数理解析研究所講究録
969巻 1996年 178-187

退化したSchrödinger型方程式に対する初期値問題
(The Cauchy problem for Schrödinger type equation with degeneracy)

京都大学大学院 人間・環境学研究科 D1
安藤 広 (Hiroshi Ando)

第1章 序論と結果

次のSchrödinger型方程式を考える。

$$
(1.1)\begin{cases}
\left\{\partial_t + i\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} D_j(a_{jk}(x)D_k) + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)D_j + c(t,x)\right\}u(t,x) \\
\qquad\qquad = f(t,x) \quad \text{in } \mathcal{D}'((0,T)\times \mathbb{R}^n_x) \\
u(0,x) = u_0(x)
\end{cases}
$$

ここで、$i=\sqrt{-1}$, $D_j = -i\partial_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $T>0$ とし、次の仮定をおく。

$$
(A1)\begin{cases}
a_{jk} \in B^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ real valued},\ a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \quad (1\le j,k\le n) \\
b_j,\ c \in C([0,T];B^\infty(\mathbb{R}^n)) \quad (1\le j\le n) \\
{}^\exists\delta \ge 0 \ \text{ s.t. } \ \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \ge \delta|\xi|^2 \quad \text{for } x,\xi\in\mathbb{R}^n
\end{cases}
$$

以下、$a_2(x,\xi)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(x)\xi_j\xi_k$, $a_1(t,x,\xi)=\sum_{j=1}^{n}b_j(t,x)\xi_j$ とおく。

これまでに、このような初期値問題(1.1)の Sobolev 空間 H^s の枠における well-posedness について、いくつかの研究が行われてきた。それらのうち、必要性に関しては、L^2 well-posed の場合については Ichinose [Ic.2] が、H^∞ well-posed の場合については Hara [Ha] が知られている。また、十分性に関しては、$a_2(x,\xi)=\frac{1}{2}|\xi|^2$ の場合の [Ta][Mi][Ic.1][Do.1] etc、$a_2(x,\xi)$ が変数係数の場合の [Ka][Do.2] が知られている。

ところで、これらの結果では、$\delta>0$ (すなわち $a_2(x,\xi)$ は一様楕円型)の場合のみが扱われている。そこで、次のような問題が考えられる。

<u>問題</u>　$\delta=0$、すなわち $a_2(x,\xi)$ が退化している場合、低階 $a_1(t,x,\xi)$ に関する必要あるいは十分条件はどのようになるか？

ここでは、この問題に対して、特に十分条件を与えることを目的とするが、$a_2(x,\xi)$ が一般の退化型の場合には、これまで $a_2(x,\xi)$ が一様楕円型の場合に使われてきた方法とは異なった方法が必要と思われ、扱いが容易ではない

ので、次の特別な場合について考察することにする。

$$(1.2)\begin{cases} \left\{\partial_t + i\frac{1}{2}\left(D_1^2 + \psi(x_1)\sum_{j,k=2}^{n} D_j\left(a_{jk}(x')D_k\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)D_j + c(t,x)\right\}u(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad = f(t,x) \quad \text{in } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^n_x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

ここで、$x' = (x_2, \cdots, x_n)$, $\xi' = (\xi_2, \cdots, \xi_n)$, $n \geq 2$ で、次の(A 2)を仮定する。

(A 2) 次の(1.3)～(1.6) が成り立つ。

$$(1.3)\begin{cases} \psi \in B^\infty(\mathbb{R}),\ \psi(0)=0,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |t\psi'(t)| < \infty, \\ {}^\exists \mu, \nu > 0 \ \ s.t.\ \ t\psi'(t) \geq 0 \ \ (|t| \leq \mu),\ \psi(t) \geq \nu \ \ (|t| \geq \mu) \end{cases}$$

$$(1.4)\begin{cases} a_{jk} \in B^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ real valued},\ a_{jk}(x') = a_{kj}(x') \ \ (2 \leq j,k \leq n) \\ b_j,\ c \in C([0,T]\,;\,B^\infty(\mathbb{R}^n)) \qquad (1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

