数理解析研究所講究録
951 巻 1996 年 40-53

Asymptotic convergence for phase field models with obstacles

千葉大自然科学　白水　淳　(Jun Shirohzu)
長岡高専一般教育科　佐藤　直紀　(Naoki Sato)

0. Introduction

次の偏微分方程式のシステム $(P_{\nu\kappa})$ を考える:

$$(\rho(u)+\lambda(w))_t-\Delta u=f(t,x)\quad \text{in } Q:=(0,T)\times\Omega, \tag{0.1}$$

$$\nu w_t-\kappa\Delta w+\beta(w)+g(w)\ni\lambda'(w)u\quad \text{in } Q, \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+n_0u=h(t,x)\quad \text{on } \Sigma:=(0,T)\times\Gamma, \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}=0\quad \text{on } \Sigma, \tag{0.4}$$

$$u(0,\cdot)=u_0,\ w(0,\cdot)=w_0\quad \text{in } \Omega. \tag{0.5}$$

ここで, Ω は $\mathbf{R}^N$ $(1\le N\le 3)$ の有界な領域で, その境界 $\Gamma:=\partial\Omega$ は smooth とする. 次を仮定する. $0<T<+\infty$; ν と κ は非負なパラメーター; n_0 は正の定数; ρ と β は maximal monotone graphs in $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$; g と λ は滑らかな関数; f, h, u_0, w_0 は与えられた関数とする.

このシステムは, obstacle を持つ phase-field model と呼ばれ, 固体-液体の相転移現象を記述するモデルである. $\theta:=\rho(u)$ は温度, w は non-conserved order parameter を表す. すなわち w は相を表す変数で, obstacles "$w\in D(\beta)$" を持つ. また, κ と ν はそれぞれ内部エネルギーと w の時間緩衝を表す. このシステム $(P_{\nu\kappa})$ は Caginalp [2] および Penrose-Fife [12] によるものである.

ここで興味深いのは, $\nu\ge 0$, $\kappa\ge 0$ $\nu+\kappa>0$, β の定義域 $D(\beta)$ が $\mathbf{R}$ で有界, かつ g が $\overline{D(\beta)}$ で non-monotone の場合である. 例えば, $\beta=\partial I_{[-1,1]}$ または $\partial I_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ かつ $g(w)=w^3-w$. この形の phase-field model は Blowey-Elliott [1], Kenmochi-Niezgódka [8,9], Kenmochi [6], Horn-Sprekels-Zheng [5], Laurençot [10,11], Colli-Sprekels [4] 等により, 研究されている. この論文では, λ が $\overline{D(\beta)}$ で convex かつ $\lambda''(w)u\le 0$ for all $w\in\overline{D(\beta)}$ and $u\in D(\rho)$ を仮定して, つぎを示す:

(i) $\nu > 0$ に対して, 問題 $(P_{\nu 0})$ は一意解を持ち, その解は問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解を $\kappa \searrow 0$ としたときの極限となる,

(ii) ρ : $\mathbf{R}$ で bi-Lipschitz 連続, かつ $\lambda(w) = w$ のとき, $\kappa > 0$ に対して, 問題 $(P_{0\kappa})$ は一意解を持ち, その解は問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解を $\nu \searrow 0$ としたときの極限となる.

Notation. (実) Banach または Hilbert 空間 X にたいして $|\cdot|_X$ を X のノルム, X^* を X の dual 空間とする.

H を $L^2(\Omega)$, V を $H^1(\Omega)$ とし, ノルムを次で定義する:

$$|z|_V := \{|\nabla z|^2_{L^2(\Omega)} + n_0|z|^2_{L^2(\Gamma)}\}^{1/2}.$$

また, $(\cdot,\cdot)$ と $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ をそれぞれ H と $L^2(\Gamma)$ の内積とし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を V^* と V の duality pairing とする.

$$a(v,z) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla z dx \quad \text{for all } v, z \in V$$

とし, F_0 を V から V^* へのオペレーターで, 次のように定義する:

$$\langle F_0 v, z\rangle = a(v,z) \quad \text{for all } v, z \in V;$$

特に, もし $F_0 v \in H$ ならば, $v \in H^2(\Omega)$ かつ

$$F_0 v = -\Delta v \ \text{ in } \Omega \quad \text{with } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \ \text{ on } \Gamma.$$

一方, F を V から V^* への duality mapping で, 次のように定義する:

$$\langle Fv, z\rangle = a(v,z) + n_0(v,z)_\Gamma \quad \text{for all } v, z \in V;$$

形式的に

$$Fv = -\Delta v \ \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial n} + n_0 v = 0 \ \text{ on } \Gamma.$$

と表される.

$C_w([0,T];X)$ を $[0,T]$ から X への弱連続関数の空間とする. “ $v_n \to v$ in $C_w([0,T];X)$ (as $n \to +\infty$) ” を任意の $z^* \in X^*$ に対して, $\langle z^*, v_n(t) - v(t)\rangle_X$ が 0 に $[0,T]$ 上で一様に収束するものとする. ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ は X^* と X との duality pairing を表す.

簡単のため “ $'$ ” で時間微分 $\dfrac{d}{dt}$ を表す.

