数理解析研究所講究録
947 巻 1996 年 57-66

設置に費用を伴う施設の競合配置問題

大阪府立大学総合科学部　大角 盛広　(OSUMI Shigehiro)
大阪大学工学部　石井 博昭　(ISHII Hiroaki)
大阪大学工学部　塩出 省吾　(SHIODE Shogo)
大阪府立大学総合科学部　寺岡 義伸　(TERAOKA Yoshinobu)

1　はじめに

競合環境下での施設の配置問題は、直線上での配置を扱った Hotelling [3] の研究に始まりネットワーク上や平面上において多くの研究がなされている。([1], [2], [4], [5], [6], [7])

本研究では、施設を設置するコストも考慮に入れて、競合する 2 企業が直線上に施設を配置する問題を考える。競合関係にある 2 企業が施設を交互に配置する問題に関しては、次の 2 つのタイプの問題、すなわちメジアノイド問題とセントロイド問題が考えられる。

- メジアノイド問題
  すでに配置されているすべての施設の位置を知った上で、新たに配置する施設の最適配置を求める問題

- セントロイド問題
  自己の施設を配置した直後に競合相手が施設をメジアノイド問題の解として最適になるように配置してくることを考慮に入れて、自己の施設の最適配置を求める問題

本研究ではこれを定式化し、これらの問題に対して最適解を求める方法を提案する。

2　モデル設定

直線上に n 個の需要点 (客) が存在する市場において、2 企業が自己の利益のみを考え、より多くの購買力の獲得をめざして施設を配置するものとする。現在、市場には企業 X が出店しており、その位置はメジアン点であり購買力を独占しているとする。ここに競合相手の企業 Y が店舗を出店し、企業 Y の施設によって奪われた購買力を企業 X が 2 つめの店舗を出店することで奪い返すというモデルを考える。このとき、設置により増加する購買力が設置コストに見合わない場合は出店をひかえるため、必ずしも企業 X が 2 つめの出店をするとは限らない。

以下の仮定を設ける。

1. 客は最も近い施設を利用する (等距離の場合は均等に利用)。
2. すべての施設の設置コストは等しい。

3 定式化

次の記号を用いる。

- n : 需要点の個数
- i : 点番号 $(i = 1, \cdots, n)$
- a_i : i 番目の需要点の位置 $(a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ とする$)$
- w_i : i 番目の需要点の購買力 $(w_i > 0$ かつ$\sum_1^n w_i = W = 1$ とする$)$
- a_M : メジアン点 $(\sum_1^M w_i \geq \frac{1}{2}$かつ$\sum_M^n w_i \geq \frac{1}{2})$
- C : 設置コスト $(C > 0)$
- x_1 : 企業 X の最初の店舗の配置位置 (メジアン点)
- y_1 : 企業 Y の店舗の配置位置
- x_2 : 企業 X の 2 番目の店舗の配置位置
- $d(p,q)$: 位置 p,q間の距離 $(d(p,q) = |p-q|)$
- $W_{x_1}(x_2|y_1)$: y_1, x_2に施設があるとき x_1の位置で獲得できる購買力
- $W_{y_1}(x_2|y_1)$: y_1, x_2に施設があるとき y_1の位置で獲得できる購買力
- $W_{x_2}(x_2|y_1)$: x_1, y_1に施設があるとき x_2の位置で獲得できる購買力

このとき W_{y_1}は次のように表される。

$$W_{y_1}(x_2|y_1) = \sum_{i \in I_2} w_i + \frac{1}{2}\sum_{i \in I_2} w_i + \frac{1}{2}\sum_{i \in I_3} w_i + \frac{1}{3}\sum_{i \in I_4} w_i + \frac{1}{3}\sum_{i \in I_5} w_i + \frac{1}{2}\sum_{i \in I_6} w_i$$

ここで

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{i|d(a_i,y_1) < \min\{d(a_i,x_1), d(a_i,x_2^*)\}\} \\
I_2 &= \{i|d(a_i,y_1) = d(a_i,x_1), d(y_1,x_1) < d(y_1,x_2)\} \\
I_3 &= \{i|d(a_i,y_1) = d(a_i,x_2), d(y_1,x_1) > d(y_1,x_2)\} \\
I_4 &= \{i|d(a_i,y_1) = d(a_i,x_1) = d(a_i,x), x_1 \neq x_2\} \\
I_5 &= \{i|d(a_i,y_1) = d(a_i,x_1) = d(a_i,x_2), x_1 = x_2 = y_1\} \\
I_6 &= \{i|d(a_i,y_1) = d(a_i,x_1) = d(a_i,x_2), x_1 = x_2, x_1 \neq y_1\}
\end{aligned}$$

