数理解析研究所講究録
956巻 1996年 53-60

A relation between two subfactors arising from a non-degenerate commuting square

—An answer to a question raised by V. F. R. Jones—

佐藤 信哉 (東大数理)

1 V. F. R. Jones の問題

V. F. R. Jones は1995年7月のデンマークでの研究集会において次の問題を出した．まず，次のような 有限次元 non-degenerate commuting square を考える．

$$\begin{array}{ccc} R_{00} & \subset & R_{01} \\ \cap & & \cap \\ R_{10} & \subset & R_{11} \end{array}$$

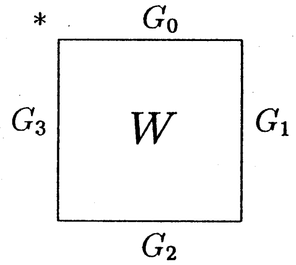
すなわち， $R_{00}, R_{01}, R_{10}, R_{11}$ は 有限次元 C^*-algebra で， R_{11} は Markov trace を持つとする．さらに，それぞれの inclusion matrix は irreducible であるとする．この commuting square は，周期２を持つので，basic construction を繰り返して，次のような周期２の commuting square の列が得られる．

$$\begin{array}{ccccccccc} R_{00} & \subset & R_{01} & \subset & R_{02} & \subset & \cdots & \subset & R_{0\infty} \\ \cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\ R_{10} & \subset & R_{11} & \subset & R_{12} & \subset & \cdots & \subset & R_{1\infty} \\ \cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\ R_{20} & \subset & R_{21} & \subset & R_{22} & \subset & \cdots & \subset & R_{2\infty} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ R_{\infty 0} & \subset & R_{\infty 1} & \subset & R_{\infty 2} & \subset & \cdots & & \end{array}$$

ここで，横方向に basic constructon を繰り返すことにより，AFD II_1 subfactor $R_{0\infty} \subset R_{1\infty}$ を得る．同様にして，縦方向に basic construction を繰り返すことにより，AFD II_1 subfactor $R_{\infty 0} \subset R_{\infty 1}$ を得る．この２つの subfactor には関係があるか？また，一方の subfactor が finite depth であれば，もう一方もそうか? これが V. F. R. Jones の問題である．

この問題を私の論文 [S] で解決した．１つ目の問いに対しては，２つの subfator は 同じ global index を持つことがわかった．また，２つ目の問いに対しては，肯定的的な答えを得た．いずれの問題にも，paragroup の手法を用いて解決した．以下，これを説明したい．

まず，上の問題を paragroup 理論の言葉を使って書き直す．G_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ を 下の図のように配置された finite, bipartite, connected graph とする．ただし，G_0 と G_2 (G_1 と G_3) は共通の Perron-Frobenius 固有値を持つとし，G_0 の even vertex の集合 V_0 には distinguished vertex $*$ があるとする．また，W を上の４つのグラフ上の biunitary connection とする．



これに string algebra construction を適用すると，次のような有限次元 C^*-algebra の 2 重増大列を得る．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A_{0,0} & \subset & A_{0,1} & \subset & A_{0,2} & \subset & \cdots & \subset & A_{0,\infty} \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
A_{1,0} & \subset & A_{1,1} & \subset & A_{1,2} & \subset & \cdots & \subset & A_{1,\infty} \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
A_{2,0} & \subset & A_{2,1} & \subset & A_{2,2} & \subset & \cdots & \subset & A_{2,\infty} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
A_{\infty,0} & \subset & A_{\infty,1} & \subset & A_{\infty,2} & \subset & \cdots & &
\end{array}
$$

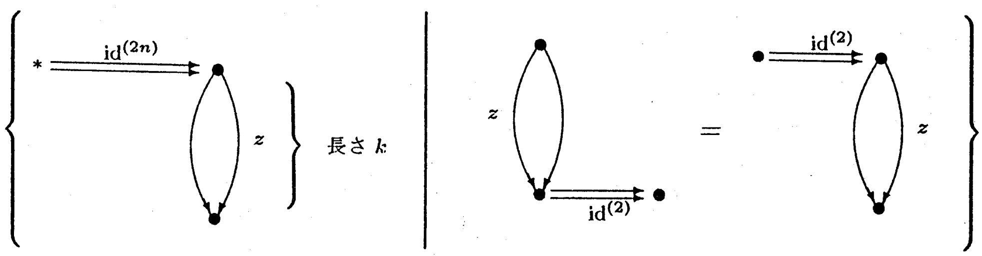
以下，議論したいのは 2つの AFD II_1 subfactor $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ と $A_{\infty,0} \subset A_{\infty,1}$ の関係である．