1. Weak formulation for $(P_{\nu\kappa})$

問題 $(P_{\nu\kappa})$ を次の仮定 (A1)-(A5) のもとで考える:

(A1) ρ : a maximal monotone graph in $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, ρ の定義域 $D(\rho)$ 値域 $R(\rho)$ は $\mathbf{R}$ で開, $D(\rho)$ から $R(\rho)$ への関数とみて locally bi-Lipschitz 連続な関数.

(A2) β : a maximal monotone graph in $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $-\infty<\sigma_*<\sigma^*<+\infty$ なる定数 σ_*,σ^* にたいして $\overline{D(\beta)}=[\sigma_*,\sigma^*]$.

(A3) λ とその導関数 λ' は $[\sigma_*,\sigma^*]$ 上 Lipschitz 連続な関数で λ : convex on $[\sigma_*,\sigma^*]$ such that $\lambda''(w)u\le 0$ for a.e. $w\in[\sigma_*,\sigma^*]$ and all $u\in D(\rho)$.

(A4) g は $[\sigma_*,\sigma^*]$ 上 Lipschitz 連続な関数.

(A5) n_0 : 正の定数.

(A3) の仮定 "$\lambda''(w)u\le 0$ for a.e. $w\in[\sigma_*,\sigma^*]$ and all $u\in D(\rho)$" は λ が $[\sigma_*,\sigma^*]$ で線形でないなら, $D(\rho)\subset(-\infty,0]$ を表している.

次に, 与えられた関数 $f\in L^2(0,T;H)$, $h\in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$, $u_0,w_0\in V$ にたいして, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解の定義を与える.

Definition 1.1. 2つの関数 $u:=u_{\nu\kappa}:[0,T]\to V$ と $w:=w_{\nu\kappa}:[0,T]\to V$ の組が次の条件 $(\mathrm{w1})_{\nu\kappa}$-$(\mathrm{w3})_{\nu\kappa}$ を満たすとき, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ with $\nu>0$ and $\kappa>0$ の解という:

$(\mathrm{w1})_{\nu\kappa}$ $u\in L^2(0,T;V)$, $\rho(u)\in L^\infty(0,T;H)\cap W^{1,2}(0,T;V^*)$, $w\in L^\infty(0,T;V)\cap W^{1,2}(0,T;H)$ and $u(0)=u_0, w(0)=w_0$.

$(\mathrm{w2})_{\nu\kappa}$ 任意の $z\in V$ と a.e. $t\in[0,T]$ にたいして,

$$\langle\rho(u)'(t)+\lambda(w)'(t),z\rangle+a(u(t),z)+(n_0u(t)-h(t),z)_\Gamma=(f(t),z). \tag{1.1}$$

$(\mathrm{w3})_{\nu\kappa}$ $\xi\in L^2(0,T;H)$ が存在して, $\xi\in\beta(w)$ a.e. on Q かつ

$$\nu(w'(t),z)+\kappa a(w(t),z)+(\xi(t)+g(w(t))-\lambda'(w(t))u(t),z)=0 \tag{1.2}$$

$$\text{for all } z\in V \text{ and a.e. } t\in[0,T].$$

$h\in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ にたいして, 関数 $h_0\in L^2(0,T;V)$ が存在して,

$$a(h_0(t),z)+(n_0h_0(t)-h(t),z)_\Gamma=0 \quad \text{for all } z\in V \text{ and a.e. } t\in[0,T];$$

$h\in W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma))$ の時 $h_0\in W^{1,2}(0,T;V)$ に注意する. この関数 h_0 を使うと, (1.1) と (1.2) は次のように表される:

$$\rho(u)'(t)+\lambda(w)'(t)+F(u(t)-h_0(t))=f(t) \tag{1.3}$$

$$\nu w'(t)+\kappa F_0w(t)+\xi(t)+g(w(t))=\lambda'(w(t))u(t) \tag{1.4}$$

for a.e. $t \in [0,T]$.

Definition 1.2. 2つの関数 $u := u_{\nu 0} : [0,T] \to V$ と $w := w_{\nu 0} : [0,T] \to H$ の組が次の条件 $(\mathrm{w1})_{\nu 0}$-$(\mathrm{w3})_{\nu 0}$ を満たすとき, 問題 $(P_{\nu 0})$ with $\nu > 0$ の解という:

$(\mathrm{w1})_{\nu 0}$ $u \in L^2(0,T;V)$, $\rho(u) \in L^\infty(0,T;H) \cap W^{1,2}(0,T;V^*)$, $w \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V)$ and $u(0) = u_0, w(0) = w_0$.

$(\mathrm{w2})_{\nu 0}$ 任意の $z \in V$ と a.e. $t \in [0,T]$ にたいして, (1.1) が成り立つ.

$(\mathrm{w3})_{\nu 0}$ $\xi \in L^2(0,T;H)$ が存在して $\xi \in \beta(w)$ a.e. on Q and

$$\nu w'(t) + \xi(t) + g(w(t)) = \lambda'(w(t))u(t) \quad \text{in } H \tag{1.5}$$

for a.e. $t \in [0,T]$.