また、

$$W_{x_1}(x_2|y_1) + W_{x_2}(x_2|y_1) = 1 - W_{y_1}(x_2|y_1)$$

である。

なお、$W < C$の場合には施設が設置されることはなく、$C \leq W < 2C$の場合には x_1が設置されるだけで y_1が設置されることはないため、本論では $W \geq 2C$の場合のみを考えることにする。

ここで、メジアノイド問題とセントロイド問題は次のように定式化される。

1. メジアノイド問題：
   企業 Y が施設 y_1を配置した後、その位置情報を知ったうえで企業 X が自己の獲得できる利益（購買力−設置コスト）を最大にするように施設 x_2の配置を決定する問題。すなわち、

$$\begin{aligned} f(x_2|y_1) &= W_{x_1}(x_2|y_1) + W_{x_2}(x_2|y_1) - 2C \\ &= 1 - W_{y_1}(x_2|y_1) - 2C \end{aligned}$$

   を最大にする x_2を求める問題である。関数の最大値が 0 未満の場合は X は 2 番目の施設を配置しない。0 以上の場合の解を x_2^*とする。

2. セントロイド問題：
   企業 Y が施設 y_1を配置した後で企業 X が上のメジアノイド問題の最適解を利用することを考慮に入れて、X,Y が施設を配置し終わった後の企業 Y の獲得できる利益が最大になるように施設 y_1の配置を決定する問題。すなわち、

$$g(y_1) = W_{y_1}(x_2^*|y_1) - C$$

   を最大にする y_1を求める問題である。

4 解法

4.1 解の性質

解の探索範囲をせばめるため、次の性質が利用できる。

性質 1: x_2を設置するとき、その最適配置の 1 つは y_1と隣接するか重なるかのいずれかである。

性質 2: 施設の最適配置の 1 つは需要点上にある。

性質 3: 設置コストを考慮せず x_2が常に置くとわかっている場合、y_1の最適配置が x_1に隣接することはありえない。

性質 1 は明らかである。

性質 2 の証明:
まず、メジアノイド問題の解の 1 つが需要点上にあることを示す。

企業 X の施設がメジアンの位置に設置されているとする。ここで、一般性を失うことなく $y_1 \geq x_1$ とする。明らかに企業 X は $x_2 < x_1$ となる位置に次の施設を配置することはありえない。いま、$y_1 < x_2$ としその 2 つの施設 y_1, x_2 の間に需要点 $a_i, \cdots, a_j \quad (i < j)$ が存在している、すなわち $y_1 < a_i < \cdots < a_j < x_2$ とする。x_2 を y_1 に近づけて $\frac{1}{2}(y_1 + x_2) < a_i$ になるように配置すると x_2 位置で $a_i, \cdots, a_j$ の全ての需要点を獲得できる。ここで、$x_2 = a_i$ の場合にも $\frac{1}{2}(y_1 + x_2) < a_i$ が成立するから、最適配置の 1 つは需要点上にあると言える。また $y_1 > x_2 > x_1$ の場合も同様で $x_2 = a_j$ が最適配置となる。

次に、セントロイド問題の解の 1 つが需要点上にあることを示す。

上と同様に $y_1 > x_1$ とし上と同様に需要点 $a_i, \cdots, a_j$ が存在しているとする。上のメジアノイド問題より x_2 は y_1 に隣接するか重なるかであるから、y_1 が需要点上になく $a_j < y_1 < a_{j+1}$ とすると、x_2 の最適配置は $x_2 = a_j, x_2 = y_1, x_2 = a_{j+1}$ のいずれかで、メジアノイド問題の解として $W_{x_1} + W_{x_2}$ を最大にする位置である。いま、$x_2 = a_{j+1}$ の位置がメジアノイド問題の解になっているとすると、y_1 は a_j の位置でも獲得購買力は変わらない。$x_2 = a_j$ の場合には y_1 は a_{j+1} の位置でも獲得購買力が変わらない。$x_2 = y_1$ の場合には、y_1 は a_j, a_{j+1} の位置でも獲得購買力が変わらない。従ってセントロイド問題の解の 1 つも需要点上にある。

性質 2 より、最適解を探索するには需要点のみを調べれば良い。

性質 3 の証明:

