n^p}$ とする. $p = 1$ ならば $H^\infty(\widetilde{D})$ は点分離であり, $p > 1$ ならば点非分離. 但, Δ_{nj}は互いに交わらないものとする (σが小さければよい).

この定理で "点非分離" の部分はそれぞれ定理 A(1), 定理 B(1) から従う. 主定理 (a) の "点分離" の証明の概略を次節で述べ, (b) については次々節で述べる.

尚, この問題の完全な答えを得るために, 点分離となるための必要十分条件を求めたいところである. しかし, これまで知られている例や, Blaschke の収束条件を満たす分岐点部分列は除外して考えてよいことなどを考え合わせると, 必要十分条件を意味のある形で求めることは難しいと思われる.

2. はじめに次の補題を示す.

[補題 1]　$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ のとき,

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{z - a_{4n-3}}{z - a_{4n-2}} \frac{z - a_{4n}}{z - a_{4n-1}}$$

とおく. $\liminf_{n\to\infty} n^2 r_n > 0$ ならば, 関数 $P(z)$ は領域 $D' = (\mathbf{C} \cup \{\infty\}) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ で有界である.

証明　$\liminf_{n\to\infty} n^2 r_n > \sigma > 0$ なる正数σをとる. $P(z)$ の有界性を示すには, はじめの有限個の P_nは無視してよく, また, Dをより大きな領域に置き換えて示せば十分であるから, 簡単のため, $r_n = \frac{\sigma}{n^2}$ として示せばよい. $|z - a_k| = r_k$ $(k = 4m-2, 4m-1)$ 上で $\prod_{n=1}^{\infty} |P_n|$ を評価する. $x \leq e^{x-1}$ より, $\sum_{n=1}^{\infty} |P_n - 1|$ を評価すればよい.

次の等式が成り立つ:

$$P_n(z) - 1 = \frac{8n-3}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)2n} \frac{z - \frac{8n-4}{8n-3}}{(z - \frac{4n-3}{4n-2})(z - \frac{4n-2}{4n-1})}$$

$m < n$ のとき: $\ell = n - m$ とおく.

$$|z - a_{4n-1}| > |z - a_{4n-2}| > |a_{4m} - a_{4n-2}| = \frac{4n-4m-2}{4m(4n-2)}$$

$$\left| z - \frac{8n-4}{8n-3} \right| < \left| a_{4m-3} - \frac{8n-4}{8n-3} \right| = \frac{4(2n-m)}{(4m-3)(8n-3)}$$

よって,

$$\begin{aligned} |P_n(z) - 1| &\leq \frac{8n-3}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)2n} \frac{\frac{4(2n-m)}{(4m-3)(8n-3)}}{\{\frac{4n-4m-2}{4m(4n-2)}\}^2} \\ &= \frac{2^6(2n-m)m^2(4n-2)}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)n(4n-4m-2)^2(4m-3)} \\ &\leq C_1 \frac{1}{\ell^2} \end{aligned}$$

従って,

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |P_n(z) - 1| \leq C_1 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} = M_1$$

$m=n$ のとき: 容易に, $|P_n(z)| \le \frac{M_2}{\sigma}$ (M_2 は n, σ に無関係) が分かる.

$m>n$ のとき:

$$|z-a_{4n-2}| > |z-a_{4n-1}| > |a_{4m-3}-a_{4n-1}| = \frac{4m-4n-2}{(4m-3)(4n-1)}$$
$$|z-\frac{8n-4}{8n-3}| < |a_{4m}-\frac{8n-4}{8n-3}| = \frac{|8n-4m+3|}{4m(8n-3)}$$

よって,

$$\begin{aligned}
|P_n(z)-1| &\le \frac{8n-3}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)2n}\frac{\frac{|8n-4m+3|}{4m(8n-3)}}{\{\frac{4m-4n-2}{(4m-3)(4n-1)}\}^2} \\
&= \frac{|8n-4m+3|(4m-3)^2(4n-1)}{(4n-3)(4n-2)2n4m(4m-4n-2)^2} \\
&\le C_2\frac{(4m-2)^2}{(4n)^2(4m-2-4n)^2}
\end{aligned}$$