定義の $(\mathrm{w3})_{\nu\kappa}$ と $(\mathrm{w3})_{\nu 0}$ より問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u,w\}$ の関数 w は Q 上に制限 $\sigma_* \le w \le \sigma^*$ を持つ. これは問題 $(P_{\nu\kappa})$ の weak formulation は $[\sigma_*, \sigma^*]$ の外では λ と g の挙動に関係しないことを意味している. そこで, 一般性を失うことなく次を仮定することができる:

$$g \text{ の support は compact}, \ \lambda \text{ は } [\sigma_*, \sigma^*] \text{ の外で線形}. \tag{1.6}$$

この論文を通して, (1.6) を仮定する.

問題 $(P_{\nu\kappa})$ with $\nu > 0$ and $\kappa > 0$ にたいして, 次の一意解の存在定理が得られている.

Theorem 1.1. *(A1)-(A5) に加えて次の条件 (H1)-(H4) を仮定する:*

(H1) $f \in W^{1,2}(0,T;H)$.

(H2) $h \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma))$ *such that*

$$n_0 \sup D(\rho) \ge h(t,x) \ge n_0 \inf D(\rho) \quad \text{for a.e. } (t,x) \in \Sigma$$

正の定数 A_1 と A_1' が存在して

$$\rho(r)(n_0 r - h(t,x)) \ge -A_1|r| - A_1' \quad \text{for all } r \in D(\rho) \text{ and a.e. } (t,x) \in \Sigma.$$

(H3) $u_0 \in V$ *with* $\rho(u_0) \in H$.

(H4) $w_0 \in H^2(\Omega)$ *with* $\dfrac{\partial w_0}{\partial n} = 0$ *a.e. on* Γ かつ $\xi_0 \in H$ が存在して $\xi_0 \in \beta(w_0)$ *a.e. on* Ω.

すると $(P_{\nu\kappa})$ *with* $\nu > 0$ *and* $\kappa > 0$ は一意解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ を持ち, 次を満たす.

$$\begin{cases} u_{\nu\kappa} \in L^\infty(0,T;V), \\ w_{\nu\kappa} \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \\ w'_{\nu\kappa} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V), \\ \xi_{\nu\kappa} \in L^\infty(0,T;H), \end{cases} \tag{1.7}$$

ここで $\xi_{\nu\kappa}$ は *Definition 1.1* の条件 $(\mathrm{w3})_{\nu\kappa}$ の ξ である. さらに次の一様評価 *(i)* と *(ii)* が成り立つ:

(i) パラメーター ν と κ によらない正の定数 δ_0 と M_0 が存在して,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{\widehat{\rho^{-1}}(\rho(u_{\nu\kappa}(t))) - r_0(\rho(u_{\nu\kappa}(t)) + \lambda(w_{\nu\kappa}(t)))\}dx \\ &\quad + \frac{\kappa}{2}|\nabla w_{\nu\kappa}(t)|_H^2 + \int_\Omega \{\widehat{\beta}(w_{\nu\kappa}(t)) + \widehat{g}(w_{\nu\kappa}(t))\}dx \\ &\qquad + \delta_0 \left\{ \int_0^t |u_{\nu\kappa}(s)|_V^2 ds + \nu \int_0^t |w'_{\nu\kappa}(s)|_H^2 ds + \nu |\rho(u_{\nu\kappa}(t))|_H^2 \right\} \\ &\le \int_\Omega \{\widehat{\rho^{-1}}(\rho(u_0)) - r_0(\rho(u_0) + \lambda(w_0))\}dx + \frac{\kappa}{2}|\nabla w_0|_H^2 \\ &\quad + \int_\Omega \{\widehat{\beta}(w_0) + \widehat{g}(w_0)\}dx + M_0\{|\rho(u_0)|_H^2 + |f|^2_{L^2(0,T;H)} + |h|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + 1\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

for all $t \in [0,T]$, ここで $r_0 \in D(\rho)$, $\widehat{\rho^{-1}}$ は ρ^{-1} の原始関数で$\widehat{\rho^{-1}}(\rho(r_0)) = 0$ をみたし, $\widehat{\beta} : \mathbf{R}$ 上 *non-negative proper l.s.c. convex* な関数で$\partial\widehat{\beta} = \beta$, $\widehat{g}$ は g の非負な原始関数とする.

(ii) 任意の $\nu > 0$ に対して, $\kappa > 0$ によらない定数 $M_1(\nu)$ が存在して,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}|u_{\nu\kappa}(t)|_V^2 + \frac{\nu}{2}|w'_{\nu\kappa}(t)|_H^2 + \kappa \int_0^t |\nabla w'_{\nu\kappa}(s)|_H^2 ds \\ &\quad \le M_1(\nu)\{|u_0|_V^2 + |\rho(u_0)|_H^2 + |w_0|^2_{H^2(\Omega)} + |\xi_0|_H^2 \\ &\qquad + |f|^2_{W^{1,2}(0,T;H)} + |h|^2_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma))} + 1\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

for all $t \in [0,T]$.

Theorem 1.1 の証明は, [13] を参照.