2 Compactness argument と flatness

上で構成された AFD II_1 subfactor の増大列 $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty} \subset A_{2,\infty} \subset A_{3,\infty} \subset \cdots$ は，$A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ の basic construction から得られることが知られている ([O3])．さらに，これらの higher relative commutant は，次のように string の言葉で記述できることが知られている．これは，A. Ocneanu の compactness argument と呼ばれている．

Theorem 2.1

$A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty} =$



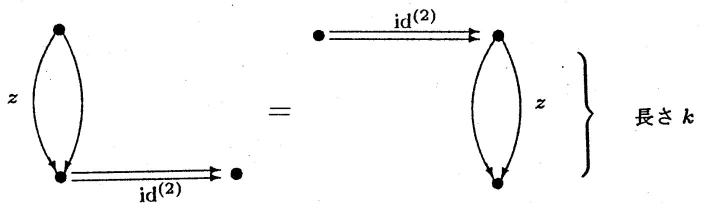
ここで，$\mathrm{id}^{(2n)} = \sum_{\xi,|\xi|=2n}(\xi,\xi) \in A_{0,2n}$ であり，$2n$ は G_0 の depth より大きい任意の偶数である．

すなわち，$A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty}$ は，埋め込んだ後の connection による同一視で形を変えない G_3 上の長さ k の string 全体で与えられる．

これより特に，次の inclusion が得られる．

$$A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty} \subset A_{k,0}$$

Definition 2.2 $A_{k,0} \ni \forall \sigma$ に対して，次の式を満たすような z が存在する時，biunitary connection W は，$*$ について *flat* であるという．



また，$A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty}$ を *flat part*，$z = \{z(x)\}_{x \in V_0}$ を G_3 上の *flat field* という．

Flat part については，次の事実が知られている．

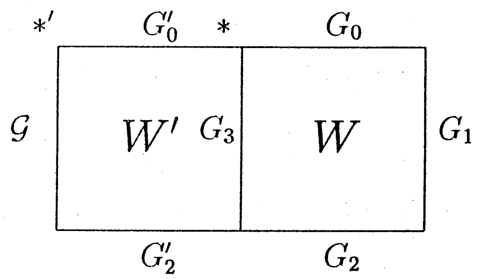
Proposition 2.3 ([E-K], **Proposition 3.1**) $\{A_{k,l}\}_{k,l \geq 0}$ を *biunitary connection* W から得られる *string algebra* とする．このとき，次の図式は周期２の *commuting square* になる．

$$\begin{array}{ccc} A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty} & \subset & A_{k,0} \\ \cap & & \cap \\ A'_{0,\infty} \cap A_{k+1,\infty} & \subset & A_{k+1,0} \end{array} \tag{2.1}$$

この Proposition により，上の commuting square から biunitary connection が得られる．これを W' と表すことにする．さらに，次の図式も周期２の commuting square を成すことがわかる．

$$\begin{array}{ccc} A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty} & \subset & A_{k,1} \\ \cap & & \cap \\ A'_{0,\infty} \cap A_{k+1,\infty} & \subset & A_{k+1,1} \end{array} \tag{2.2}$$

この commuting square に対応する biunitary connection を $W' \cdot W$ と表すことにする．また，$\mathcal{G}$ を $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ の principal graph とし，$\mathcal{G}$ の even vertex の集合 V'_0 の元で，$A_{0,\infty}$-$A_{0,\infty}$ bimodule $A_{0,\infty}$ に相当するものを $*'$ で表す．

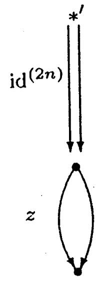


上の記号の下で，次の主定理を得る．

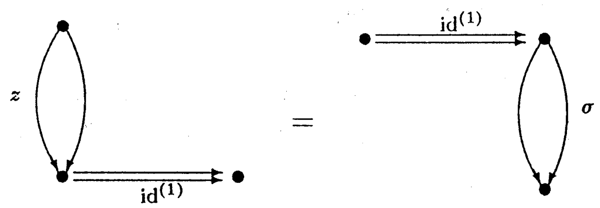
Theorem 2.4 *Subfactor* $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ が *finite depth* であるとする．この時，*connection* $W' \cdot W$ は $*'$ について *flat* である．

Proof. $A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty} \ni \sigma^0$ に対して，$z(*) = \sigma^0$ となる $z = \{z(x)\}_{x \in V'_0}$ を作ればよい．

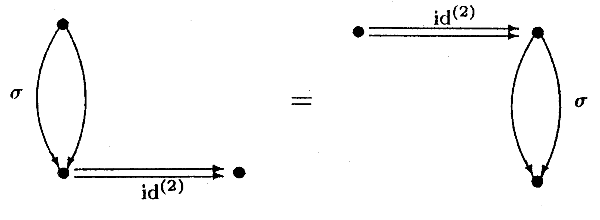
σ^0 に canonical shift Γ([O1],[B2]) を n 回施す．ただし，n は十分大きいものとする．すると，$\Gamma^n(\sigma^0) \in A'_{2n,\infty} \cap A_{k+2n,\infty}$ である．$A'_{2n,\infty} \cap A_{k+2n,\infty} \subset A'_{0,\infty} \cap A_{k+2n,\infty}$ であり，$\Gamma^n(\sigma^0)$ は $A_{2n,\infty}$ の任意の元と可換なので，次の形をしている．