$$(1.5)\begin{cases} {}^\exists C_1 > 0 \ \ s.t.\ \ a_2'(x',\xi') \geq C_1|\xi'|^2 \ \ \text{for } x',\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \qquad \text{ここで、} a_2'(x',\xi') = \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk}(x')\xi_j\xi_k \end{cases}$$

$$(1.6)\begin{cases} {}^\exists \theta_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \ (2 \leq j \leq n) \ \ {}^\exists C_2, C_\alpha > 0 \ \ s.t. \\ |\partial_{x'}^\alpha \theta_j(x')| \leq C_\alpha(1+|x'|) \ \ \text{for } x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ 2 \leq j \leq n,\ \alpha \in \mathbb{N}^{n-1} \\ H_{a_2'}\theta(x',\xi') \geq C_2|\xi'|^2 \ \ \text{for } x',\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \qquad \text{ここで、} \theta(x',\xi') = \sum_{j=2}^{n} \theta_j(x')\xi_j \end{cases}$$

注意　(1.6)は [Do.2]で導入されたもので、もし[Ka]型条件　$^\exists\delta>0$　s.t.

$$2a_2'(x',\xi')-\sum_{j=2}^{n}x_j\partial_j a_2'(x',\xi')\geq\delta|\xi'|^2 \quad \text{for } x',\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$$

が成り立つならば、$\theta_j(x')=x_j$　$(2\leq j\leq n)$　ととれば、(1.6)は満たされる。

主要結果を述べる前に、記号を準備しておく。

$\langle\xi\rangle=(10+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ $(\xi\in\mathbb{R}^n)$, $L^2=L^2(\mathbb{R}^n)$, $(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_{L^2}$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2}$,

$H^s=H^s(\mathbb{R}^n)=\{u\in S'(\mathbb{R}^n);\langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi)\in L^2\}$, $\|u\|_s=\|\langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi)\|$ $(s\in\mathbb{R})$,

$H^\infty=\bigcap_{s\in\mathbb{R}}H^s$, $H^{-\infty}=\bigcup_{s\in\mathbb{R}}H^s$, $H_p=\sum_{j=1}^{n}(\partial_{\xi_j}p\,\partial_{x_j}-\partial_{x_j}p\,\partial_{\xi_j})$,

$C^k([0,T];X)=\{f;\ f(t,\cdot)\in C^k([0,T])$ in the topology of $X\}$,

$L^p([0,T];X)=\{f;\ f(t,\cdot)\in L^p([0,T])$ in the topology of $X\}$,

ここで X は Fréchet 空間, $k=0,1,2,\cdots$, $1\leq p\leq\infty$.

$C([0,T];H^{-\infty})=\bigcup_{s\in\mathbb{R}}C([0,T];H^s)$,

$L^p([0,T];H^\infty)=\bigcap_{s\in\mathbb{R}}L^p([0,T];H^s)$　$(1\leq p\leq\infty)$,

$S^m_{\rho,\delta}$ 及び $S(m,g)$ については、[Hö] Chap. 18 に従った。

$B^\infty(\mathbb{R}^n)=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \partial^\alpha f\in L^\infty\quad{}^\forall\alpha\in\mathbb{N}^n\}$.

さて、今回得られた主要結果は次の定理である。

<u>定理 1.1</u>　(A2) 及び次の (A3) を仮定する。

(A3)　$Re\ b_1 \in C^1([0,T]; B^\infty(\mathbb{R}^n))$

(1) もし正値単調非増加関数 $\lambda(t) \in C([0,\infty)) \cap L^1([0,\infty))$ で、

$$
(1.7)\begin{cases}
|Re\ b_1(t,x)| \le \lambda(|x|) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T \\
|Re\ \partial_j b_1(t,x)| \le \lambda(|x'|) & \text{for } |x_1| \le 2\mu,\ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ 0 \le t \le T,\ 2 \le j \le n \\
|Re\ b_j(t,x)| \le \psi(x_1)\lambda(|x|) & \text{for } x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T,\ 2 \le j \le n
\end{cases}
$$