Lemma 1.1. *Theorem 1.1* と同じ仮定のもとで, $\{u_i, w_i\}$ を問題 $(P_{\nu_i\kappa_i})$ *with* $\nu_i > 0$ *and* $\kappa_i \ge 0$ *for* $i = 1,2$ の解とすると, $e_i := \rho(u_i) + \lambda(w_i)$ *for* $i = 1,2$ とおくと, 次の不等式が

成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_1(t)-e_2(t)|^2_{V^*}+(\nu_1 w_1'(t)-\nu_2 w_2'(t), w_1(t)-w_2(t)) \\
&\quad +\int_\Omega \nabla(\kappa_1 w_1(t)-\kappa_2 w_2(t))\cdot\nabla(w_1(t)-w_2(t))dx \\
&\quad\quad +(g(w_1(t))-g(w_2(t)), w_1(t)-w_2(t)) \le 0
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

for a.e. $t\in[0,T]$.

Proof. (1.3) と (1.4) より

$$
e_1'(t)-e_2'(t)+F(u_1(t)-u_2(t))=0 \tag{1.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nu_1 w_1'(t)-\nu_2 w_2'(t)+F_0(\kappa_1 w_1(t)-\kappa_2 w_2(t)) \\
&\quad +(\xi_1(t)-\lambda'(w_1(t))u_1(t)-\xi_2(t)+\lambda'(w_2(t))u_2(t))+(g(w_1(t))-g(w_2(t))) \\
&\quad =0
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

for a.e. $t\in[0,T]$, ここで ξ_i は条件 $(\mathrm{w3})_{\nu\kappa}$ または $(\mathrm{w3})_{\nu 0}$ の中の関数 ξ である. (1.12) に $F^{-1}(e_1(t)-e_2(t))$ を, (1.13) に $w_1(t)-w_2(t)$ をかけ, それらを加えると次が得られる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_1(t)-e_2(t)|^2_{V^*}+(\nu_1 w_1'(t)-\nu_2 w_2'(t), w_1(t)-w_2(t)) \\
&\quad +\int_\Omega \nabla(\kappa_1 w_1(t)-\kappa_2 w_2(t))\cdot\nabla(w_1(t)-w_2(t))dx \\
&\quad +(g(w_1(t))-g(w_2(t)), w_1(t)-w_2(t))+Y_1(t)+Y_2(t) \\
&\quad =0
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

for a.e. $t\in[0,T]$, ここで

$$
Y_1(t):=(u_1(t)-u_2(t), e_1(t)-e_2(t))-(\lambda'(w_1(t))u_1(t)-\lambda'(w_2(t))u_2(t), w_1(t)-w_2(t))
$$

$$
Y_2(t):=(\xi_1(t)-\xi_2(t), w_1(t)-w_2(t)).
$$

β の単調性より $Y_2(t)\ge 0$. また, [7, Lemma 3.1] の結果と条件 (A3) より, $Y_1(t)\ge 0$. ゆえに (1.14) より (1.11) が得られる. □

Corollary 1.1. *Lemma 1.1* と同じ仮定のもとで, $\nu>0$ かつ $\kappa\ge 0$ のとき, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解は一意である.

Proof. $\{u_i, w_i\}$ を $\nu>0$ のときの問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解とし, $e_i:=\rho(u_i)+\lambda(w_i)$, $i=1,2$ とおく. すると Lemma 1.1 の (1.11) より,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{d}\{|e_1(t)-e_2(t)|^2_{V^*}+\nu|w_1(t)-w_2(t)|^2_H\}+\kappa|\nabla(w_1(t)-w_2(t))|^2_H \\
&\quad \le L(g)|w_1(t)-w_2(t)|^2_H
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

for a.e. $t \in [0,T]$, ここで $L(g)$ は g の Lipschitz 定数. (1.15) に Gronwall の lemma を適用すると, $e_1 = e_2$ と $w_1 = w_2$が得られる, i.e. $\{u_1, w_1\} = \{u_2, w_2\}$. よって問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解の一意性が得られる. □

2. Asymptotic convergence in $(P_{\nu\kappa})$ as $\kappa \searrow 0$

この節では, $\nu > 0$ を固定して, $\kappa \searrow 0$ としたときの問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ の挙動について述べる.

Theorem 2.1. 条件 *(A1)-(A5), (H1)-(H4)* が成り立つと仮定し, $\nu > 0$ とする. すると $\kappa \searrow 0$ としたときに, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ がある関数の組 $\{u_{\nu 0}, w_{\nu 0}\}$ に 次の意味で収束する.

$$\begin{aligned} u_{\nu\kappa} &\to u_{\nu 0} &&\textit{in } C_w([0,T];V), \\ \rho(u_{\nu\kappa}) &\to \rho(u_{\nu 0}) &&\textit{in } C_w([0,T];H), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} w_{\nu\kappa} \to w_{\nu 0} \quad &\textit{weakly in } W^{1,2}(0,T;H), \\ &\textit{in } C_w([0,T];V) \cap L^2(0,T;V). \end{aligned} \tag{2.2}$$

そのうえ, 極限関数 $\{u_{\nu 0}, w_{\nu 0}\}$ は問題 $(P_{\nu 0})$ の一意解になる.

上の定理は Colli-Sprekels [4] の結果の改良になっている. その中では, $\rho(u) = -\dfrac{1}{u}$ $(-\infty < u < 0)$ かつ $\lambda : \mathbf{R}$ で convex のとき, κ に関する問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解の収束を証明している. ここで Theorem 2.1 の証明を, [4] とは異なる方法で与える.