従って, $p=4m-2$ とおいて

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m-1}|P_n(z)-1| &\le C_2\sum_{\ell=1}^{p-1}\frac{p^2}{\ell^2(p-n)^2} \\
&\le C_2\Big(\sum_{\ell<p/2}\frac{p^2}{\ell^2(p/2)^2}+\sum_{p/2\le\ell<p}\frac{p^2}{(p/2)^2(p-n)^2}\Big) \\
&\le 2C_2\cdot\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{4}{\ell^2} \\
&= M_3
\end{aligned}$$

▯

主定理 (a)"点分離性" 部分の証明　$f(z)=P(z)e^{-\frac{\sigma'}{1-z}}$ とおく. 上の補題の $n=m$ の場合に,

$$|P_n(z)e^{-\frac{\sigma'}{1-z}}| \le \frac{M_2}{n^2 r_{4n-1}}e^{-\sigma'(4n-3)} = \frac{M_2}{n^2}e^{-4(\sigma'-\sigma)n+3\sigma'-\sigma}$$

となることが分かる. そこで, $\sigma'>\sigma$ ととれば, $f(z)$ は D で有界になり, $\sqrt{f(z)}\in H^\infty(\widetilde{D})$. 二つの関数 $\sqrt{f(z)}$, $z\circ\pi$ により $\widetilde{D}$ の点を分離する.　▯

[問題]　$r_n=(\frac{1}{n})^n=e^{-\frac{n}{\log n}}$ のとき, 点分離か?

3. 正数 $0<\rho<1$ と自然数 m, に対して, $\omega_m = e^{2\pi i/2m}$, $a_j = \rho\omega_m^j$ とおき,

$$P_m^\rho(z) = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a_{2j}}{|a_{2j}|}\frac{1-\overline{a}_{2j}z}{a_{2j}-z}\frac{|a_{2j+1}|}{a_{2j+1}}\frac{a_{2j+1}-z}{1-\overline{a}_{2j+1}z} = \frac{1-\rho^m z^m}{\rho^m - z^m}\frac{\rho^m + z^m}{1+\rho^m z^m}. \tag{3.1}$$

とおく. 次の等式が成り立つ:

$$P_m^\rho(z) - 1 = \frac{2(1-\rho^{2m})z^m}{(\rho^m - z^m)(1+\rho^m z^m)} \tag{3.2}$$

$$|P_m^\rho(z)|^2 - 1 = \frac{4(1-\rho^{2m})(1-|z|^{2m})\rho^m \Re z^m}{|\rho^m - z^m|^2|1+\rho^m z^m|^2}. \tag{3.3}$$

［**補題 2**］

(i) 正数 $0<\sigma<1$ に対して, 自然数 N_σ と正数 C_σ があって次が成り立つ: $\sigma \le |z| \le 1$, $m \ge N_\sigma$ なる, 任意の複素数 z と自然数 m について

$$C_\sigma < \left|1 - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| \le 4$$

(ii) $0<x<n$ のとき, 値 $(1-\frac{x}{n})^n$ は x について減少, n について増加である. とくに, $0<c\le x<n$ のとき, $(1-\frac{x}{n})^n \le e^{-c}$ が成り立つ.