$\Gamma^n(\sigma^0) =$ 

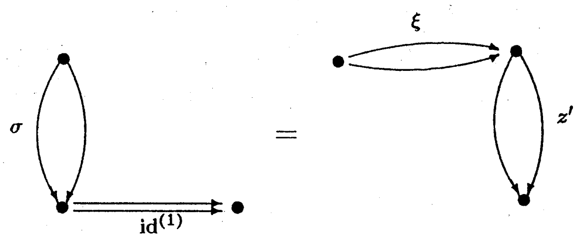
この図に現れる長さ k の部分を $z = \{z(x)\}_{x \in V'_0}$ と表すことにする．この時，Γ^n の性質により，$z(*) = \sigma^0$ である．また，$\Gamma^n(\sigma^0)$ は $A'_{0,\infty} \cap A_{k+2n,\infty}$ の元なので，compactness argument により，$A_{k+2n,0}$ の元と自然に同一視できる．したがって，connection W' による同一視で，次の等式が成立する．



さらに，この string を埋め込むと，σ は flat field なのであるから，connection W による同一視で，次の等式が成立する．

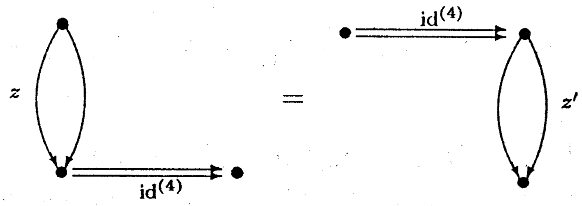


これを再び埋め込んで，connection W' による同一視で次のようになる．



$\{C_{p,q}\}_{p,q\geq 0}$ を connection $W'\cdot W$ による $*'$ を出発点とする string algebra とする．$C_{2n,2}$ において，$\mathrm{id}^{(2n)}\cdot z$ と $C_{2n,1}$ の任意の元は可換であり，また，$e\in C_{2n,2}$ とも可換であること，及び $C_{2n,2}$ が $C_{2n,1}$ と Jones projection e により生成されることから，$\mathrm{id}^{(2n)}\cdot z$ は $C_{2n,2}$ の任意の元と可換であることがわかる．ここで，$\cdot$ は path の連接を表す．したがって，これより $\xi=\mathrm{id}^{(1)}$ がわかる．

以上より，connection $W'\cdot W$ による同一視で次の等式がわかった．



すると，compactness argument の証明と同様の議論（[O3]，３３ページの１１行目）により，上の等式から $z=z'$ が従う．これが示したかったことである． □

3 主定理の応用– Jones の問題の回答

ここでは，上の主定理の応用として，Jones の問題に対する回答と例を与える．

Corollary 3.1 (Jones の問題の回答) *AFD II_1 subfactor $A_{0,\infty}\subset A_{1,\infty}$ あるいは $A_{\infty,0}\subset A_{\infty,1}$ のいずれか一方が finite depth であれば，もう一方もそうである．*

Proof. 条件の対称性より，$A_{0,\infty}\subset A_{1,\infty}$ が finite depth の時だけを証明すればよい．$B_k=A'_{0,\infty}\cap A_{k,\infty}$ とおくと，次の AFD II_1 factor の inclusion が得られる．

$$B_\infty\subset A_{\infty,0}\subset A_{\infty,1}$$

主定理により，$W'\cdot W$ が $*'$ について flat なので，$B_\infty\subset A_{\infty,1}$ の principal graph は元の finite graph G_0 と W' の horizontal graph G'_0 を繋げたものに一致する．すなわち，AFD II_1 subfactor $B_\infty\subset A_{\infty,1}$ は finite depth である．Bisch の定理 ([B1], Theorem 2.6) により，$A_{\infty,0}\subset A_{\infty,1}$ も finite depth である． □

次に，もう1つのの Jones の問題の回答を与える．

今考えている2つの subfactor の Jones index についての一般的な関係は望めないことは容易に分かる．そこで，Jones index に代わる不変量として次に定義する global index がある．

Definition 3.2 AFD II_1 subfactor $N \subset M$ の *global index* とは，

$$\sum_{{}_M X_M:\text{irreducible}} (\dim {}_M X_M)^2$$

で定義される実数であり，これを $[[M:N]]$ と表す．

次の Lemma は bimodule の既約分解を使えば容易に証明される．

Lemma 3.3 *AFD II_1 subfactor $N \subset M$ が Jones index 有限であり，intermediate subfactor P が存在すると仮定する．この時，$[[M:P]] \le [[M:N]]$ が成り立つ．*