Proof of Theorem 2.1. $\nu > 0$ を固定し, 任意の $\kappa \in (0,1]$ に対し, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解を $\{u_\kappa, w_\kappa\}$ と表すとする.

$$\widehat{\rho^{-1}}(\rho(u_\kappa)) - \rho(u_\kappa) r_0 \ge \widehat{\rho^{-1}}(\rho(r_0)) - \rho(r_0) r_0 \quad \text{a.e. on } Q,$$

に注意すると, (1.8) と (1.9) より次が得られる.

$$\{u_\kappa\} \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;V), \tag{2.3}$$

$$\{\rho(u_\kappa)\} \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;H) \cap W^{1,2}(0,T;V^*), \tag{2.4}$$

$$\{w_\kappa\} \text{ is bounded in } W^{1,2}(0,T;H), \tag{2.5}$$

$$\{\sqrt{\kappa} w_\kappa\} \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;V). \tag{2.6}$$

また, (1.4) に $F_0 w_\kappa(t) (= -\Delta w_\kappa(t))$ をかけると次が得られる.

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}|\nabla w_\kappa(t)|_H^2 + \kappa |\Delta w_\kappa(t)|_H^2 \le (L(g) + M(\lambda'))|\nabla w_\kappa(t)|_H^2 + M(\lambda')|\nabla u_\kappa(t)|_H^2 \tag{2.7}$$

for a.e. $t \in [0,T]$, ここで $M(\lambda')$: λ' の $[\sigma_*, \sigma^*]$ 上の最大値. (2.7) を得るために (A3) より $\lambda''(w_\kappa)u_\kappa \le 0$ なので,

$$(\xi_\kappa(t), -\Delta w_\kappa(t)) \ge 0$$

かつ

$$\begin{aligned}
&(\lambda'(w_\kappa(t))u_\kappa(t), -\Delta w_\kappa(t))\\
&\quad= \int_\Omega \lambda''(w_\kappa(t))u_\kappa(t)|\nabla w_\kappa(t)|^2 dx + \int_\Omega \lambda'(w_\kappa(t))\nabla u_\kappa(t)\cdot\nabla w_\kappa(t)dx\\
&\quad\le \int_\Omega \lambda'(w_\kappa(t))\nabla u_\kappa(t)\cdot\nabla w_\kappa(t)dx\\
&\quad\le M(\lambda')(|\nabla w_\kappa(t)|_H^2 + |\nabla u_\kappa(t)|_H^2),
\end{aligned}$$

を用いた. (2.7) に Gronwall の lemma を使い, (2.3) に注意すると,

$$\begin{cases} \{w_\kappa\} \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;V), \\ \{\sqrt{\kappa}\Delta w_\kappa\} \text{ is bounded in } L^2(0,T;H). \end{cases} \tag{2.8}$$

次に, $\{\kappa_n\}$ を $(0,1]$ の 0 に収束する任意の減少列とすると, Lemma 1.1, の (1.11) より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{|e_n(t)-e_m(t)|_{V^*}^2 + \nu|w_n(t)-w_m(t)|_H^2\}\\
&\quad+\int_\Omega \nabla(\kappa_n w_n(t) - \kappa_m w_m(t))\cdot\nabla(w_n(t)-w_m(t))dx\\
&\quad\le L(g)|w_n(t)-w_m(t)|_H^2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

for a.e. $t \in [0,T]$, ここで $\{u_n, w_n\} := \{u_{\kappa_n}, w_{\kappa_n}\}$ かつ $e_n := \rho(u_n) + \lambda(w_n)$.

(2.9) より

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{\exp(-\frac{2L(g)}{\nu})(|e_n(t)-e_m(t)|_{V^*}^2 + \nu|w_n(t)-w_m(t)|_H^2)\}\\
&\quad+2\exp(-\frac{2L(g)}{\nu}t)\int_\Omega \nabla(\kappa_n w_n(t) - \kappa_m w_m(t))\cdot\nabla(w_n(t)-w_m(t))dx\\
&\quad\le 0,
\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}
&\exp(-\frac{2L(g)}{\nu}s)(|e_n(s)-e_m(s)|_{V^*}^2 + \nu|w_n(s)-w_m(s)|_H^2)\\
&\quad+2\int_0^s\int_\Omega \exp(-\frac{2L(g)}{\nu}t)\nabla(\kappa_n w_n - \kappa_m w_m)\cdot\nabla(w_n-w_m)dxdt\\
&\quad\le 0
\end{aligned}$$

for all $s \in [0,T]$. 特に, $\widetilde{w}_n := \exp(-\frac{L(g)}{\nu}t)w_n$ とおくと

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla(\kappa_n\widetilde{w}_n - \kappa_m\widetilde{w}_m)\cdot\nabla(\widetilde{w}_n - \widetilde{w}_m)dxds \le 0.$$