証明 (i) は $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ が $|z|\le 1$ 上 e^z に z について一様収束することから従う. (ii) は容易に分かる. □

［**補題 3**］ $0<\sigma<1$, $0<\rho<1$, $\Delta_j = \{z : |z-a_j| \le \frac{\rho\sigma}{m}\}$ とする. 十分大きな自然数 N_σがあって, 次の不等式が成り立つ:

$$|P_m^\rho(z) - 1| \le \frac{2|z|^m}{(\rho^m - |z|^m)(1-|z|^m)} \qquad (\frac{1}{2} \le |z| < \rho) \tag{3.4}$$

$$|P_m^\rho(z)| \le \frac{8}{C_\sigma}\cdot\frac{1}{1-\rho^m} \qquad (m \ge N_\sigma,\ z \in \Delta \setminus \cup_{j=0}^{m-1}\Delta_{2j}) \tag{3.5}$$

$$||P_m^\rho(z)|^2 - 1| \le \frac{8(1-|z|^{2m})|\frac{\rho}{z}|^m}{(1-|\frac{\rho}{z}|^m)^2|1-\rho^m|} \qquad (\rho < |z| < 1) \tag{3.6}$$

証明 (3.4): 等式 (3.2) から,

$$|P_m^\rho(z)-1| \le \frac{2(1-\rho^{2m})|z|^m}{(\rho^m-|z|^m)(1-|z|^m)} \le \frac{2|z|^m}{(\rho^m-|z|^m)(1-|z|^m)}.$$

(3.5): $|z|=1$ 上で $|P_m^\rho(z)|=1$ であるから, 最大値原理により $\partial\Delta_j$, $(0\le j<m)$ 上で P_m^ρ を評価すればよい. 角度 ω だけ回転しても不変性があるので, $j=0$ の場合を考えれば十分. $z=\rho(1+\frac{\sigma}{m}e^{i\theta})$ として, 補題 2(i) を用いれば, 定義式 (3.1)

$$|P_m^\rho(z)| \le \frac{2}{\rho^m|1-(1+\frac{\sigma}{m}e^{i\theta})^m|}\cdot\frac{\rho^m|1+(1+\frac{\sigma}{m}e^{i\theta})^m|}{1-\rho^m} \le \frac{2\cdot 4}{c_\sigma}\cdot\frac{1}{1-\rho^m}$$

(3.6): 等式 (3.3) から

$$\begin{aligned}||P_m^\rho(z)|^2-1| &\le \frac{4(1-\rho^{2m})(1-|z|^{2m})\rho^m|\Re z^m|}{(|z^m|-\rho^m)^2(1-\rho^m)^2}\\ &\le \frac{4(1+\rho^m)(1-|z|^{2m})\rho^m|\frac{\varrho}{z}|^m}{(1-|\frac{\varrho}{z}|^m)^2(1-\rho^m)}\\ &\le \frac{8(1-|z|^{2m})|\frac{\varrho}{z}|^m}{(1-|\frac{\varrho}{z}|^m)^2|1-\rho^m|}.\end{aligned}$$

□

主定理 (b)“点分離性” 部分の証明 $\rho_n=1-2^{-n}$ とおく. 正数 σ を小さくとると, 閉円板

$$\Delta_{nj}=\{z:|z-a_{nj}|\le r_{nj}\},\quad r_{nj}=r_n=\frac{\sigma}{2^n},\quad a_{nj}=\rho_n\omega_{2^{-n}}^j$$

$(n=1,2,3,\ldots;\ 0\le j<2^n)$ は互いに交わらない. 有理関数の無限乗積

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\infty}P_n(z),\quad P_n(z)=P_{2^n}^{\rho_n}$$

が単位開円板 Δ 上で収束して, 領域 $D=\Delta\setminus\cup_{n,j}\Delta_{nj}$ で有界になることを示す. これが分かれば, 主定理 (b) の点分離性は $\widetilde{D}=\pi^{-1}(D)$ 上の二つの有界正則関数 $\sqrt{P(z)}$ と $z\circ\pi$ により点を分離できる.