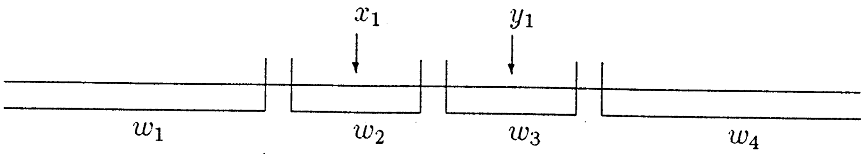

図 1: x_2 の配置前

1. y_1 が x_1 の右に隣接しているとき
   購買力を図 (1) のように分けて考える。ここで、x_2 が置く前には、X と Y との獲得購買力はそれぞれ $w_1 + w_2$ と $w_3 + w_4$ である。x_2 が y_1 の上に置くか右に隣接して置く

かで、獲得できる購買力は次のような表にまとめられる。

	x_2が y_1の上	x_2が y_1の右
W_{x_1}	$w_1 + w_2$	$w_1 + w_2$
W_{y_1}	$(w_3 + w_4)/2$	w_3
W_{x_2}	$(w_3 + w_4)/2$	w_4

x_2が必ず置くとき、X は最終的に次の量の購買力を獲得する（ように置く）。

$$\max\{w_1 + w_2 + \frac{w_3 + w_4}{2}, w_1 + w_2 + w_4\} \tag{1}$$

2. x_1と y_1が同じ点に配置されているとき
購買力を先の図 (1) のように分けて考え、y_1が x_1に重ねて置くとする。ここで、x_2が置く前には、X と Y との獲得購買力はそれぞれ 1/2 ずつである。x_2が x_1, y_1の上に置くか左右に隣接して置くかで、獲得できる購買力は次のような表にまとめられる。

	x_2が y_1の上	x_2が y_1の右	x_2が y_1の左
W_{x_1}	1/3	$(w_1 + w_2)/2$	$(w_2 + w_3 + w_4)/2$
W_{y_1}	1/3	$(w_1 + w_2)/2$	$(w_2 + w_3 + w_4)/2$
W_{x_2}	1/3	$w_3 + w_4$	w_1

x_2が必ず置くとき、X は最終的に次の量の購買力を獲得する（ように置く）。

$$\max\{\frac{2}{3}, \frac{w_1 + w_2}{2} + w_3 + w_4, \frac{w_2 + w_3 + w_4}{2} + w_1\} \tag{2}$$

さて、ここで以下の条件

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &\geq \frac{1}{2} \\ w_1 &< \frac{1}{2} \\ w_3 + w_4 &< \frac{1}{2} \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1 \end{aligned}$$

の下で (1) と (2) との大小を比較すると、(1) の方が大きくなることはありえない。従って、x_2が置く場合には y_1が x_1に隣接した位置で最適配置となることはない。

4.2 解の探索

x_1,y_1の配置パターンは以下の 3 つに分類できる。

1. y_1が x_1と同じ位置に配置される場合

2. y_1が x_1に隣接せず右 (左) 側に配置される場合

3. y_1が x_1に隣接して配置される場合 (x_2が置かない場合のみ起こる)

パターン 2 の場合、$y_1 \leq x_1$の場合は需要点の番号を逆順に付け替えるだけで $y_1 \geq x_1$の場合に帰着できるため、以下では $y_1 \geq x_1$の場合のみを考える。上記の分類について x_2が設置されるかどうかで場合分けし、最終的な X と Y の獲得購買力を求める。

パターン 1 y_1が x_1と同じくメジアン点に位置に配置される場合

x_2の配置前は、x_1と y_1とは購買力を$\frac{1}{2}$ずつ分け合っている。ここで、x_2の配置される点は、a_{M-1}, a_M, a_{M+1}のいずれかであるから、それぞれの場合について W_{y_1}を計算すると、

	$x_2 = a_{M-1}$	$x_2 = a_M$	$x_2 = a_{M+1}$
W_{y_1}	$\frac{1}{2}\sum_{i=M}^{n} w_i$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} w_i$

となる。x_2は W_{y_1}が最も小さくなるような位置に配置する。上記の表で大小を比較すると、$w_M > \frac{1}{6}$ならば$\frac{1}{3}$が最小になり x_2は a_Mに配置され W_{y_1}は$\frac{1}{3}$となる。ただしそのときの X の獲得購買力の増加分$\frac{1}{6} - C$が 0 未満ならば x_2は配置されず、W_{y_1}は$\frac{1}{2}$になる。$w_M \leq \frac{1}{6}$のときは$\sum_{i=M}^{n} w_i$と$\sum_{i=1}^{M} w_i$の大小で $x_2 = a_{M-1}$になるか $x_2 = a_{M+1}$になるか決まる。以上をまとめると、