よって, [3, Lemma 2.4] より, 上の不等式と (2.8) から

$$\{\nabla\widetilde{w}_n\} \text{ is Cauchy in } L^2(0,T;H)^N.$$

つまり

$$\{w_n\} \text{ is Cauchy in } L^2(0,T;V)\cap C([0,T];H) \tag{2.10}$$

$$\{\rho(u_n)\} \text{ is Cauchy in } C([0,T];V^*). \tag{2.11}$$

さらに, (2.10) と (2.11) にそれぞれ (2.8) と (2.4) をあわせると, ある関数 w と χ に対して

$$w_n \to w \quad \text{in } C_w([0,T];V) \tag{2.12}$$

$$\rho(u_n) \to \chi \quad \text{in } C_w([0,T];H). \tag{2.13}$$

今, $\{u_n\}$ が u に weakly* in $L^\infty(0,T;V)$ で収束するように $\{n\}$ の部分列をとり, あらためて $\{n\}$ と表すと, $\chi = \rho(u)$, すなわち, $\rho(u_n) \to \rho(u)$ in $C_w([0,T];H)$. 実際, $\rho(u_n) \to \chi$ in $C([0,T];V^*)$ より,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T(\rho(u_n), u_n - u)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^T\langle\rho(u_n), u_n - u\rangle dt = 0,$$

これは $L^2(0,T;H)$ での maximal monotone の議論を使うと $\chi = \rho(u)$. その上, u_n, $u \in C_w([0,T];V)$ かつ $u_n \to u$ in $C_w([0,T];V)$ が得られる.

一方,

$$\begin{cases} \xi_n := -\nu w_n' + \kappa_n\Delta w_n - g(w_n) + \lambda'(w_n)u_n \\ \quad \to -\nu w' - g(w) + \lambda'(w)u =: \xi \quad \text{weakly in } L^2(0,T;H), \\ \text{and } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } Q. \end{cases} \tag{2.14}$$

最後に, (2.3)-(2.5), (2.8), (2.12)-(2.14) 及び Corollary 1.1 より, 極限関数 $\{u,w\}$ は問題 $(P_{\nu 0})$ の一意解である. (2.1) と (2.2) の $\kappa \searrow 0$ としたときの収束は, 部分列$\kappa_n \searrow 0$ のとりかたによらない. □

3. Asymptotic convergence in $(P_{\nu\kappa})$ as $\nu \searrow 0$

この節では, $\kappa > 0$ を固定し, ρ と λ により強い仮定をおいて, $\nu \searrow 0$ としたときの問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ の挙動について述べる.

(A1) と (A3) のかわりに, 次を仮定する:

(A1)′ $\rho : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: bi-Lipschitz 連続な増加関数;

(A3)′ $\lambda(r) = r$ for all $r \in \mathbf{R}$.

最初に問題 $(P_{0\kappa})$ with $\lambda(r) \equiv r$ の解の定義を与える.

Definition 3.1. 2つの関数 $u := u_{0\kappa} : [0,T] \to V$ と $w := w_{0\kappa} : [0,T] \to V$ の組が次の条件 $(\mathrm{w1})_{0\kappa}$-$(\mathrm{w3})_{0\kappa}$ を満たすとき, 問題 $(P_{0\kappa})$ with $\kappa > 0$ の解という:

$(\mathrm{w1})_{0\kappa}$ $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$, $w \in L^\infty(0,T;V)$, $(\rho(u)+w)' \in L^2(0,T;V^*)$ and $(\rho(u)+w)(0) = \rho(u_0) + w_0$.

$(\mathrm{w2})_{0\kappa}$ 任意の $z \in V$ と a.e. $t \in [0,T]$ に対して, (1.1) が成り立つ.

$(\mathrm{w3})_{0\kappa}$ 任意の $z \in V$ と a.e. $t \in [0,T]$ に対して $\xi \in L^2(0,T;H)$ が存在して, $\xi \in \beta(w)$ a.e. on Q かつ

$$\kappa a(w(t),z) + (\xi(t) + g(w(t)) - u(t), z) = 0, \tag{3.1}$$

すると次の結果が得られた.

Theorem 3.1. *(A1)′, (A2), (A3)′, (A4), (A5), (H1)-(H4)* が成り立つと仮定し, 加えて次を仮定する: $\beta + g + \dfrac{1}{L(\rho)} I$ *: strongly monotone on* $[\sigma_*, \sigma^*]$, ここで $L(\rho)$ は ρ の *Lipschitz* 定数とする. すなわち, ある正の定数 c_0 が存在して, 次が成り立つ:

$$(\xi_1 - \xi_2 + g(r_1) - g(r_2) + \frac{1}{L(\rho)}(r_1 - r_2))(r_1 - r_2) \ge c_0 |r_1 - r_2|^2 \tag{3.2}$$

for all $r_i \in D(\beta)$, $\xi_i \in \beta(r_i)$, $i = 1, 2$.

$\kappa > 0$ を正の定数とする. すると問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ は $\nu \searrow 0$ としたときに, ある関数の組 $\{u_{0\kappa}, w_{0\kappa}\}$ に次の意味で収束する:

$$\begin{aligned} u_{\nu\kappa} \to u_{0\kappa} \quad & \text{in } L^2(0,T;H), \\ & \text{weakly in } L^2(0,T;V), \\ & \text{weakly* in } L^\infty(0,T;H), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} w_{\nu\kappa} \to w_{0\kappa} \quad & \text{in } L^2(0,T;V), \\ & \text{weakly* in } L^\infty(0,T;V), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\rho(u_{\nu\kappa}) + w_{\nu\kappa} \to \rho(u_{0\kappa}) + w_{0\kappa} \quad \text{in } L^2(0,T;H) \cap C_w([0,T];H). \tag{3.5}$$

そのうえ, 極限関数 $\{u_{0\kappa}, w_{0\kappa}\}$ は問題 $(P_{0\kappa})$ の一意解となる.