を満たすものが存在するならば、任意の $u_0 \in H^s$, $f \in L^1([0,T]; H^s)$ に対して、(1.2) の解 $u \in C([0,T]; H^s)$ が存在し、それは $C([0,T]; H^{-\infty})$ において一意的である。

(2) もし正値単調非増加関数 $\lambda(t) \in C([0,\infty))$ で、

$$
{}^\exists C, C' > 0 \quad s.t. \quad \int_0^t \lambda(\tau)d\tau \le C\log(1+t) + C' \quad \text{for all } t \ge 0
$$

及び (1.7) を満たすものが存在するならば、任意の $u_0 \in H^s$, $f \in L^1([0,T]; H^s)$ に対して、(1.2) の解 $u \in C([0,T]; H^{s-\gamma})$ が存在し、それは $C([0,T]; H^{-\infty})$ において一意的である。さらに、任意の $u_0 \in H^\infty$, $f \in L^1([0,T]; H^\infty)$ に対して、(1.2) は一意的な解 $u \in C([0,T]; H^\infty)$ をもつ。ここで、$\gamma = \gamma(T) > 0$ は、s に依らない定数である。

定理 1.1 を証明するには、[Do.2] の Theorem 1.4 を改良

した次の定理を用いる。

<u>定理1.2</u>　(A1)及び次の(A4)(A5)を仮定する。

(A4)　$e\in S^1_{1,0}$ で、ある $\delta>0$ があって、$e(x,\xi)\ge\delta\langle\xi\rangle$,
$\{e, a_2\}\in S^1_{1,0}$ を満たすものが存在する。
ここで、$\{\cdot,\cdot\}$ は Poisson bracket を表す。

(A5)　実数値関数 $g\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ で、ある $C_{\alpha\beta}, C_1, C_2>0$ があって、次の(1.8)(1.9)を満たすものが存在する。

(1.8)　$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha g(x,\xi)|\le C_{\alpha\beta}\, m(x)\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$　for $x,\xi\in\mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$

(1.9)　$(H_{a_2}g)(x,\xi)\ge C_1\rho(x)|\xi|-C_2$　for $x,\xi\in\mathbb{R}^n$

ただし、$m\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と $\rho\in C(\mathbb{R}^n)$ は、ある $C, C', C'', C_\alpha>0$ があって、次の(1.10)(1.11)を満たすものとする。

(1.10)　$\begin{cases}\sqrt{10}\le m(x)\le C\langle x\rangle, \; |\partial^\alpha m(x)|\le C_\alpha & \text{for } x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\ge 1\\ 0\le\rho(x)\le C' & \text{for } x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$

(1.11)　$|(\nabla_\xi a_2\cdot\nabla_x m)(x,\xi)|\le C''\rho(x)|\xi|$　for $x,\xi\in\mathbb{R}^n$

(1) もし正値単調非増加関数 $\lambda(t)\in C([0,\infty))\cap L^1([0,\infty))$ で、

(1.12)　$|\mathrm{Re}\, b_j(t,x)|\le\rho(x)\lambda(|x|)$　for $x\in\mathbb{R}^n$, $0\le t\le T$, $1\le j\le n$

を満たすものが存在するならば、任意の $u_0\in H^s$, $f\in L^1([0,T];H^s)$ に対して、(1.1)の解 $u\in C([0,T];H^s)$ が存在し、それは $C([0,T];H^{-\infty})$ において一意的である。

(2) もし正値単調非増加関数 $\lambda(t) \in C([0,\infty))$ で、

$\exists C, C' > 0$ s.t. $\int_0^t \lambda(\tau)d\tau \le C\log(1+t) + C'$ for all $t \ge 0$