$|z| \le \rho_k$ かつ $n > k$ の時：評価式 (3.4) から,

$$|P_n(z) - 1| \le \frac{2\rho_k^{2^n}}{(\rho_n^{2^n} - \rho_k^{2^n})(1 - \rho_k^{2^n})}.$$

補題 2(ii) より

$$\rho_k^{2^n} = (1 - \frac{2^{n-k}}{2^n})^{2^n} \le e^{-2^{n-k}} \le e^{-2} < \frac{1}{7}$$

$$\rho_n^{2^n} = (1 - \frac{1}{2^n})^{2^n} \ge (1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

よって,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} |1 - P_n(z)| \le \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{2e^{-2^{n-k}}}{(1 - \frac{1}{7})(\frac{1}{4} - \frac{1}{7})}$$

$$\le (\frac{3}{7})^3 \sum_{\ell=2}^{\infty} e^{-2\ell} = M_1 \quad (k\text{に無関係な定数}).$$

特に, $P = \prod P_n$ は Δ 上で収束する.

$z \in \cup_{j=1}^{2^n} \Delta \setminus \Delta_{nj}$ かつ $2^n \ge N_\sigma$ の時：評価式 (3.5) から, 補題 2(ii) を使って

$$|P_n(z)| \le \frac{8}{C_\sigma} \cdot \frac{1}{1 - \rho_n^{2^n}} \le \frac{8}{C_\sigma} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1}} = M_2$$

$|z| \ge \rho_k$ かつ $n < k$ の時：評価式 (3.6) から

$$||P_n(z)|^2 - 1| \le \frac{8(1 - \rho_n^{2\cdot 2^n})(\frac{\rho_n}{\rho_k})^{2^n}}{(1 - (\frac{\rho_n}{\rho_k})^{2^n})^2(1 - \rho_n^{2^n})}$$

補題 2(ii) を用いて,

$$\rho_n^{2^n} \le (\frac{\rho_n}{\rho_k})^{2^n} = (1 - \frac{1}{2^n}\frac{1 + 2^{n-k}}{1 - 2^{-k}})^{2^n} < e^{-1}.$$

また, $(1 - x)^n \ge 1 - nx$ $(0 < x < 1)$ より

$$1 - \rho_n^{2\cdot 2^n} = 1 - (1 - \frac{1}{2^k})^{2^{n+1}} \le 1 - (1 - \frac{2^{n+1}}{2^k}) = 2^{n-k+1},$$

従って,

$$||P_n(z)| - 1| \le ||P_n(z)|^2 - 1| \le \frac{8 \cdot 2^{n-k+1} e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2(1 - e^{-1})} < 24 \cdot 2^{n-k}.$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{k-2} ||P_n(z)| - 1| < \sum_{n=1}^{k-2} 24 \cdot 2^{n-k} = M_3.$$

$x \leq e^{x-1}$ に注意して, 以上 3 つの場合を合わせると, $z \in \cup_{j=1}^{2^k} \partial\Delta_{kj}$ $(2^{k-1} \geq N_\sigma)$ ならば$\rho_{k-1} < |z| < \rho_{k+1}$ であるから,

$$|\prod_{n=1}^{\infty} P_n(z)| = \prod_{n=1}^{k-2} |P_n(z)| \cdot |P_{k-1}(z)| \cdot |P_k(z)| \cdot |P_{k+1}(z)| \cdot \prod_{n=k+2}^{\infty} |P_n(z)| \leq e^{M_3} \cdot M_2^3 \cdot e^{M_1}.$$

$\square$

[問題] $r_{nj} = 2^{-\sigma n}$ $(\sigma > 0)$ のとき, 点分離か?

References

[1] M. Hayashi, M. Nakai, S. Segawa, *Bounded analytic functions on two sheeted discs*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 799–819.

[2] M. Hayashi, M. Nakai and S. Segawa, *Two sheeted discs and bounded analytic functions*, J. D'Anal. Math. **61** (1993), 293–325.

[3] M. Hayashi and T. Kato, *Point separation of a two-sheeted disc by bounded analytic functions*, (in preparation).

[4] H. L. Selberg, *Ein Satz über beschränkte endlichvieldeutig analytische Funktionen*, Comm. Math. Helv. **9** (1937), 104–108.