$$
\begin{aligned}
w_M > \frac{1}{6}, \frac{1}{6} < C & \quad \text{ならば} \quad x_2\text{は配置されず}, W_{y_1} = \frac{1}{2} \\
w_M > \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \geq C & \quad \text{ならば} \quad x_2 = a_M, W_{y_1} = \frac{1}{3} \\
w_M \leq \frac{1}{6}, \sum_{i=M}^{n} w_i \leq \sum_{i=1}^{M} w_i, \sum_{i=1}^{M-1} w_i \geq 2C & \quad \text{ならば} \quad x_2 = a_{M-1}, W_{y_1} = \frac{1}{2}\sum_{i=M}^{n} w_i \\
w_M \leq \frac{1}{6}, \sum_{i=M}^{n} w_i \leq \sum_{i=1}^{M} w_i, \sum_{i=1}^{M-1} w_i < 2C & \quad \text{ならば} \quad x_2\text{は配置されず}, W_{y_1} = \frac{1}{2} \\
w_M \leq \frac{1}{6}, \sum_{i=M}^{n} w_i > \sum_{i=1}^{M} w_i, \sum_{i=M+1}^{n} w_i \geq 2C & \quad \text{ならば} \quad x_2 = a_{M+1}, W_{y_1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} w_i \\
w_M \leq \frac{1}{6}, \sum_{i=M}^{n} w_i > \sum_{i=1}^{M} w_i, \sum_{i=M+1}^{n} w_i < 2C & \quad \text{ならば} \quad x_2\text{は配置されず}, W_{y_1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

以上の場合について $y_1 = a_M$がセントロイド問題の解の候補である。

パターン 2 y_1が x_1に隣接せず右側に配置される場合

1. $x_1 = a_M, y_1 = a_k, x_2 = a_{k-1}$の場合 (ただし $k > M+1$)
   (a) $\sum_{i=1}^{k-1} w_i - \sum_{a_i < \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i - \frac{1}{2} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i < C$ のとき x_2は配置されない

$$\begin{aligned} W_{x_1} &= \sum_{a_i < \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{2} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \\ W_{y_1} &= \sum_{a_i > \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{2} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \end{aligned}$$

   (b) $\sum_{i=1}^{k-1} w_i - \sum_{a_i < \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i - \frac{1}{2} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \geq C$ のとき

$$\begin{aligned} W_{x_1} + W_{x_2} &= \sum_{i=1}^{k-1} w_i - 2C \\ W_{y_1} &= \sum_{i=k}^{n} w_i \end{aligned}$$

2. $x_1 = a_M, y_1 = a_k, x_2 = a_k$の場合 (ただし $k > M+1$)
   (a) $\frac{1}{2} \sum_{a_i > \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{6} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i < C$ のとき x_2は配置されない

$$\begin{aligned} W_{x_1} &= \sum_{a_i < \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{2} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \\ W_{y_1} &= \sum_{a_i > \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{2} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \end{aligned}$$

   (b) $\frac{1}{2} \sum_{a_i > \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{6} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \geq C$ のとき

$$\begin{aligned} W_{x_1} &= \sum_{a_i < \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{3} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \\ W_{y_1} &= \frac{1}{2} \sum_{a_i > \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{3} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \\ W_{x_2} &= \frac{1}{2} \sum_{a_i > \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{3} \sum_{a_i = \frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \end{aligned}$$

3. $x_1 = a_M, y_1 = a_k, x_2 = a_{k+1}$の場合 (ただし $k > M+1$)

(a) $\sum_{i=k+1}^{n} w_i < C$ のとき x_2は配置されない

$$
\begin{aligned}
W_{x_1} &= \sum_{a_i<\frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{2}\sum_{a_i=\frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \\
W_{y_1} &= \sum_{a_i>\frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{2}\sum_{a_i=\frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i
\end{aligned}
$$

(b) $\sum_{i=k+1}^{n} w_i \geq C$ のとき

$$
\begin{aligned}
W_{x_1} &= \sum_{a_i<\frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i + \frac{1}{2}\sum_{a_i=\frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \\
W_{y_1} &= \sum_{\frac{1}{2}(a_M+a_k)<a_i\leq a_k} w_i + \frac{1}{2}\sum_{a_i=\frac{1}{2}(a_M+a_k)} w_i \\
W_{x_2} &= \sum_{i=k+1}^{n} w_i
\end{aligned}
$$

以上の場合分けにおいて、x_2が配置される場合の W_{x_2}を最大にする位置がメジアノイド問題の解であり、そのときの y_1の位置がセントロイド問題の解の候補である。x_2が配置されない場合には、W_{y_1}を最大にする y_1の位置がセントロイド問題の解の候補になる。