Proof. (*Uniqueness for* $(P_{0\kappa})$) $\{u_i, w_i\}$ を問題 $(P_{0\kappa})$ on $[0,T]$ の２つの解 (Definition 3.1 の意味で) とし,

$$e_i := \rho(u_i) + w_i \ (\in C_w([0,T];H) \cap L^2(0,T;V)),\ i = 1,2.$$

とおく.

(1.3) と (1.4) と同様に,

$$e_1'(t) + e_2'(t) + F(u_1(t) - u_2(t)) = 0 \tag{3.6}$$

for a.e. $t \in [0,T]$ and

$$\kappa F_0(w_1(t) - w_2(t)) + (\xi_1(t) - \xi_2(t)) + (g(w_1(t)) - g(w_2(t))) = u_1(t) - u_2(t) \tag{3.7}$$

for a.e. $t \in [0,T]$, ここで $\xi_i \in L^2(0,T;H)$ with $\xi_i \in \beta(w)$ a.e. on Q, $i = 1,2$. (3.6) に $F^{-1}(e_1(t) - e_2(t))$ をかけ, (3.7) に $w_1(t) - w_2(t)$ をかけると,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_1(t) - e_2(t)|^2_{V^*} + (u_1(t) - u_2(t), e_1(t) - e_2(t)) = 0 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &\kappa|\nabla(w_1(t) - w_2(t))|^2_H + (\xi_1(t) - \xi_2(t) + g(w_1(t)) - g(w_2(t)), w_1(t) - w_2(t)) \\ &\quad = (u_1(t) - u_2(t), w_1(t) - w_2(t)) \end{aligned} \tag{3.9}$$

for a.e. $t \in [0,T]$.

$$\begin{aligned} &(u_1 - u_2, w_1 - w_2) \\ &\quad = (u_1 - u_2, e_1 - e_2) - (\rho^{-1}(e_1 - w_1) - \rho^{-1}(e_2 - w_2), (e_1 - w_1) - (e_2 - w_2)) \\ &\quad \le (u_1 - u_2, e_1 - e_2) - \frac{1}{L(\rho)}|(e_1 - w_1) - (e_2 - w_2)|^2_H. \end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.8) と (3.9) を加え, (3.10) を使うと

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_1(t) - e_2(t)|^2_{V^*} + \kappa|\nabla(w_1(t) - w_2(t))|^2_H + \frac{1}{L(\rho)}|e_1(t) - e_2(t)|^2_H \\ &\quad + (\xi_1(t) - \xi_2(t) + g(w_1(t)) - g(w_2(t)) + \frac{1}{L(\rho)}(w_1(t) - w_2(t)), w_1(t) - w_2(t)) \\ &\quad \le \frac{2}{L(\rho)}(e_1(t) - e_2(t), w_1(t) - w_2(t)) \end{aligned} \tag{3.11}$$

for a.e. $t \in [0,T]$. さらに, 任意の小さい $\delta > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} &(e_1(t) - e_2(t), w_1(t) - w_2(t)) \\ &\quad \le \delta\{|\nabla(w_1(t) - w_2(t))|^2_H + |w_1(t) - w_2(t)|^2_H\} + C_\delta|e_1(t) - e_2(t)|^2_{V^*} \end{aligned} \tag{3.12}$$

for all $t \in [0,T]$, ここで C_δ は δ によらない正の定数. (3.11) (3.12) と (3.2) より

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_1(t)-e_2(t)|_{V^*}^2+(\kappa-\frac{2\delta}{L(\rho)})|\nabla(w_1(t)-w_2(t))|_H^2+\frac{1}{L(\rho)}|e_1(t)-e_2(t)|_H^2\\&\quad+(c_0-\frac{2\delta}{L(\rho)})|w_1(t)-w_2(t)|_H^2\le\frac{2C_\delta}{L(\rho)}|e_1(t)-e_2(t)|_{V^*}^2\end{aligned} \tag{3.13}$$

for a.e. $t \in [0,T]$. よって Gronwall の lemma より $e_1 = e_2$ かつ $w_1 = w_2$, i.e. $\{u_1, w_1\} = \{u_2, w_2\}$.