主定理とこの Lemma より，次の結果が示される．

Corollary 3.4 *2つの AFD II_1 subfactor $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$，$A_{\infty,0} \subset A_{\infty,1}$ の global index は等しい．*

Proof. まず始めに，$A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ が finite depth であるとする．$B_\infty \subset A_{\infty,1}$ の principal graph と $A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ の principal graph は 共通の even vertex を持つことに注意する．この 注意と上の Lemma から，global index についての次の不等式を得る．

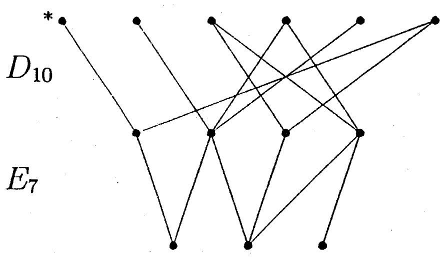
$$[[A_{\infty,1} : A_{\infty,0}]] \le [[A_{\infty,1} : B_\infty]] = [[A_{1,\infty} : A_{0,\infty}]]$$

対称性により，$[[A_{\infty,1} : A_{\infty,0}]] \ge [[A_{1,\infty} : A_{0,\infty}]]$．したがって，$[[A_{\infty,1} : A_{\infty,0}]] = [[A_{1,\infty} : A_{0,\infty}]]$．

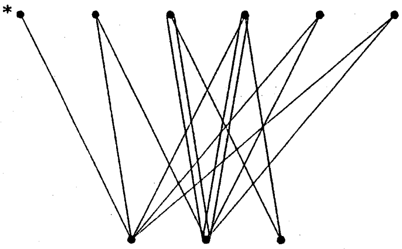
次に，$A_{0,\infty} \subset A_{1,\infty}$ が infinite depth であるとする．この時，上の Corollary より，$A_{\infty,0} \subset A_{\infty,1}$ も infinite depth である，これらの subfactor の global index はその定義により，共に無限大である． □

Remark 3.5 *Flat part* と元の $A_{0,k}$ を繋ぐ *horizontal graph* G_0, G_0' は有限とは限らないのであるが，これらが共に 有限である時には，上の主定理と同様にして W' 自身が *flat* であることがわかる．

Example 3.6 E_7 commuting square を考える．すなわち，4つの graph が Dynkin diagram E_7 であり，その上の biunitary connection を考える．この時，biunitary connection は，同型を除いて2つ存在し，いずれも flat でないことが知られている．そして，この biunitary connection の flat part $B_k = A'_{0,\infty} \cap A_{k,\infty}$ は，Evans-Kawahigashi([E-K]) によって既に調べられており，principal graph は Dynkin diagram D_{10} である事が分かっている．元の縦の graph E_7 と flat part の graph D_{10} を繋ぐ horizontal graph G_0' は，Bratteli diagram の入りかたから，やはり Dynkin diagram D_{10} であり，その繋ぎかたは下図で与えられることがわかる．



主定理により，AFD II_1 subfactor $B_\infty \subset A_{\infty,1}$ の principal graph は上の D_{10} と E_7 を繋げたものであり，次の図で与えられる．



参考文献

[B1] D. Bisch, A note on intermediate subfactors, *Pacific. J. Math.* **163** (1994), 201–216.

[B2] D. Bisch, Bimodules, higher relative commutants and the fusion algebra associated to a subfactor, preprint, (1995).

[E-K] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, The E_7 commuting square produce D_{10} as principal graph, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **30** (1994), 151–166

[G-H-J] F. Goodman, P. de la Harpe, & V. F. R. Jones, "Coxeter graphs and towers of algebras", MSRI publications 14, Springer, (1989).

[J] V.F.R. Jones, Index of subfactors, *Invent. Math.* **72** (1983), 1–15.

[K] Y. Kawahigashi, On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors, *J. Funct. Anal.* **127** (1995), 63–107.

[O1] A. Ocneanu, Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, (1988), pp. 119–172.

[O2] A. Ocneanu, "Graph geometry, quantized groups and nonamenable subfactors", Lake Tahoe Lectures, June–July, (1989).

[O3] A. Ocneanu, "Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors", University of Tokyo Seminary Notes **45**, (Notes recorded by Y. Kawahigashi), (1991).

[P1] S. Popa, Classification of subfactors: reduction to commuting squares, *Invent. Math.* **101** (1990), 19–43.

[P2] S. Popa, Classification of amenable subfactors of type II, *Acta Math.*, **172** (1994), 163–255.

[S] N. Sato, A relation between two subfactors arising from a non-degenerate commuting square —An answer to a question raised by V. F. R. Jones— , preprint, (1995)