及び (1.12) を満たすものが存在するならば、任意の $u_0 \in H^s$, $f \in L^1([0,T]; H^s)$ に対して、(1.1) の解 $u \in C([0,T]; H^{s-\delta})$ が存在し、それは $C([0,T]; H^{-\infty})$ において一意的である。さらに、任意の $u_0 \in H^\infty$, $f \in L^1([0,T]; H^\infty)$ に対して、(1.1) は一意的な解 $u \in C([0,T]; H^\infty)$ をもつ。ここで、$\delta = \delta(T)$ は、s に依らない正定数である。

第2章　証明

まず、[Do.2] の Lemma 2.3 を改良した補題を用意する。

補題 2.1　(A1)(A4)(A5) を仮定する。そして $\lambda(t) \in C([0,\infty))$ は正値単調非増加関数とする。

(1) もし $\lambda \in L^1([0,\infty))$ ならば、ある $C > 0$ があって、

$$(H_{a_2} p)(x,\xi) \ge p(x)\lambda(|x|)|\xi| - C \quad \text{for } x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

となるような実数値関数 $p \in S^1_{1,0}$ が存在する。

(2) もし、ある $C, C' > 0$ があって、任意の $t \ge 0$ に対して $\int_0^t \lambda(\tau)d\tau \le C\log(1+t) + C'$ となるならば、ある $C_1, C_2 > 0$ があって、

$$(H_{a_2} p)(x,\xi) \ge p(x)\lambda(|x|)|\xi| - C_1\log\langle\xi\rangle - C_2 \quad \text{for } x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

を満たす実数値関数 $p \in S(\log\langle\xi\rangle, |dx|^2+\langle\xi\rangle^{-2}|d\xi|^2)$ が存在する。

<u>補題 2.1 の証明</u>　$K, L \ge 1$ を $|\delta(x,\xi)| \le K m(x)$, $m(x) \le L\langle x\rangle$ となるようにとり、固定する。$\lambda(t)$ は、$t \le 0$ に対して $\lambda(t)=\lambda(0)$ として拡張する。[Do.2] Lemma 3.1 より、$\lambda(K^{-1}L^{-1}t-\sqrt{10}) \le f'(t)$　$(t \ge 0)$ を満たす非負関数 $f \in C^\infty([0,\infty))$ がとれる。このとき、

$$f'(|\delta|) \ge \lambda(K^{-1}L^{-1}|\delta|-\sqrt{10}) \ge \lambda(\langle x\rangle-\sqrt{10}) \ge \lambda(|x|)$$

を得る。[Do.2] Lemma 2.3 の証明において、$\langle x\rangle$ を $m(x)$ に置き換え、(A4)(A5) に注意すれば、同様にして (1) (2) を証明することができる。(証明終)

<u>定理 1.2 の証明</u>　(1.12) より、定理 1.2 は、補題 2.1 と [Do.2] Lemma 2.1, 2.2 から直ちに得られる。(証明終)

<u>定理 1.1 の証明</u>　(1.3) より、$\tilde{\psi} \in B^\infty(\mathbb{R})$ を、$\tilde{\psi}(t)=\psi(t)$ $(|t| \le \mu)$, $\tilde{\psi}(t)=1$ $(|t| \ge 2\mu)$, ${}^\exists C>0$ s.t. ${}^\forall t \in \mathbb{R}$ に対して、$C^{-1}\psi(t) \le \tilde{\psi}(t) \le C\psi(t)$ となるようにとれる。そこで、$\phi(t,x) = \exp\left\{(1-\tilde{\psi}(x_1)^2)\int_0^{x_1} \mathrm{Re}\, b_1(t,s,x')\,ds\right\}$ とおく。