(*Convergence of* $(P_{\nu\kappa})$ *as* $\nu \searrow 0$) $\{\nu_n\}$ を 0 に収束する任意の列とし, 簡単のため, 問題 $(P_{\nu_n\kappa})$ の解 $\{u_{\nu_n\kappa}, w_{\nu_n\kappa}\}$ を $\{u_n, w_n\}$ と表す. すると, 条件 (A1)$'$ のもとでの不等式 (1.8) より

$$\begin{cases}\{u_n\} \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V),\\ \{w_n\} \text{ is bounded in } L^\infty(0,T;V),\\ \{\rho(u_n)+w_n\} \text{ is bounded in } L^2(0,T;V)\cap W^{1,2}(0,T;V^*),\\ \{\sqrt{\nu_n}w_n'\} \text{ is bounded in } L^2(0,T;H).\end{cases} \tag{3.14}$$

これらの評価より $\{n\}$ の部分列 (あらためて $\{n\}$ と表す) と, 関数の組 $\{u, w\}$ が存在し,

$$\begin{cases}u_n \to u & \text{weakly in } L^2(0,T;V) \text{ and weakly* in } L^\infty(0,T;H),\\ w_n \to w & \text{weakly* in } L^\infty(0,T;V),\\ \nu_n w_n' \to 0 & \text{in } L^2(0,T;H).\end{cases} \tag{3.15}$$

一意性の証明と同様に, $e_n = \rho(u_n) + w_n$, δ と C_δ に対し, (3.13) と同様に,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|e_n(t)-e_m(t)|_{V^*}^2+(\kappa-\frac{2\delta}{L(\rho)})|\nabla(w_n(t)-w_m(t))|_H^2+\frac{1}{L(\rho)}|e_n(t)-e_m(t)|_H^2\\&\quad+(c_0-\frac{2\delta}{L(\rho)})|w_n(t)-w_m(t)|_H^2+(\nu_n w_n'(t)-\nu_m w_m'(t),w_n(t)-w_m(t))\\&\quad\le\frac{2C_\delta}{L(\rho)}|e_n(t)-e_m(t)|_{V^*}^2\end{aligned}$$

for a.e. $t \in [0,T]$. (3.15) と併せて考えると $\{e_n\}$: Cauchy in $C_w([0,T];V^*)\cap L^2(0,T;H)$ かつ $\{w_n\}$: Cauchy in $L^2(0,T;V)$ が得られる. 従って, $n \to +\infty$ としたときに,

$$w_n \to w \quad \text{in } L^2(0,T;V) \tag{3.16}$$

$$u_n = \rho^{-1}(e_n - w_n) \to u = \rho^{-1}(e-w) \quad \text{in } L^2(0,T;H)$$

i.e.

$$\rho(u_n) \to \rho(u) \quad \text{in } L^2(0,T;H), \tag{3.17}$$

ここで $e=\rho(u)+w$. この場合は

$$(\rho(u_n)+w_n)' \to (\rho(u)+w)' \quad \text{weakly in } L^2(0,T;V^*). \tag{3.18}$$

その上, $\{w_n\}$ が $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ で有界より,

$$\kappa F_0 w_n + \beta(w_n) \ni l_n := -\nu_n w_n' - g(w_n) + u_n$$

かつ $\{l_n\}$: $L^2(0,T;H)$ で有界. その結果,

$$\begin{cases} \xi_n := -\nu_n w_n' - \kappa F_0 w_n - g(w_n) + u_n \\ \quad \to -\kappa F_0 w - g(w) + u =: \xi \quad \text{weakly in } L^2(0,T;H) \\ \text{and } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } Q. \end{cases} \tag{3.19}$$

(3.15)-(3.19) より極限 $\{u,w\}$ は問題 $(P_{0\kappa})$ の解で, (3.3)-(3.5) が成り立つ. □

参考文献

[1] J. F. Blowey and C. M. Elliott, A phase-field model with a double obstacle potential, in *Motion by Mean Curvature*, pp. 1-22, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

[2] G. Caginalp, An analysis of a phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal., **92**(1986), 205-245.

[3] M. G. Crandall and A. Pazy, Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Funct. Anal. **3**(1969), 376-418.

[4] P. Colli and J.Sprekels, On a Penrose-Fife model with zero interfacial energy leading to a phase-field system of relaxed Stefan type, IAAS, Preprint, No. 104, Berlin, 1994.

[5] W. Horn, J. Sprekels and S. Zheng, Global existence of smooth solutions to the Penrose-Fife models for Ising ferromagnets, preprint, Univ. GH Essen, 1993.

[6] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, Lecture Notes Math. Vol. **1584**, pp. 39-86, Springer Verlag, 1994.

[7] N. Kenmochi, Uniqueness of the solution to a nonlinear system arising in phase transition, in *Nonlinear Analysis and Applications*, Gakuto Inter. Ser. Math. Sci. Appl., Vol. **6**, 1995.

[8] N. Kenmochi and M. Niezgódka, Evolution systems of nonlinear variational inequalities arising from phase change problems, Nonlinear Anal., **22**(1994), 1163-1180.

[9] N. Kenmochi and M. Niezgódka, Systems of nonlinear parabolic equations for phase change problems, Adv. Math. Sci. Appl. **3**(1993/94), 89-117.

[10] Ph. Laurençot, Solutions to a Penrose-Fife model of phase-field type, J. Math. Anal. Appl., 185(1994), 262-274.

[11] Ph. Laurençot, Weak solutions to a Penrose-Fife model for phase transitions, Adv. Math. Sci. Appl. Vol. 5, No.1(1995), 117-138.

[12] O. Penrose and P. C. Fife, Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions, Physica D, **43**(1990), 44-62.

[13] J. Shirohzu, N. Sato and N. Kenmochi, Asymptotic convergence in models for phase change problems, in Nonlinear Analysis and Applications, GAKUTO Inter. Ser. Math. Sci. Appl., Vol. 7, Gakkōtosho, Tokyo, 1995, 361-385.