パターン 3 y_1が x_1に隣接して配置される場合

$y_1 = a_{M+1}$で x_1に隣接しているとする。x_2の配置前は、x_1と y_1とは購買力を$\sum_{i=1}^{M} w_i$と$\sum_{i=M+1}^{n} w_i$ずつ分け合っている。ここで、x_2の配置される点は、a_{M+1}, a_{M+2}のいずれかであるから、それぞれの場合について W_{y_1}の位置で獲得できる購買力を計算すると、

	$x_2 = a_{M+1}$	$x_2 = a_{M+2}$
W_{y_1}	$\frac{1}{2}\sum_{i=M+1}^{n} w_i$	w_{M+1}

となる。x_2は W_{y_1}が最も小さくなるような位置に配置する。上記の表で大小を比較すると、$w_{M+1} > \sum_{i=M+2}^{n} w_i$ならば $w_{M+1} > \frac{1}{2}\sum_{i=M+1}^{n} w_i$であり x_2は a_{M+1}に配置され W_{y_1}は$\sum_{i=1}^{M} w_i$になる。ただしそのときの X の獲得購買力の増加分$\frac{1}{2}\sum_{i=M+1}^{n} w_i - C$が 0 未満ならば x_2は配置されず、W_{y_1}は$\sum_{M+1}^{n} w_i$になる。まとめると、

$$
w_{M+1} > \sum_{i=M+2}^{n} w_i,\ \sum_{i=M+1}^{n} w_i < 2C \quad \text{ならば} \quad x_2\text{は配置されず}, y_1 = a_{M+1}, W_{y_1} = \sum_{i=1}^{M} w_i
$$

$$w_{M+1} > \sum_{i=M+2}^{n} w_i,\ \sum_{i=M+1}^{n} w_i \geq 2C \quad \text{ならば} \quad x_2 = a_{M+1}, y_1 = a_{M+1}, W_{y_1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} w_i$$

$$w_{M+1} \leq \sum_{i=M+2}^{n} w_i,\ \sum_{i=M+2}^{n} w_i < C \quad \text{ならば} \quad x_2\text{は配置されず}, y_1 = a_{M+1}, W_{y_1} = \sum_{i=1}^{M} w_i$$

$$w_{M+1} \leq \sum_{i=M+2}^{n} w_i,\ \sum_{i=M+2}^{n} w_i \geq C \quad \text{ならば} \quad x_2 = a_M + 2, y_1 = a_{M+1}, W_{y_1} = w_{M+1}$$

性質 3 により、x_2が配置される場合はこのパターンで y_1が最適になることはない。よって、以上の場合のうち x_2が配置されない場合について $y_1 = a_{M+1}$がセントロイド問題の解の候補である。

以上の場合分けにおいて、次の順にセントロイド問題の解の候補となる場合を探す。

1. パターン 1 の条件をチェックして解の候補となる場合を得る。

2. パターン 3 の条件をチェックして解の候補となる場合を得る。

3. パターン 2 の kを $k > M+1$ から $k \leq n$ まで動かして解の候補となる場合を得る。

次に、それぞれの場合から $W_{x_1} + W_{x_2}$を最大にするものを見つけると、その場合の y_1の位置がセントロイド問題の解である。

5 おわりに

セントロイド問題の解の探索において、y_1が x_1に隣接せずに配置される場合、メジアノイド問題の解となる需要点ごとに $W_{x_1} + W_{x_2}$の計算をせねばならない。これは必ずしも効率が良くないため、さらに探索に役立つ性質を見つけることが今後の課題である。

この研究は文部省科学研究費一般 C07680462 によるものである。

参考文献

[1] Z. Drezner : "Competitive Location Strategies for Two Facilities", Regional Science and Urban Economics Vol. 12 (1982).

[2] S. L. Hakimi : "On Locating New Facilities in a Competitive Environment", European Journal of Operational Research Vol. 12 (1983)

[3] H. Hotelling : "Stability in Competition", Economic Journal 39 (1929).

[4] Hiroshi Imai : "Finding Connected Components of An Intersection Graph of Squares in The Euclidean Plane", Information Processing Letters, Vol.15(1982).

[5] 伊理正夫監修, 腰塚武志編集：計算幾何学と地理情報処理, 共立出版 (1986).

[6] 塩出省吾："競合する施設の配置について", BASIC 数学 7 月号 (1991).

[7] 塩出省吾："競合状態下の配置問題", 第 4 回 RAMP シンポジウム論文集 (1992).