$\mathrm{supp}\,(1-\tilde{\psi}^2)$ 上で $|x_1|\le 2\mu$ となるから、(A 3)より、$\phi\in C^1([0,T];B^\infty(\mathbb{R}^n))$ を得る。(1.2)の両辺に $\phi(t,x)$ を掛け、(A 3)より、$\partial_t^j\partial_x^\alpha\phi = r_{j,\alpha}(t,x)\times\phi$, $r_{j,\alpha}\in C^{1-j}([0,T];B^\infty(\mathbb{R}^n))$ $(j=0,1,\ \alpha\in\mathbb{N}^n)$ の形にかけることを使うと、

$$(2.1)\quad \Big\{\partial_t + i\frac{1}{2}\Big(D_1^2+\psi(x_1)\sum_{j,k=2}^{n}D_j\big(a_{jk}(x')D_k\big)\Big) + \sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(t,x)D_j+\tilde{c}(t,x)\Big\}(\phi u) = \phi f$$

と変形される。ここで、$\tilde{b}_j,\ \tilde{c}\in C([0,T];B^\infty(\mathbb{R}^n))$ $(1\le j\le n)$ で、

$$\tilde{b}_1(t,x)=\tilde{\psi}(x_1)^2\,\mathrm{Re}\,b_1(t,x)+2\tilde{\psi}(x_1)\tilde{\psi}'(x_1)\int_0^{x_1}\mathrm{Re}\,b_1(t,s,x')\,ds+i\,\mathrm{Im}\,b_1(t,x)$$

$$\tilde{b}_j(t,x)=b_j(t,x)-\psi(x_1)(1-\tilde{\psi}(x_1)^2)\sum_{k=2}^{n}a_{jk}(x')\int_0^{x_1}\mathrm{Re}\,\partial_k b_1(t,s,x')\,ds$$

$(2\le j\le n)$ となる。$\phi,\phi^{-1}\in C^1([0,T];B^\infty(\mathbb{R}^n))$ なので、(1.2)の代わりに(2.1)を解けばよい。(1.7)と $\tilde{\psi}$ の性質より、$|\mathrm{Re}\,\tilde{b}_j(t,x)|\le C'\psi(x_1)\lambda(|x|-2\mu)$ $(1\le j\le n)$ と評価でき、(2.1)に対して、$\rho(x)=\psi(x_1)$, $\lambda(t)=C'\lambda(t-2\mu)$ として、定理1.2の仮定(1.12)が満たされた。$e(x,\xi)=\sqrt{a_2(x,\xi)+a_2'(x',\xi')+10}$, $g(x,\xi)=\Big\{\int_0^{x_1}\tilde{\psi}(t)\,dt\cdot\xi_1+M\theta(x',\xi')\Big\}\cdot e(x,\xi)^{-1}$ $(M\gg 1)$, $m(x)=\sqrt{\Big(\int_0^{x_1}\tilde{\psi}(t)\,dt\Big)^2+|x'|^2+10}$ ととれば、(A 2)より(A 4)(A 5)が満たされる。よって、定理1.1の証明は定理1.2に帰着される。(証明終)

References

[Do.1] S. Doi, On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and the regularity of the solutions, J.Math.Kyoto Univ.34 (1994),319-328.

[Do.2] S. Doi, Remarks on the Cauchy problem for Schrödinger type equations, to appear in Comm.P.D.E..

[Ha] S. Hara, A necessary condition for H^∞-wellposed Cauchy problem of Schrödinger type equations with variable coefficients, J.Math.Kyoto Univ.32-2 (1992), 287-305.

[Hö] L. Hörmander, The analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, Tokyo (1985).

[Ic.1] W. Ichinose, Sufficient condition on H^∞ well posedness for Schrödinger type equations, Comm.P.D.E.9 (1984), 33-48.

[Ic.2] W. Ichinose, The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients, Osaka J.Math.24 (1987), 853-886.

[Ka] K. Kajitani, The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients, preprint in Tsukuba Univ..

[Mi] S. Mizohata, On the Cauchy problem, Academic Press (1985).

[Ta] J. Takeuchi, A necessary condition for the well-posedness of the Cauchy problem for a certain class of evolution equations, Proc.Japan Acad.50 (1974), 133-137.